Linjära System – Föreläsning 10: Fourieranalys av periodiska signaler

Energifritt LTI-system

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow h(t) = \mathcal{H}\{\delta(t)\}$$

$$x(t) \qquad\qquad y(t) = y_{zs}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = (x * h)(t)$$

$$x_n(t) \dashrightarrow y_n(t)$$

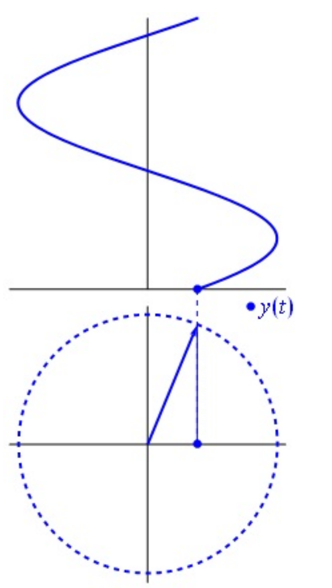
$$x(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t) \dashrightarrow y(t) = \sum_n a_n \cdot y_n(t)$$

$$x(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t) \dashrightarrow$$

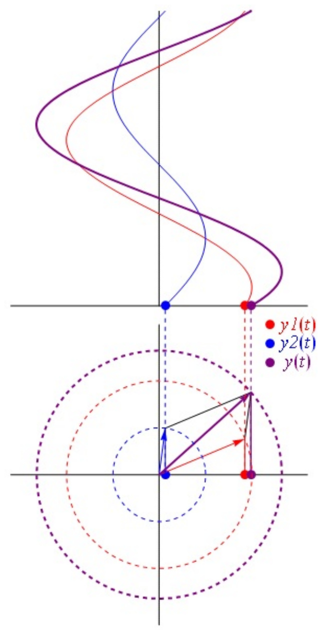
$x(t) =$ allmän periodisk signal $\dashrightarrow$

Animeringar – signaler från roterande visare:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = Re\{e^{j\alpha}\} \\ \sin(\alpha) = Im\{e^{j\alpha}\} \end{cases}$$



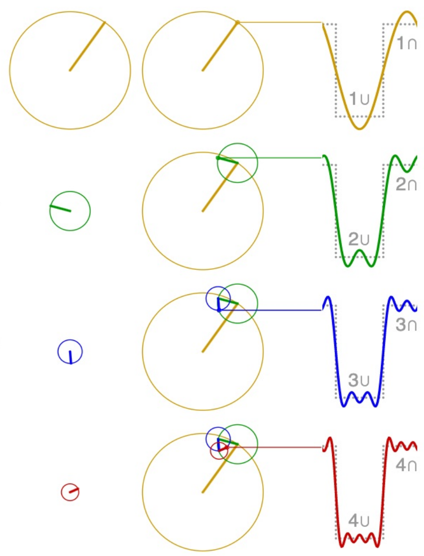
$$y(t) = \cos(\omega_0 t)$$



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$= A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) + B \cdot \cos(\omega_0 t + \beta)$$

$$= C \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



Allmän periodisk signal genom addition av sinusar/cosinusar med olika vinkelfrekvenser

VIDEO 1.1

Periodisk summa av cos/sin

Låt $x(t) = A\sin(\omega_a t + \alpha) + B\cos(\omega_b t + \beta)$.

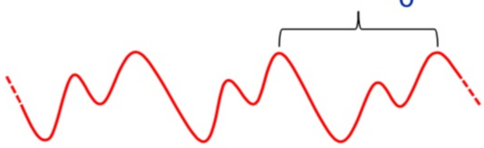
- Om $\omega_b = \omega_a \;\Rightarrow\; x(t) = C\cos(\omega_a t + \gamma)$ är T_0-periodisk,

  dvs. $x(t) = x(t + T_0)$ med $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_a}$

- Om $\omega_a \neq \omega_b$ & $\dfrac{\omega_a}{\omega_b} \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; x(t)$ är T_0-periodisk, med $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$,

  där $\boxed{\omega_0 = \mathrm{SGD}(\omega_a, \omega_b)}$

  (SGD = Största Gemensamma Delare (SGD), alt. GCD, GCF)



