Föreläsning 6: Diskret-tid Fouriertransform (DTFT)

INTE Diskret Fouriertransform (DFT)

I kursen skall vi ägna oss åt olika typer av transformer,
som kan användas för att analysera signaler och system.
De används även för att konstruera / designa system,
eller för att utföra beräkningar!

Bas: $\{e^{j\Omega n}\}$, $|\Omega|<\pi$

Tidsdomän (alt. rumsdomän)	Frekvensdomän (alt. transformdomän)

Transform ("basbyte") →

Signaler / funktioner
- Tidsdiskreta vs tidskontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .

Transformer / spektrum (också funktioner!)
- Diskreta vs kontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .

← Invers transform

Definitionen av DTFT och invers DTFT

Diskret-tid Fouriertransform (DTFT):

$$X[\Omega] = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Invers DTFT:

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X[\Omega]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X[\Omega]e^{j\Omega n}d\Omega$$

Fourierserier:

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Invers:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Några transformer

Kroneckes delta

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 0 \\ 0 & \text{om } n \neq 0 \end{cases}$$

1) $\delta[n] \leftrightarrow 1$

$\delta[n-m] \leftrightarrow e^{-jm\Omega}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-m] e^{-j\Omega n} = \Big/ \begin{matrix} n-m=r \\ n=r+m \end{matrix} \Big/ = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[r] e^{-j\Omega r} \cdot e^{-j\Omega m}$$

$1 \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k \cdot 2\pi)$

förbjudet med $z = e^{j\Omega}$!

2) $u[n] \leftrightarrow vp\left\{\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1}\right\} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k \cdot 2\pi)$

jämför: $\mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$

OK med $|z|=1$!

$z = e^{j\Omega}$ ok

3) $\gamma^n u[n] \leftrightarrow \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\gamma}$ om $|\gamma| < 1$

jämför $\mathcal{Z}\{\gamma^n u[n]\} = \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| > |\gamma|$

$\gamma^n u[-n-1] \leftrightarrow -\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\gamma}$ om $|\gamma| > 1$

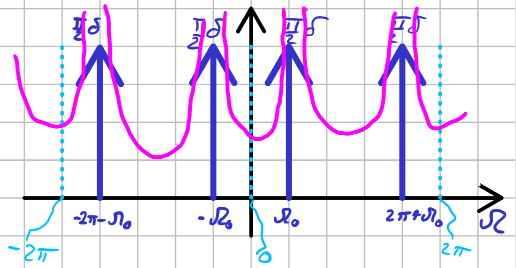
$\mathcal{Z}\{\gamma^n u[-n-1]\} = -\frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| < |\gamma|$

(fortsättning)

Några transformer

4) $\cos(\Omega_0 n) \longleftrightarrow \frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\delta(\Omega+\Omega_0-k\cdot 2\pi)+\delta(\Omega-\Omega_0-k\cdot 2\pi)\right)$

$\sin(\Omega_0 n) \longleftrightarrow j\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\delta(\Omega+\Omega_0-k\cdot 2\pi)-\delta(\Omega-\Omega_0-k\cdot 2\pi)\right)$



5)

$$\cos(\Omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow vp\left\{\frac{e^{j\Omega}(e^{j\Omega}-\cos\Omega_0)}{e^{2j\Omega}-2e^{j\Omega}\cos\Omega_0+1}\right\}+\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\delta(\Omega+\Omega_0-k\cdot 2\pi)+\delta(\Omega-\Omega_0-k\cdot 2\pi)\right)$$

$$\sin(\Omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow vp\left\{\frac{e^{j\Omega}\sin\Omega_0}{e^{2j\Omega}-2e^{j\Omega}\cos\Omega_0+1}\right\}+j\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\delta(\Omega+\Omega_0-k\cdot 2\pi)-\delta(\Omega-\Omega_0-k\cdot 2\pi)\right)$$

Några egenskaper

$x[n] \longleftrightarrow X[\Omega]$

1) Tidsskift $\quad x[n-n_0] \leftrightarrow X[\Omega]e^{-j\Omega n_0}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-n_0]e^{-j\Omega n} = \Big/ \begin{matrix} n-n_0=r \\ n=r+n_0 \end{matrix} \Big/ = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]e^{-j\Omega r} \cdot e^{-j\Omega n_0}$$

