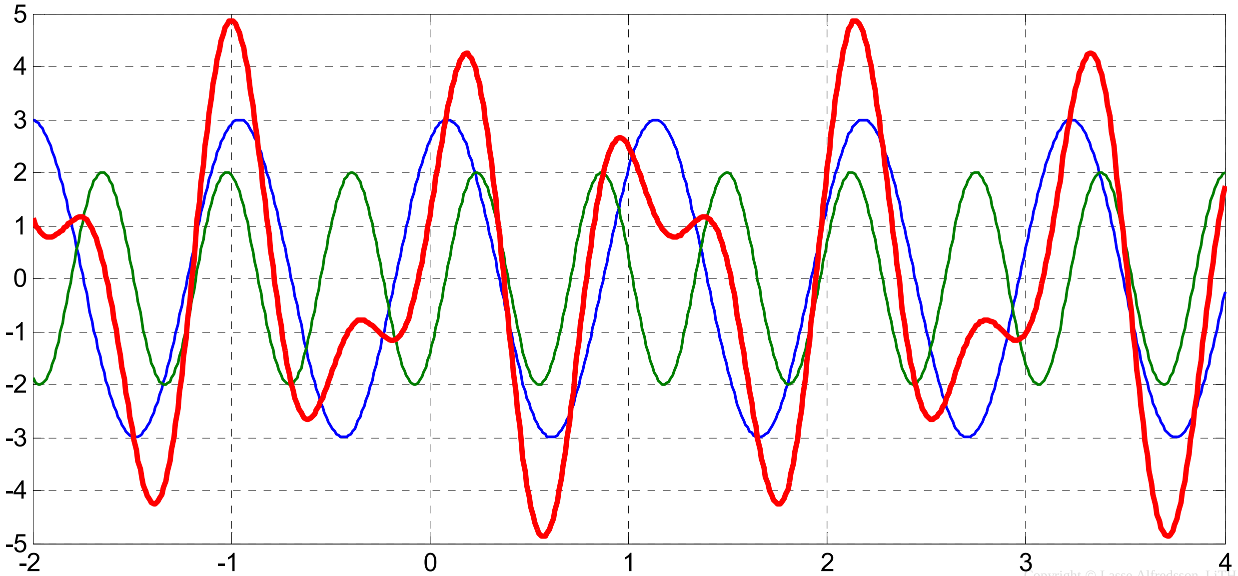
Fourierserieanalys

- Jag inleder först med ett resonemang på tavlan!!!

Summa av cos/sin

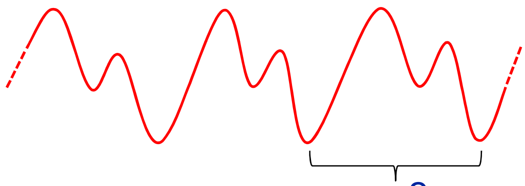
$$\underbrace{x(t)}_{\text{röd kurva}} = \underbrace{3\sin\left(6t+\frac{\pi}{3}\right)}_{\text{blå kurva}} + \underbrace{2\cos\left(10t-\frac{3\pi}{4}\right)}_{\text{grön kurva}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_a}{\omega_b} = \dfrac{6}{10} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \\ \omega_1 = \text{SGD}(6,10) = 2 \text{ rad/s} \\ \Rightarrow \quad T = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = \pi \text{ sek} \end{cases}$$



Fourierserieutveckling av periodiska signaler

En fysikalisk T-periodisk signal $x(t)$, dvs. $x(t) = x(t+T)$, kan uttryckas som följande summa av sinusar:



$$T = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$$\boxed{x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k)}$$

