Linjära System – Föreläsning 10: Fourieranalys av periodiska signaler

$\delta(t)$ → Energifritt LTI-system $\mathcal{H}$ → $h(t) = \mathcal{H}\{\delta(t)\}$

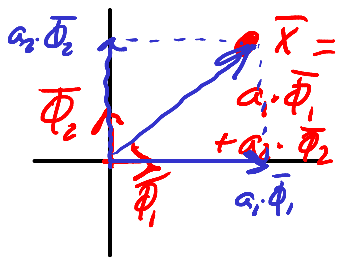
$x(t)$ → $\mathcal{H}$ → $y(t) = y_{zs}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = (x * h)(t)$

$x_n(t)$ - - - - → $y_n(t)$

$x(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t)$ $\xrightarrow{\text{Linjärt}}$ $y(t) = \sum_n a_n \cdot y_n(t)$

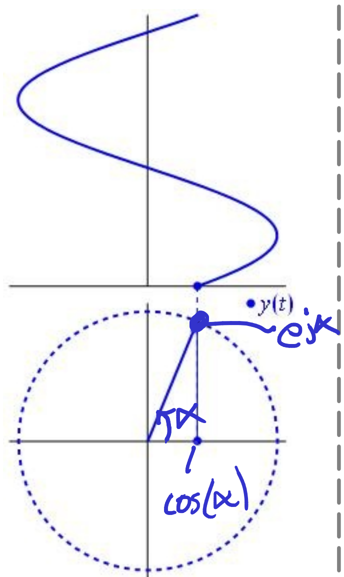
$x(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t)$ - - - - → ?

$x(t) =$ allmän periodisk signal - - - - → ?

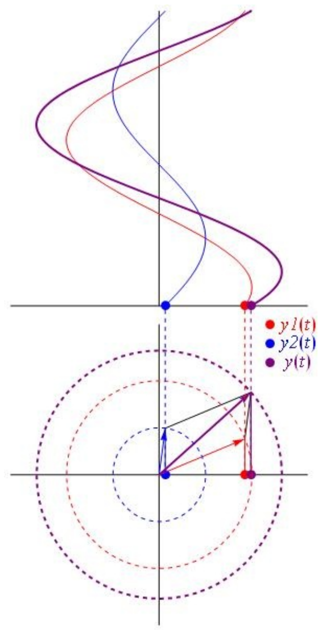


Animeringar – signaler från roterande visare:

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \mathrm{Re}\{e^{j\alpha}\} \\ \sin(\alpha) = \mathrm{Im}\{e^{j\alpha}\} \end{cases}$$



$y(t) = \cos(\omega_0 t)$



$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

$= A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) + B \cdot \cos(\omega_0 t + \beta)$

$= C \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\frac{4}{\pi}\sin\theta$

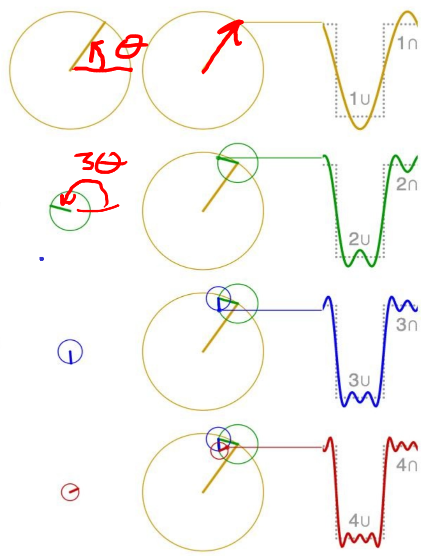
$+$

$\frac{4}{3\pi}\sin 3\theta$

$+$

$\frac{4}{5\pi}\sin 5\theta$

$\frac{4}{7\pi}\sin 7\theta$



Allmän periodisk signal genom addition av sinusar/cosinusar med olika vinkelfrekvenser

VIDEO 1.1

Periodisk summa av cos/sin

Låt $x(t) = A\sin(\omega_a t + \alpha) + B\cos(\omega_b t + \beta)$.