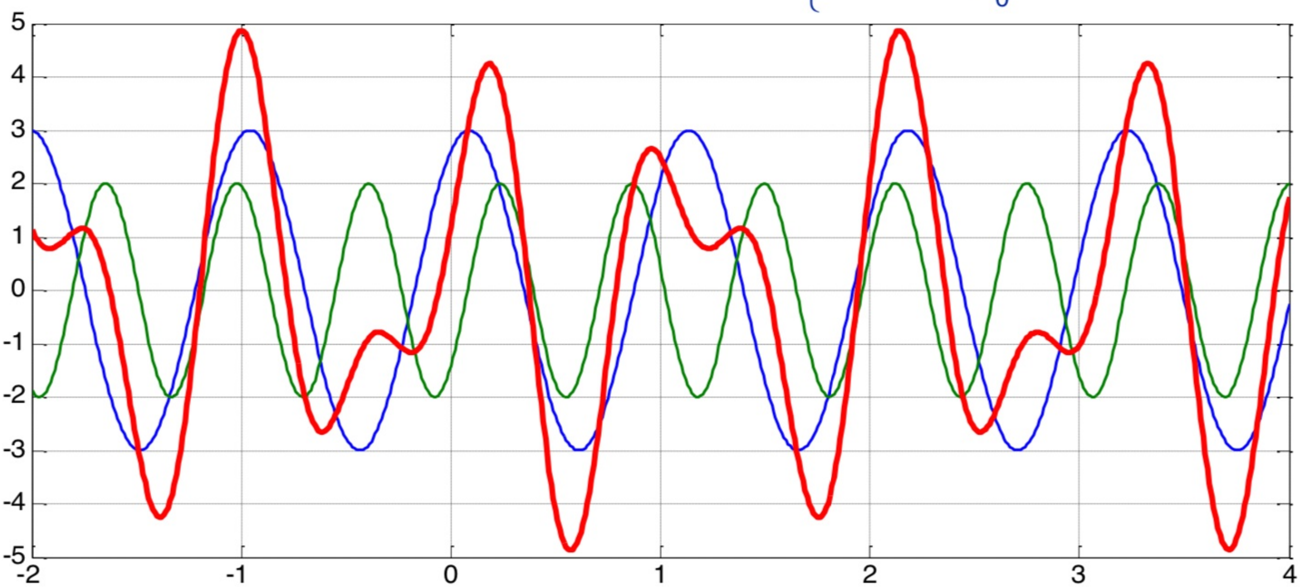
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_a T_0 = k \cdot 2\pi \\ \omega_b T_0 = m \cdot 2\pi \end{cases}, \quad k, m \in \mathbb{N}_+ \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \omega_a = k \cdot \omega_0 \\ \omega_b = m \cdot \omega_0 \end{cases}}, \quad \text{där} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

VIDEO 1.2

Ex, summa av cos/sin:

$$\underbrace{x(t)}_{\text{röd kurva}} = \underbrace{3\sin\left(6t + \frac{\pi}{3}\right)}_{\text{blå kurva}} + \underbrace{2\cos\left(10t - \frac{3\pi}{4}\right)}_{\text{grön kurva}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_a}{\omega_b} = \dfrac{6}{10} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \\ \omega_0 = \mathrm{SGD}(6, 10) = 2 \text{ rad/s} \\ \Rightarrow \quad T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \pi \text{ sek} \end{cases}$$



Periodicitetstest, exempel 2:

$$w(t) = 2\sin(9t) - 5\cos\left(\sqrt{3}\,t + \frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(5t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$\omega_a = 9$ rad/s $\qquad \omega_b = \sqrt{3}$ rad/s $\qquad \omega_c = 5$ rad/s

$\Rightarrow \omega_a/\omega_c = 9/5 \in \mathbb{Q}$ men $\omega_a/\omega_b = 9/\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $w(t)$ är *inte* periodisk!

Exempel 3:

$$z(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}\right) + 7\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$\omega_a = \frac{2\pi}{3}$ rad/s $\qquad \omega_b = \pi$ rad/s

$\Rightarrow \dfrac{\omega_a}{\omega_b} = \dfrac{2\pi}{3\cdot\pi} = \dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $z(t)$ är periodisk med periodtid $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ sek

där $\omega_0 = SGD\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) = SGD\left(\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\pi, \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\pi\right) = \frac{1}{3}\cdot\pi$ rad/s

$\Rightarrow T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{\pi/3} = 6$ sek