2) Frekvensskift

$x[n]e^{j\Omega_0 n} \longleftrightarrow X[\Omega-\Omega_0]$

speciellt: $x[n](-1)^n \longleftrightarrow X[\Omega-\pi]$

$$X[\Omega-\Omega_0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\Omega-\Omega_0)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\Omega_0 n} \cdot e^{-j\Omega n}$$

3) Spegling $\quad x[-n] \longleftrightarrow X[-\Omega]$

$$X[-\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(-\Omega)n} = \Big/ m=-n \Big/ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[-m]e^{-j\Omega m}$$

4) Mult. med n $\quad n x[n] \longleftrightarrow j\,\dfrac{dX[\Omega]}{d\Omega}$

5) Symmetri för reella signaler $\quad X[-\Omega] = X^*[\Omega]$

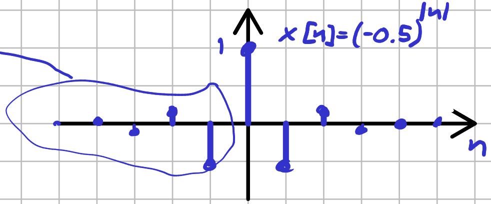
$x[n] = x^*[n]$

$$X[-\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(-\Omega)n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j\Omega n}\right)^* = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}\right)^* = X^*[\Omega]$$

Exempel: Amplitudspektrum via Pol-Nollställen

Beräkna och skissera amplitudspektrum

för signalen $x[n]=(-0.5)^{|n|} = (-0.5)^{-n}u[-n-1] + (-0.5)^{n}u[n]$



Skriv om: $x[n] = (-2)^{n}u[-n-1] + (-0.5)^{n}u[n]$

utanför $|-0.5|$

$$X[z] = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-2)^{n}u[-n-1] + \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-0.5)^{n}u[n] = \dots = -\frac{z}{z-(-2)} + \boxed{\frac{z}{z+0.5}}$$

innanför $|-2|$

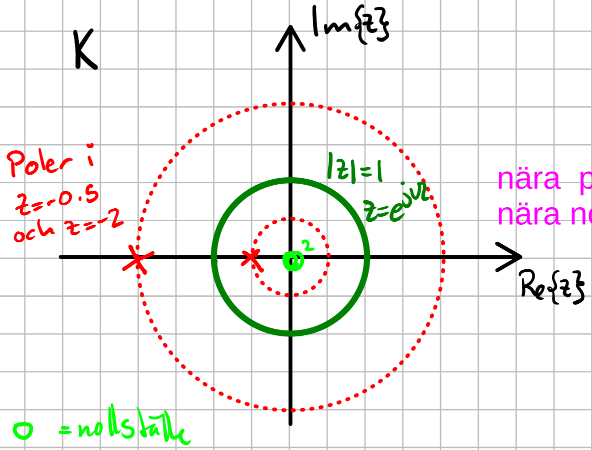
Eftersom $|-0.5| < |z| = 1 < |-2|$ får vi sätta $z = e^{j\Omega}$:

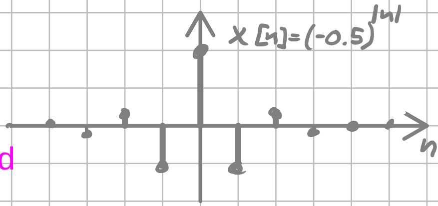
$$X[\Omega] = -\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}+2} + \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}+0.5}$$

$|X[0]| = \left|-\frac{1}{3} + \frac{1}{1.5}\right| = \frac{1}{3}$

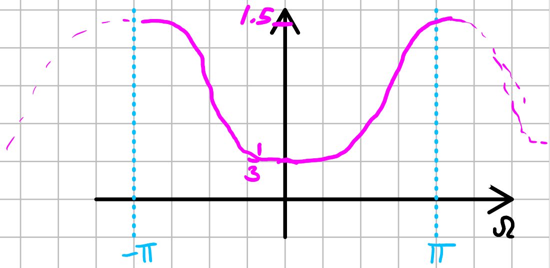
$|X[\pi]| = |1+0,5| = 1,5$

Exempel: Amplitudspektrum via Pol-Nollställen





nära poler = större amplitud
nära nollställe = mindre



Tänk: Tung, elastisk gummiduk som är uppspänd över z-planet.
Polerna är oändligt höga tältpinnar, nollställena är tältspikar.
Dukens höjd längs enhetscirkeln ger amplitudspektrum.