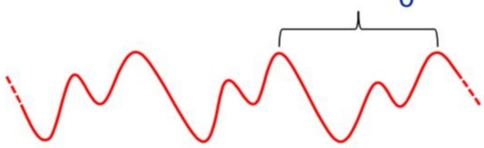
- Om $\omega_b = \omega_a \Rightarrow x(t) = C\cos(\omega_a t + \gamma)$ är T_0-periodisk,

  dvs. $x(t) = x(t + T_0)$ med $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_a}$

- Om $\omega_a \neq \omega_b$ & $\dfrac{\omega_a}{\omega_b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x(t)$ är T_0-periodisk, med $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$,

  där $\boxed{\omega_0 = \mathrm{SGD}(\omega_a, \omega_b)}$

  (SGD = Största Gemensamma Delare (SGD), alt. GCD, GCF)



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_a T_0 = k \cdot 2\pi \\ \omega_b T_0 = m \cdot 2\pi \end{cases}, \quad k, m \in \mathbb{N}_+ \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \omega_a = k \cdot \omega_0 \\ \omega_b = m \cdot \omega_0 \end{cases}}, \quad \text{där} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

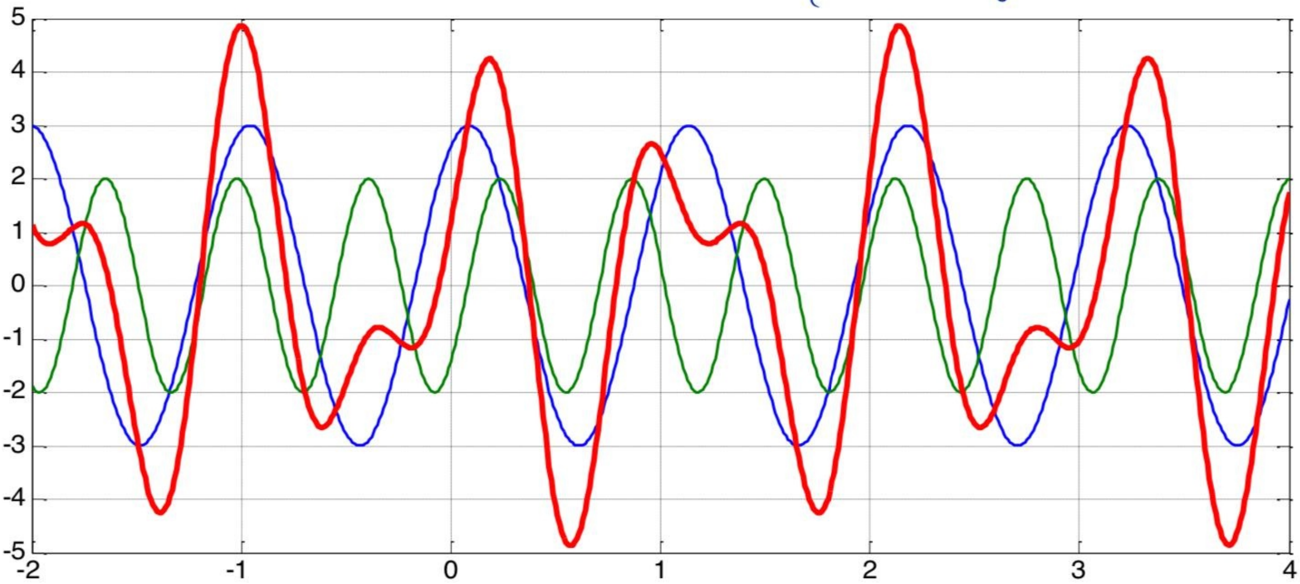
Fourierserieanalys av periodiska signaler

VIDEO 1.2

Ex, summa av cos/sin:

$$\underbrace{x(t)}_{\text{röd kurva}} = \underbrace{3\sin\left(6t + \frac{\pi}{3}\right)}_{\text{blå kurva}} + \underbrace{2\cos\left(10t - \frac{3\pi}{4}\right)}_{\text{grön kurva}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\omega_a}{\omega_b} = \dfrac{6}{10} \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \\ \omega_0 = \mathrm{SGD}(6, 10) = 2 \text{ rad/s} \\ \Rightarrow \quad T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \pi \text{ sek} \end{cases}$$



