Föreläsning 5: Z-transformen

I kursen skall vi ägna oss åt olika typer av transformer,
som kan användas för att analysera signaler och system.
De används även för att konstruera / designa system,
eller för att utföra beräkningar!

Tidsdomän (alt. rumsdomän) Frekvensdomän (alt. transformdomän)

Transform ("basbyte")

Signaler / funktioner
- Tidsdiskreta vs tidskontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .

Transformer / spektrum (också funktioner!)
- Diskreta vs kontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .

Invers transform

Konvergensområde!

Enkelsidig vs. dubbelsidig

"unilateral"

Enkelsidig Z-transform: $X_I[z] = \mathcal{Z}_I\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$

"bilateral"

Dubbelsidig Z-transform: $X_{II}[z] = \mathcal{Z}_{II}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$

$\Rightarrow \mathcal{Z}_I\{x[n]\} = $
$= \mathcal{Z}_{II}\{x[n]u[n]\}$

"ROC, Region of Convergence"

Liksom för laplacetransformen måste man även ange ett konvergensområde!

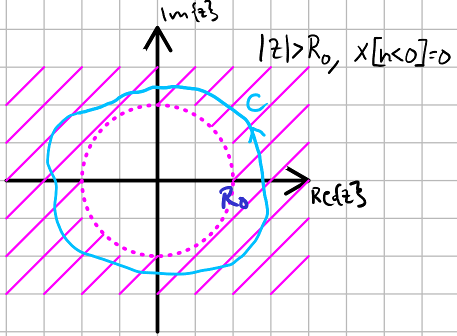
- Högersidig (kausal) x[n], med x[n < 0] = 0: $|z| > R_0$ (Laplace: $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$)
- Vänstersidig (antikausal) x[n], med x[n ≥ 0] = 0: $|z| < R_1$ (Laplace: $\mathrm{Re}\{s\} < \sigma_1$)
- Dubbelsidig x[n], med x[n] nollskild för minst något n > 0 och n < 0: $R_0 < |z| < R_1$

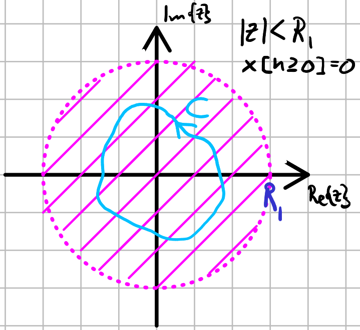
Invers Z-transform

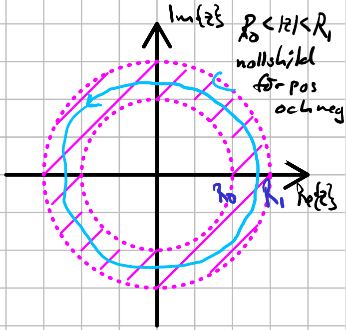
Inversa Z-transformen ges av integralen

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X[z]\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X[z]\, z^{n-1}\, dz,$$

där C är en sluten, moturs orienterad kurva i konvergensområdet, och som omsluter origo.







Invers Z-transform (forts.)

Beräkning av inversa Z-transformer sker på något av följande sätt:

1. Beräkning av kurvintegralen (komplex analys, residykalkyl, ...) (Laurent serier)

2. Potensserieutveckling av X[z] till en serie med termer innehållande z^{-n}

3. Partialbråksuppdelning av X[z] (ofta lättare med X[z]/z), följt av tabellslagning där man identifierar transformpar för respektive partialbråk.

Vi föredrar metod 3 när det går (det går oftast!)

Några transformer

Kroneckers delta

1) $\delta[n] \leftrightarrow 1 \qquad \forall z$

$\delta[n-m] \leftrightarrow z^{-m}, \quad \begin{cases} |z|>0 & \text{om } m>0 \\ |z|<\infty & \text{om } m<0 \end{cases}$

2) $\boxed{\begin{array}{ll} u[n] \leftrightarrow \dfrac{z}{z-1}, & |z|>1 \\ u[-n-1] \leftrightarrow -\dfrac{z}{z-1}, & |z|<1 \end{array}}$

Detta visar sig i många samband!

3) $\gamma^n u[n] \leftrightarrow \dfrac{z}{z-\gamma}, \quad |z|>|\gamma|$

$\gamma^n u[-n-1] \leftrightarrow -\dfrac{z}{z-\gamma}, \quad |z|<|\gamma|$

$$\mathcal{Z}_{II}\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = \ldots + \underbrace{\delta[-1]z^{1}}_{=0} + \underbrace{\delta[0]z^{0}}_{=1} + \underbrace{\delta[1]z^{-1}}_{=0} + \ldots$$

$$\mathcal{Z}_{II}\{\delta[n-m]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-m] z^{-n} = \Big/ \begin{array}{l} r=n-m \\ n=m+r \end{array} \Big/ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[r] z^{-m} \cdot z^{-r} = z^{-m} \mathcal{Z}_{II}\{\delta[n]\}$$

$$\mathcal{Z}_{II}\{u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} \text{ om } |z^{-1}|<1$$

$$= \frac{z}{z-1} \text{ om } |z|>1$$

$$\mathcal{Z}_{II}\{\gamma^n u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{z}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{\gamma}{z}} \text{ om } \left|\frac{\gamma}{z}\right|<1 = \frac{z}{z-\gamma} \text{ om } |z|>|\gamma|$$

(fortsättning)

Några transformer

4) $n\gamma^n u[n] \leftrightarrow \frac{\gamma z}{(z-\gamma)^2}, \quad |z|>|\gamma|$

$n\gamma^n u[-n-1] \leftrightarrow -\frac{\gamma z}{(z-\gamma)^2}, \quad |z|<|\gamma|$

$\gamma^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z|>|\gamma|$

$\Rightarrow$ (mult med n)

$n\gamma^n u[n] \leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{z-\gamma}\right\} =$

$= \frac{z-\gamma-z}{(z-\gamma)^2}(-z)$

5) $\gamma^n \cos(\Omega_0 n) u[n] \leftrightarrow \frac{z(z-\gamma\cos\Omega_0)}{z^2-2\gamma\cos(\Omega_0)z+\gamma^2}, \quad |z|>|\gamma|$

$\gamma^n \sin(\Omega_0 n) u[n] \leftrightarrow \frac{z\gamma\sin\Omega_0}{z^2-2\gamma\cos(\Omega_0)z+\gamma^2}, \quad |z|>|\gamma|$

(Även dessa går att "vända" mha konvergensområdet.)