$\Leftrightarrow$ **Fourierserieutveckling** av $x(t)$

$\omega_1 = 2\pi f_1$: grundvinkelfrekvens

$f_1 = \frac{1}{T}$: grundfrekvens

X_0: medelvärdesnivå

$\hat{X}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$: grundton

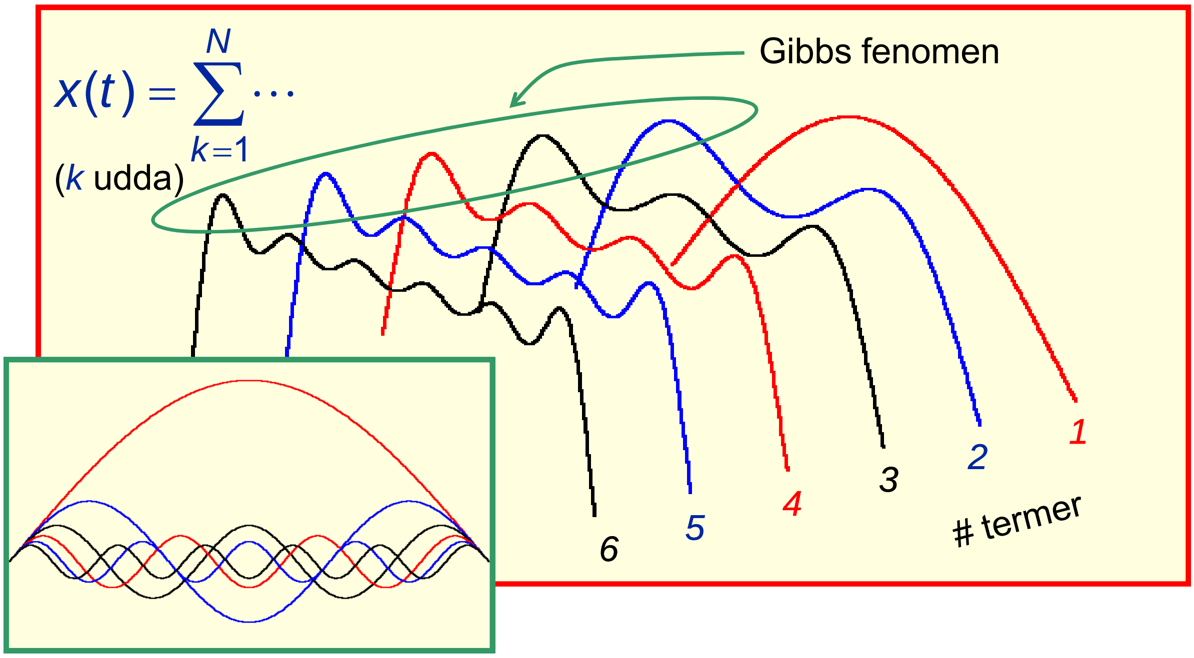
$\hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k)$, $k = 2, 3, 4\ldots$: övertoner

deltoner

Ex: Approximation av fyrkantvåg

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} \cdots$$

(k udda)



Fourierserieutveckling, sammanfattn:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k)}$$

Grundvinkelfrekvens $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

Samband:

$$\boxed{\begin{aligned} X_0 &= C_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t)\,dt \\ \hat{X}_{k>0} &= 2|C_k| \\ \varphi_{k>0} &= \arg C_k + \frac{\pi}{2} \end{aligned}}$$

Amplitudspektrum (X_0, $\hat{X}_{k>0}$)

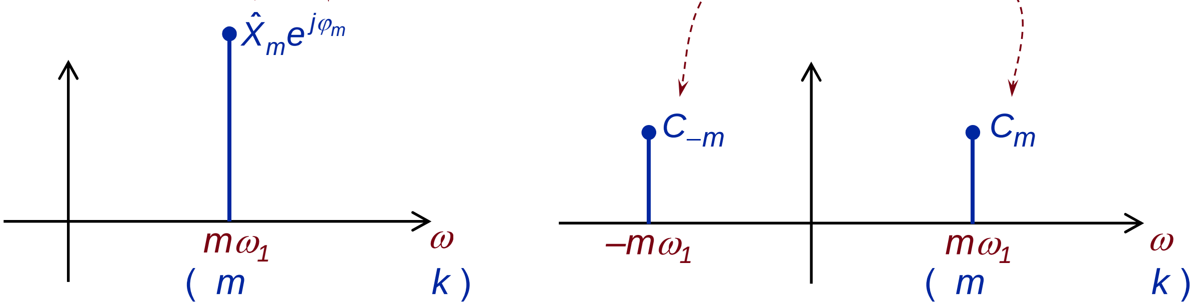
Fasspektrum ($\varphi_{k>0}$)

där $\boxed{C_k = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t) e^{-jk\omega_1 t}\,dt}$ Komplexa fourierserie-koefficienter

$\boxed{x(t) \text{ reellvärd } \Leftrightarrow C_{-k} = C_k^*}$

Spektrum – grafisk beskrivning av periodisk signal

$$\hat{X}_m \sin\left(m\omega_1 t + \varphi_m\right) = \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{j\left(\varphi_m - \frac{\pi}{2}\right)}}_{C_m} \cdot e^{jm\omega_1 t} + \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{-j\left(\varphi_m - \frac{\pi}{2}\right)}}_{C_m^* = C_{-m}} \cdot e^{-jm\omega_1 t}$$