Periodicitetstest, exempel 2:

$$w(t) = 2\sin(9t) - 5\cos(\sqrt{3}\,t + \tfrac{\pi}{3}) + 3\sin(5t - \tfrac{\pi}{2})$$

$\omega_a = 9$ rad/s $\quad \omega_b = \sqrt{3}$ rad/s $\quad \omega_c = 5$ rad/s

$\Rightarrow \omega_a/\omega_c = 9/5 \in \mathbb{Q}$ men $\omega_a/\omega_b = 9/\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

$\Rightarrow w(t)$ är *inte* periodisk!

Exempel 3:

$$z(t) = \cos(\tfrac{2\pi}{3}t - \tfrac{\pi}{2}) + 7\sin(\pi t + \tfrac{\pi}{3})$$

$\omega_a = \frac{2\pi}{3}$ rad/s $\quad \omega_b = \pi$ rad/s

$\Rightarrow \dfrac{\omega_a}{\omega_b} = \dfrac{2\pi}{3\cdot\pi} = \dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow z(t)$ är periodisk med periodtid $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ sek

där $\omega_0 = SGD(\frac{2\pi}{3}, \pi) = SGD(\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\pi, \frac{1}{3}\cdot 3\cdot\pi) = \frac{1}{3}\cdot\pi$ rad/s

$\Rightarrow T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{2\pi}{\pi/3} = 6$ sek

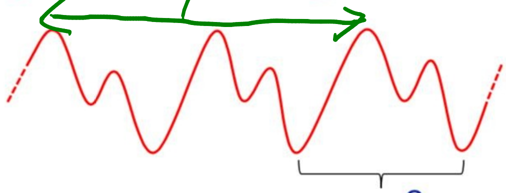
$\begin{pmatrix} \omega_a = 2\omega_0 \\ \omega_b = 3\omega_0 \end{pmatrix}$

$T_0 ?$ $T_0 = T_{0,min}$

Fourierserieutveckling av periodiska signaler

VIDEO 2.1

En fysikalisk T_0-periodisk signal $x(t)$,
dvs. $x(t) = x(t + T_0)$, kan uttryckas
som den **trigonometriska fourierserien**:



Periodtid $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right)$$

= "Fourierserien till $x(t)$" (alt. "fourierserie-*utvecklingen* av $x(t)$")

$T_0 = 2\text{sek} \Rightarrow$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad/s

$\omega_0 = 2\pi f_0$: grundvinkelfrekvens

$f_0 = \frac{1}{T_0}$: grundfrekvens

a_0: medelvärdesnivå

$\cos/\sin(\omega_0 t)$: grundton(er)

$\cos/\sin(n\omega_0 t)$, $n = 2, 3, 4 \ldots$: övertoner

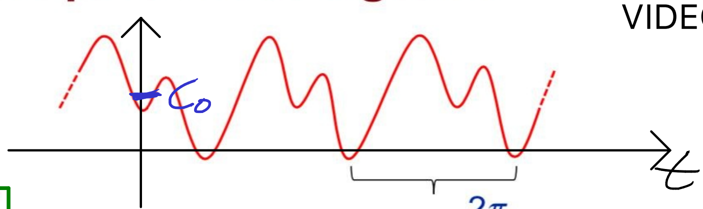
} deltoner

Fourierserieanalys av periodiska signaler

Fourierserieutveckling av periodiska signaler

VIDEO 2.2

Vi föredrar att uttrycka
fourierserien på **kompakt form**:



Periodtid $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$\boxed{x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)}$$

I kursen *föredrar* vi alltså denna
enklare trigonometriska fourierserie
i stället för den på föregående sida!
Övriga definitioner där gäller dock allmänt!

där
$$\begin{cases} C_0 = a_0 \\ C_{n>0} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_{n>0} = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \end{cases}$$