Några egenskaper

Enkelsidig

1) Högerskift (jfr tidsförskjutning)

(i) $x[n-m]u[n-m] \longleftrightarrow z^{-m}X_I[z]$

(ii) $x[n-m]u[n] \longleftrightarrow z^{-m}X_I[z] + z^{-m}\sum_{n=1}^{m} z^{n}x[-n]$

Dubbelsidig

höger- eller vänsterskift

$x[n-m] \longleftrightarrow z^{-m}X_{II}[z]$

(ii) $$\mathcal{Z}_I\{x[n-m]u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-m]\cdot 1\cdot z^{-n} = \Big/ \begin{matrix} r=n-m \\ n=r+m \end{matrix} \Big/ = \sum_{r=-m}^{\infty} x[r]\,z^{-m}\cdot z^{-r} =$$

$$= z^{-m}\left(\sum_{r=0}^{\infty} x[r]\,z^{-r} + \sum_{r=-m}^{-1} x[r]\,z^{-r}\right) = z^{-m}X_I[z] + z^{-m}\sum_{n=1}^{m} z^{n}x[-n]$$

(fortsättning)

Några egenskaper

2) Spegling $x[-n] \leftrightarrow X_{II}[\frac{1}{z}]$

$$\mathcal{Z}_{II}\{x[-n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} = / r=-n / = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] (z^{-1})^{-r}$$

3) Mult. med n $n x[n] \leftrightarrow -z \frac{dX[z]}{dz}$

$$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\Rightarrow -z \frac{d}{dz} X[z] = -z \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-n) z^{-n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x[n] z^{-n}$$

4) Mult med γ^n $\gamma^n x[n] \leftrightarrow X[\frac{z}{\gamma}]$

$$\mathcal{Z}_I\{\gamma^n x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{-n} = X_I[\frac{z}{\gamma}]$$

5) Initialvärdet $x[0] = \lim_{z\to\infty} X_I[z]$

$$X_I[z] = x[0]\cdot 1 + \underbrace{x[1] z^{-1} + x[2] z^{-2} + \ldots}_{\to 0 \text{ då } z\to\infty}$$

6) Slutvärdet $\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{z\to 1} (z-1) X_I[z]$

Exempel: Inverstransform via partialbråk

Bestäm den inversa (dubbelsidiga) Z-transformen till

$$X[z] = \frac{35z^{-1}}{3+5z^{-1}-2z^{-2}}$$ för alla tänkbara konvergensområden!

Lösning: $X[z] = \frac{35z}{3z^2+5z-2} = \frac{35z}{3(z-\frac{1}{3})(z+2)}$, partialbråksuppdela $\frac{X[z]}{z}$:

$3z^2+5z-2=0 \Leftrightarrow$

$z = -\frac{5}{6} \pm \frac{7}{6}$

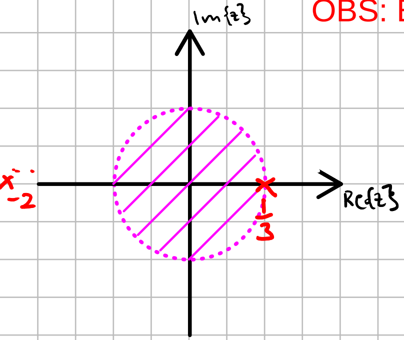
$z_1 = -2, \quad z_2 = \frac{1}{3}$

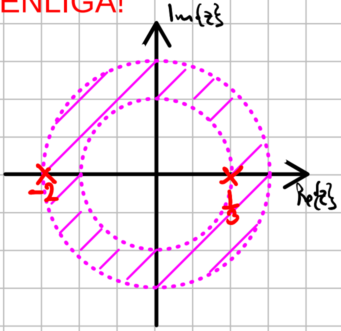
$$\frac{X[z]}{z} = \frac{-5}{z+2} + \frac{5}{z-\frac{1}{3}}$$

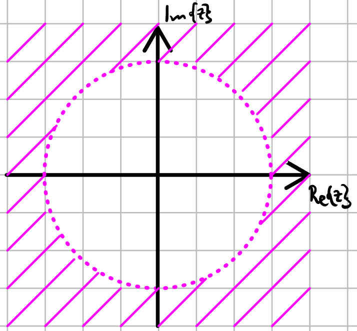
$$\Rightarrow X[z] = \frac{5z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{5z}{z+2}$$

Exempel: Inverstransform via partialbråk (forts.)

OBS: EJ SKALENLIGA!







$$X[z] = \frac{5z}{z-\frac{1}{3}} - \frac{5z}{z+2}$$

$$x[n] = -5\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[-n-1] + 5(-2)^n u[-n-1]$$

antikausal

$$x[n] = 5\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] + 5(-2)^n u[-n-1]$$

begränsad

Fouriertransformerbar

$$x[n] = 5\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] - 5(-2)^n u[n]$$

kausal