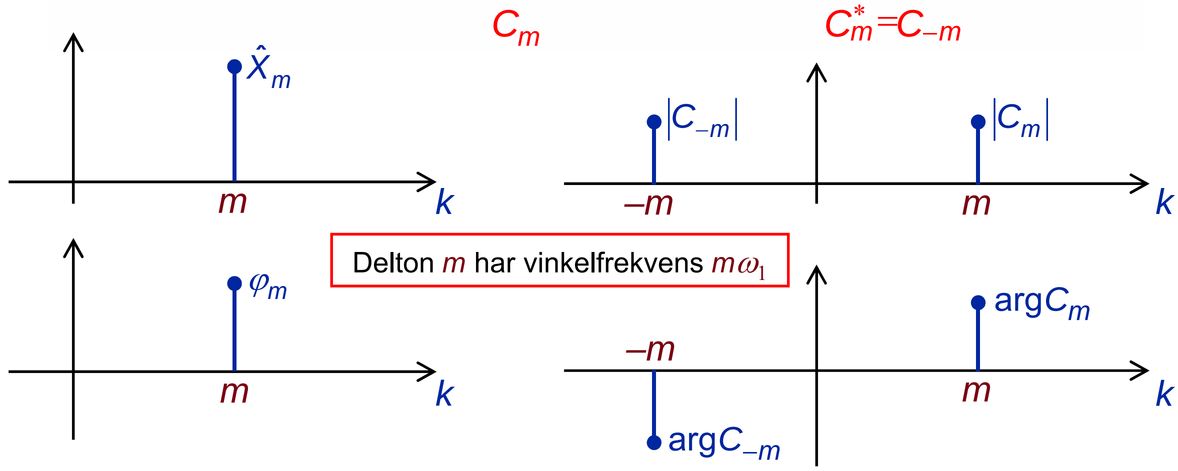
Enkelsidigt
komplext spektrum

Dubbelsidigt
komplext spektrum

(Antingen ω-axel eller k-axel)

Spektrum – grafisk beskrivning av periodisk signal

$$\hat{X}_m \sin(m\omega_1 t + \varphi_m) = \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{j\left(\varphi_m - \frac{\pi}{2}\right)}}_{C_m} \cdot e^{jm\omega_1 t} + \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{-j\left(\varphi_m - \frac{\pi}{2}\right)}}_{C_m^* = C_{-m}} \cdot e^{-jm\omega_1 t}$$



Delton m har vinkelfrekvens $m\omega_1$

Enkelsidigt *amplitudspektrum* resp. *fasspektrum*

Dubbelsidigt *amplitudspektrum* resp. *fasspektrum*

Fourierserieutveckling

JAVA-demo:

Generering av periodiska signaler med hjälp av (co)sinusformade basfunktioner:

www.falstad.com/fourier

OBS – testa även detta själv!

LTI-system: periodiskt in $\Rightarrow$ periodiskt ut

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} \longrightarrow \boxed{\text{Stabilt LTI-system}} \longrightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot \mathcal{H}\left\{e^{jk\omega_1 t}\right\}$$

$$= /\text{Tavlan}/ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{jk\omega_1 t}$$

Ex.1: $y(t)=x(t-t_0)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1(t-t_0)}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{C_k e^{-jk\omega_1 t_0}}_{D_k} e^{jk\omega_1 t}$

Ex.2: $y(t)=x'(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \dfrac{d\left(e^{jk\omega_1}\right)}{dt}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{jk\omega_1 \cdot C_k}_{D_k} e^{jk\omega_1 t}$

<u>Ex. 2 $\Rightarrow$ Allmänt samband:</u>

C_k för den periodiska signalen $x(t)$ kan erhållas från $C_{kx'}$ för derivatasignalen $x'(t)$:

$$\boxed{C_k = \frac{C_{kx'}}{jk\omega_1}}$$

Kretsberäkningar (här söks *y(t)*)

1. Fourierserieutveckla källsignalerna (t.ex en källa $x(t)$)

2. Använd likströmsteori för källornas medelvärden ($X_0 \Rightarrow Y_0$)

3. Använd $j\omega$ -metoden för källornas deltoner:

$$\hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k) \to X_k = \hat{X}_k e^{j\varphi_k} \qquad R\,,\; jk\omega_1 L\,,\; \frac{1}{jk\omega_1 C}$$