Dock:

Vi kommer att beräkna C_n och θ_n
på annat/enklare sätt, m.h.a.
komplexa fourierseriekoefficienter
(kommer längre fram)!

$$x(t) = C_0 + C_1 \cos(\omega_0 t + \theta_0) + C_2 \cos(2\omega_0 t + \theta_2) + \cdots + \underbrace{C_m \cdot \cos(m\omega_0 t + \theta_m)}_{\text{Delton } m} + \cdots$$

Fortsättning efter video 2:

C_0: medelvärdesnivå

$C_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1)$: grundton (dvs. för $n = 1$)

$C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$, $n = 2, 3, 4 \ldots$: övertoner

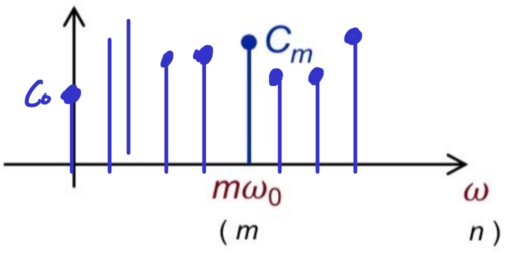
} deltoner

(För fullständig definition av en delton, så tar man även med dess amplitud och fas)

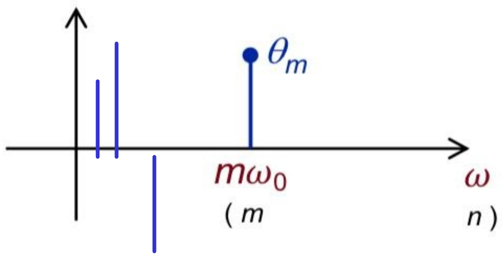
Frekvensspektrum – grafisk frekvensbeskrivning av signal

Delton *m*: $C_m \cos\left(m\omega_0 t + \theta_m\right)$

Enkelsidigt **amplitudspektrum**



Enkelsidigt **fasspektrum**



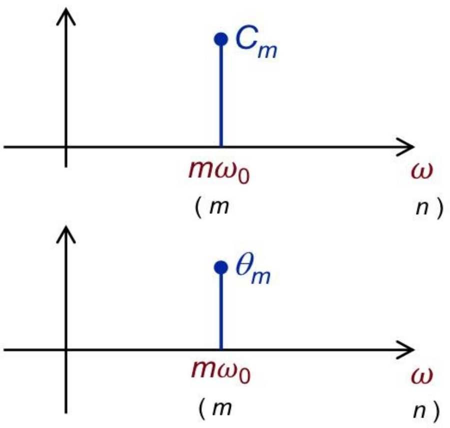
Demonstration av frekvensspektrum för generella signaler – testa även själv: **www.falstad.com/fourier** (*Java-demo*)

Dubbelsidigt frekvensspektrum – härledning i Video 3

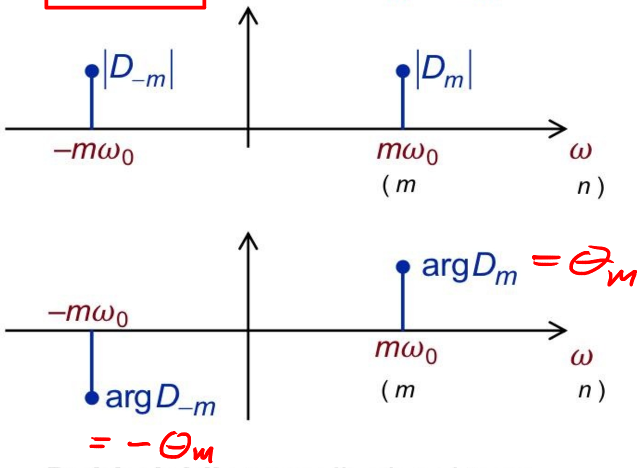
(Se den efter Fö 10, innan Fö 11)