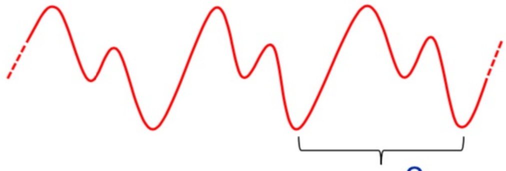
$\begin{pmatrix} \omega_a = 2\omega_0 \\ \omega_b = 3\omega_0 \end{pmatrix}$

Fourierserieanalys av periodiska signaler

Fourierserieutveckling av periodiska signaler

VIDEO 2.1

En fysikalisk T_0-periodisk signal $x(t)$, dvs. $x(t) = x(t+T_0)$, kan uttryckas som den **trigonometriska fourierserien**:



Periodtid $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

$$\boxed{x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right)}$$

= "Fourierserien till $x(t)$" (alt. "fourierserie-*utvecklingen* av $x(t)$")

$\omega_0 = 2\pi f_0$: grundvinkelfrekvens

$f_0 = \dfrac{1}{T_0}$: grundfrekvens

a_0: medelvärdesnivå

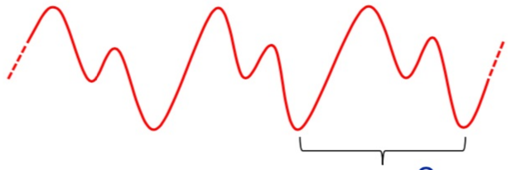
$\left.\begin{array}{r} \cos/\sin(\omega_0 t)\text{: grundton(er)} \\ \cos/\sin(n\omega_0 t),\ n = 2, 3, 4\ldots\text{: övertoner} \end{array}\right\}$ deltoner

Fourierserieanalys av periodiska signaler

Fourierserieutveckling av periodiska signaler

VIDEO 2.2

Vi föredrar att uttrycka fourierserien på **kompakt form**:



Periodtid $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

$$\boxed{x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)}$$

I kursen *föredrar* vi alltså denna enklare trigonometriska fourierserie i stället för den på föregående sida! Övriga definitioner där gäller dock allmänt!

$$\text{där}\ \begin{cases} C_0 = a_0 \\ C_{n>0} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_{n>0} = \arctan\left(\dfrac{-b_n}{a_n}\right) \end{cases}$$

Dock:

Vi kommer att beräkna C_n och θ_n på annat/enklare sätt, m.h.a. *komplexa fourierseriekoefficienter* (kommer längre fram)!

Fortsättning efter video 2:

C_0: medelvärdesnivå

$C_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1)$: grundton (dvs. för $n = 1$)

$C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$, $n = 2, 3, 4\ldots$: övertoner

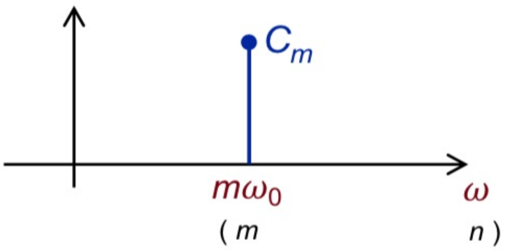
} deltoner

(*För fullständig definition av en delton, så tar man även med dess amplitud och fas*)

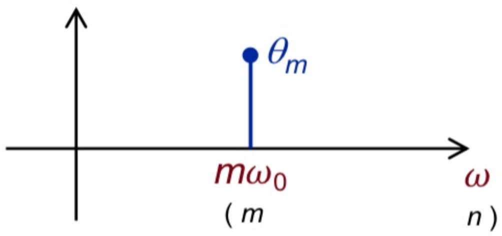
Frekvensspektrum – grafisk frekvensbeskrivning av signal

<u>Delton *m*:</u> $C_m \cos\left(m\omega_0 t + \theta_m\right)$

Enkelsidigt **amplitudspektrum**



Enkelsidigt **fasspektrum**



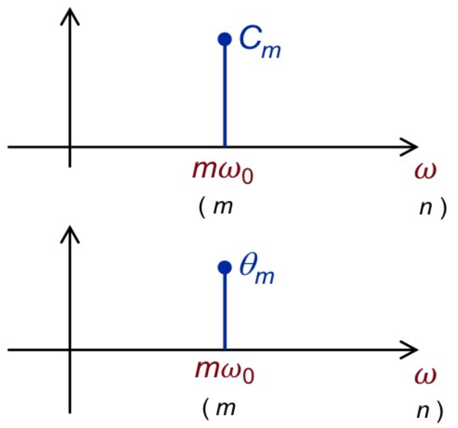
Demonstration av frekvensspektrum för generella signaler –
testa även själv: **www.falstad.com/fourier** (*Java-demo*)