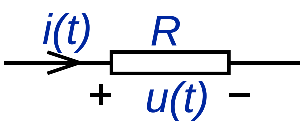
Beräkna sökt storhet på komplex form:

$$Y_k = \hat{Y}_k e^{j\psi_k} \quad \Rightarrow \quad \text{Delton } k: \quad y_k(t) = \hat{Y}_k \sin(k\omega_1 t + \psi_k)$$

4. Superposition ger tidsuttrycket för sökt storhet:

$$y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \sin(k\omega_1 t + \psi_k)$$

Signal(medel)effekt



Aktiv elektrisk effekt då $u(t)$ & $i(t)$ = sin(…):

$$P = \frac{U_e^2}{R} = R \cdot I_e^2 = R \cdot \frac{1}{T} \int_T i^2(t)\,dt$$

- Signaleffekt för allmän signal $x(t)$: $P = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2\,dt$

Specialfall; om $x(t)$ är T-periodisk $\Rightarrow$ Signal*medel*effekt:

$$P = \Big/ \text{Låt } T_0 = k \cdot T \Big/ = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k \cdot T} \int_{-k \cdot T/2}^{k \cdot T/2} |x(t)|^2\,dt$$

$$= \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\cancel{k} \cdot T} \cdot \cancel{k} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2\,dt = X_e^2$$

Klirrfaktorn & Parsevals formel

- Klirrfaktorn (THD):

$$K = \frac{X_e\big|_{\text{övertonerna}}}{X_e\big|_{\text{alla deltoner}}} = \frac{\left(\sum_{k=2}^{\infty} X_{ke}^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} X_{ke}^2\right)^{1/2}}$$

K är ett mått på övertonshalten hos signalen $x(t)$!

- Parsevals formel:

$$\boxed{X_e^2 = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2}$$

Bevis:

$$\underline{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\, dt} = X_e^2 = X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} X_{ke}^2 = \Big/\ X_{ke} \underset{\text{sinus!}}{=} \frac{\hat{X}_k}{\sqrt{2}} = \frac{2|C_k|}{\sqrt{2}}\ \Big/$$

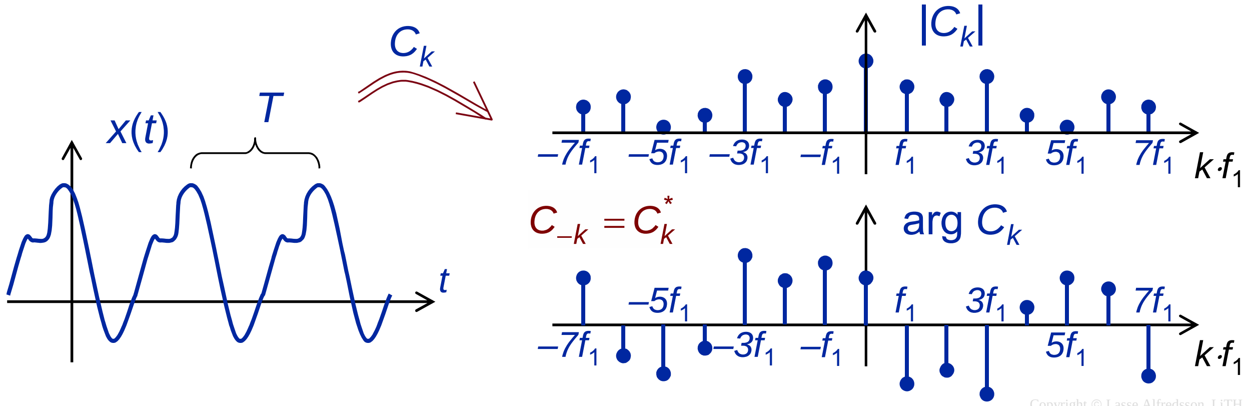
$$= X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4|C_k|^2}{2} = C_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k|^2 = \underline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2}$$

Fourieranalys & fouriersyntes

Fourier**analys**:

$x(t)$ och ω_1 (eller T) är givna. Bestäm $C_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_1 t}dt$

Signalens frekvensspektrum, dvs. C_k ritad som funktion av k, frekvens f eller vinkelfrekvens ω, är ofta av intresse.
Vanligen ritar man då amplitudspektrum och fasspektrum:



Fourieranalys & fouriersyntes

Fourier**syntes**:

C_k och ω_1 (eller T) är givna. Bestäm/skapa $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}$

I praktiska sammanhang nöjer man sig med en approximation: $x_M(t) = \sum_{k=-M}^{M} C_k e^{jk\omega_1 t}$