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

Delton *m*: $$C_m \cos\left(m\omega_0 t + \theta_m\right) = \boxed{\underbrace{\frac{C_m}{2} e^{j\theta_m}}_{:=D_m}} \cdot e^{jm\omega_0 t} + \underbrace{\frac{C_m}{2} e^{-j\theta_m}}_{=D_m^* = D_{-m}} \cdot e^{-jm\omega_0 t}$$



Enkelsidigt *amplitudspektrum*
resp. *fasspektrum*



Dubbelsidigt *amplitudspektrum*
resp. *fasspektrum*

Fourierserieutveckling, sammanfattning:

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)}$$

Grundvinkel-
frekvens $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

Samband:

$$\boxed{D_{n>0} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_0 = D_0 = \dfrac{1}{T_0} \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)\,dt \\ C_{n>0} = 2|D_n| \\ \theta_{n>0} = \arg D_n \end{array} \right.$$

C_0, $C_{n>0}$: Enkelsidigt amplitudspektrum

$\theta_{n>0}$: Enkelsidigt fasspektrum

där $$\boxed{D_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt}$$ Komplexa fourierserie-koefficienter

$$\boxed{x(t) \text{ reellvärd} \Leftrightarrow D_{-n} = D_n^*}$$

T.ex $D_{-5} = D_5^*$

Sambandet härleds i Video 4, "Härledning av Dn-integralen":
Se den efter föreläsningen – innan nästa föreläsning!

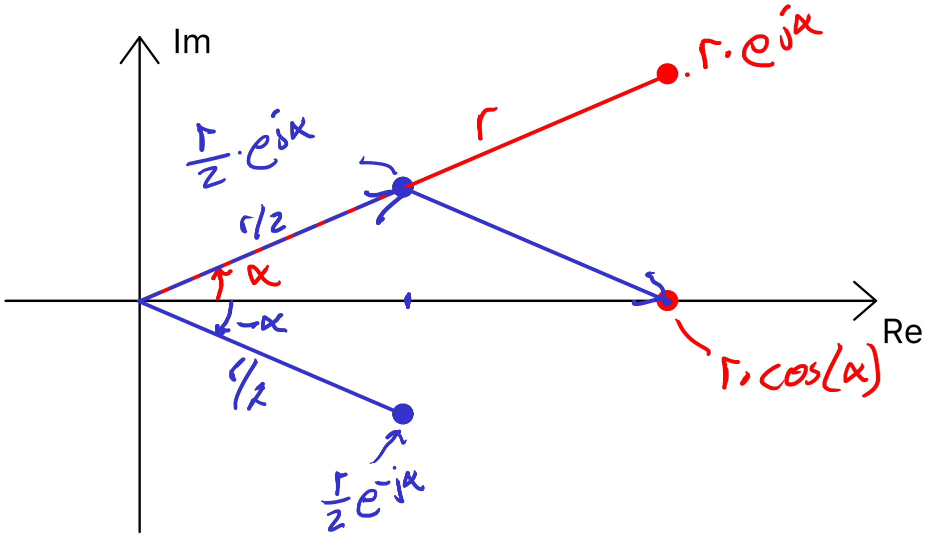
$$\boxed{x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = C_0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)}$$

$$x(t) = \ldots + \underbrace{D_{-2}e^{-j2\omega_0 t}}_{n=-2} + \underbrace{D_{-1}e^{-j1\cdot\omega_0 t}}_{n=-1} + \underbrace{D_0 e^{j0}}_{n=0} + \underbrace{D_1 e^{j\omega_0 t}}_{n=1} + \underbrace{D_2 e^{j2\omega_0 t}}_{n=2} + \ldots$$

$$= \underbrace{C_0}_{(=D_0)} + C_1\cdot\cos(\omega_0 t+\theta_1) + C_2\cdot\cos(2\omega_0 t+\theta_2) + \ldots$$

där $\underbrace{D_n = \frac{C_n}{2}e^{j\theta_n}}_{n>0} \Rightarrow \begin{cases} C_n = 2|D_n| \\ \theta_n = \arg D_n \end{cases}$