Dubbelsidigt frekvensspektrum – härledning i Video 3

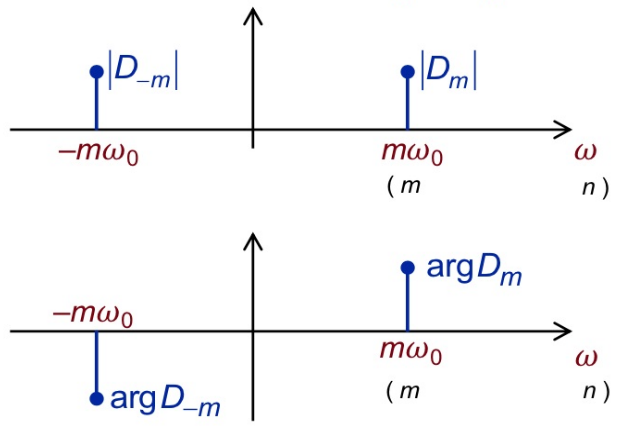
(Se den efter Fö 10, innan Fö 11)

Video: "Härledning av den komplexa fourierserien"

<u>Delton *m*:</u> $C_m \cos\left(m\omega_0 t + \theta_m\right) = \underbrace{\frac{C_m}{2} e^{j\theta_m}}_{:= D_m} \cdot e^{jm\omega_0 t} + \underbrace{\frac{C_m}{2} e^{-j\theta_m}}_{= D_m^* = D_{-m}} \cdot e^{-jm\omega_0 t}$



Enkelsidigt *amplitudspektrum*
resp. *fasspektrum*



Dubbelsidigt *amplitudspektrum*
resp. *fasspektrum*

Fourierserieutveckling, sammanfattning:

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)}$$

Grundvinkel-frekvens $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

Samband:

$$\boxed{D_{n>0} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}} \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{aligned} & C_0 = D_0 = \frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)\,dt \\ & C_{n>0} = 2\left|D_n\right| \\ & \theta_{n>0} = \arg D_n \end{aligned}} \right.$$

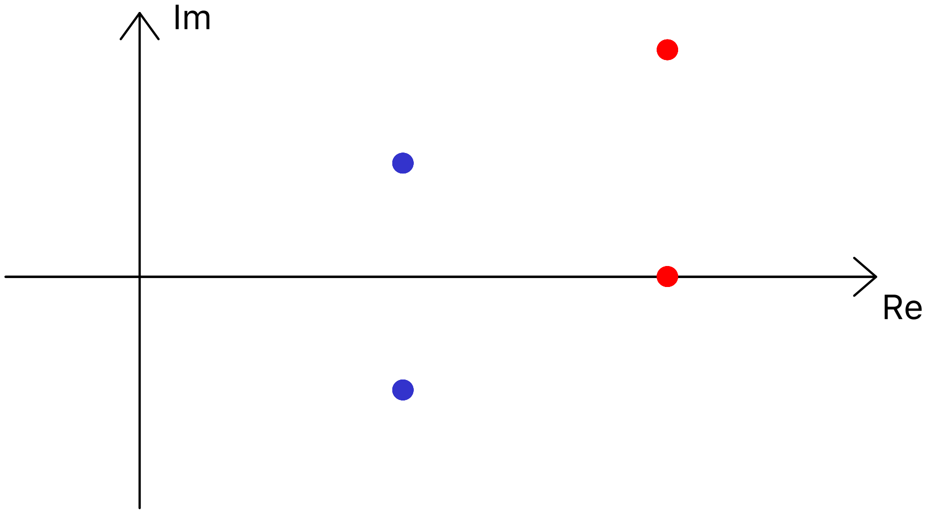
} Enkelsidigt amplitudspektrum (C_0, $C_{n>0}$)

} Enkelsidigt fasspektrum ($\theta_{n>0}$)

där $\boxed{D_n = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt}$ Komplexa fourierserie-koefficienter

$\boxed{x(t) \text{ reellvärd} \Leftrightarrow D_{-n} = D_n^*}$

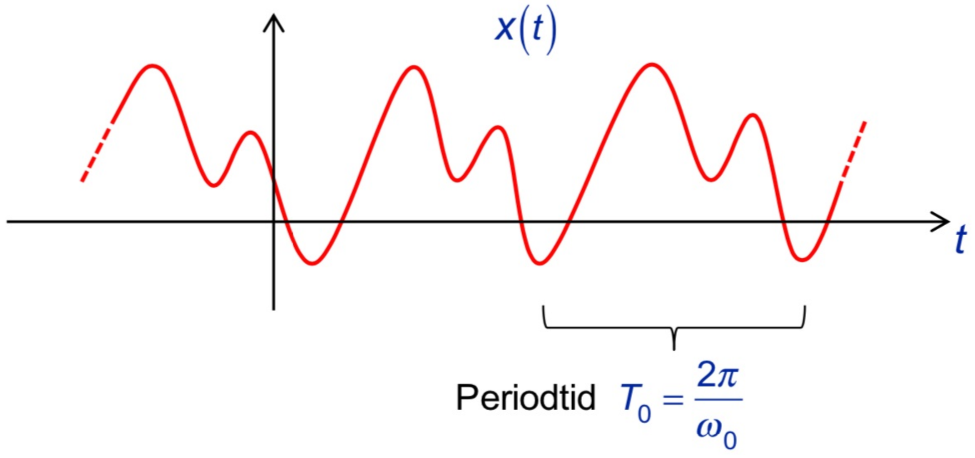
Sambandet härleds i Video 4, "Härledning av Dn-integralen": Se den efter föreläsningen – innan nästa föreläsning!



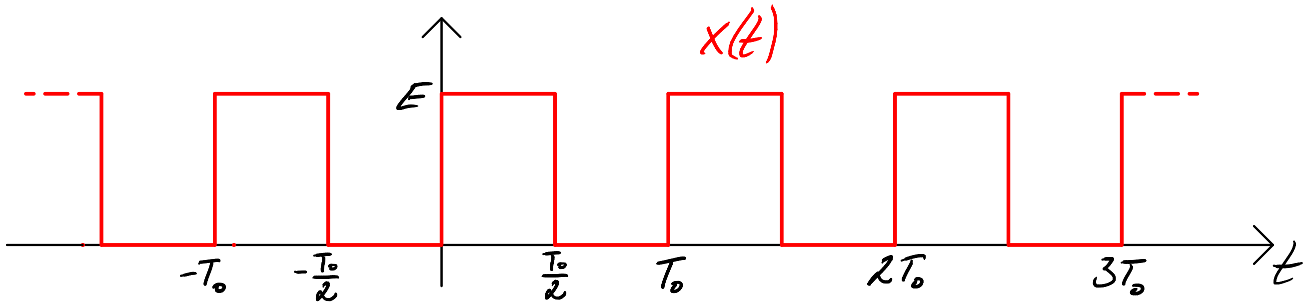
Beteckningsskillnad, fourierserier

Föreläsningar, videor & formelsamling	Kursboken (*Sune Söderkvist*)
Periodtid T_0	T
Grundfrekvens $f_0 = \frac{1}{T_0}$	$f_1 = \frac{1}{T}$
Grundvinkelfrekvens $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	$\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T}$
Indexvariabel n	k
$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \end{aligned}}$	$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} \\ &= X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k) \end{aligned}}$
$\boxed{D_{n>0} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}}$	$\boxed{C_{k>0} = \frac{\hat{X}_k}{2} e^{j\left(\varphi_k - \frac{\pi}{2}\right)}}$

Typisk beräkningsgång vid fourierserieanalys av periodisk signal:



Exempel – beräkna fyrkantvågens dubbelsidiga spektrum och enkelsidiga spektrum



Beräkning på föreläsningen $\Longrightarrow$

$$D_n = \begin{cases} \frac{E}{2} \ ; & n=0 \\ 0 \ ; & \text{jämna } n \neq 0 \\ \frac{E}{jn\pi} \ ; & \text{udda } n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_0 = \frac{E}{2} \\ C_n = \begin{cases} 0 \ ; & \text{jämna } n>0 \\ \frac{2E}{n\pi} \ ; & \text{udda } n \end{cases} \\ \theta_n = \begin{cases} 0 \ ; & \text{jämna } n \\ -\frac{\pi}{2} \ ; & \text{udda } n \end{cases} \end{cases}$$