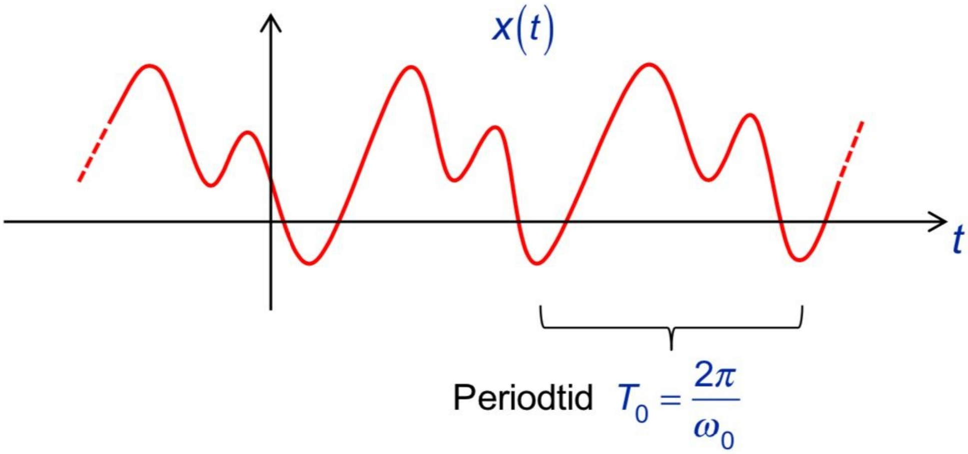
$$\mathrm{Re}\{r\cdot e^{j\alpha}\} = r\cos(\alpha) = \frac{r}{2}e^{j\alpha}+\frac{r}{2}e^{-j\alpha}$$



Beteckningsskillnad, fourierserier

Föreläsningar, videor & formelsamling	Kursboken (*Sune Söderkvist*)
Periodtid T_0	T
Grundfrekvens $f_0=\frac{1}{T_0}$	$f_1=\frac{1}{T}$
Grundvinkelfrekvens $\omega_0=2\pi f_0=\frac{2\pi}{T_0}$	$\omega_1=2\pi f_1=\frac{2\pi}{T}$
Indexvariabel n	k
$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = C_0+\sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos(n\omega_0 t+\theta_n)$	$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} = X_0+\sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k\sin(k\omega_1 t+\varphi_k)$
$D_{n>0}=\frac{C_n}{2}e^{j\theta_n}$	$C_{k>0}=\frac{\hat{X}_k}{2}e^{j\left(\varphi_k-\frac{\pi}{2}\right)}$

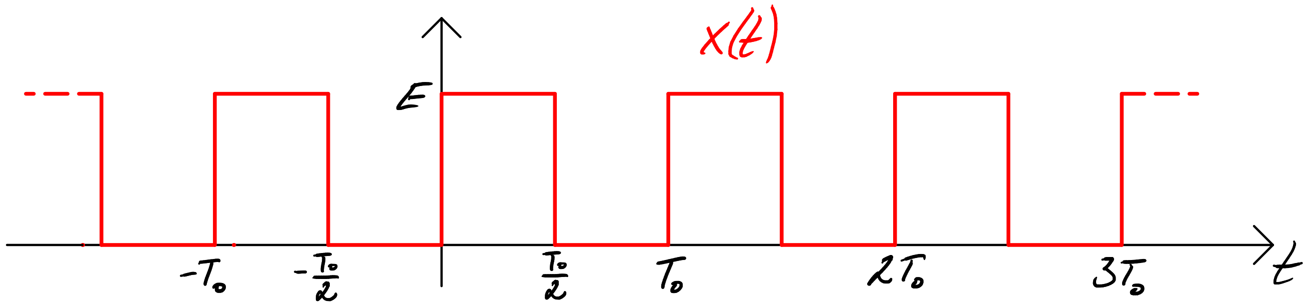
Typisk beräkningsgång vid fourierserieanalys av periodisk signal:



$x(t)$ given $\longrightarrow$ $D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \ldots = |D_n| \cdot e^{j\underbrace{\arg D_n}_{(\theta_n)}}$

$\longrightarrow \begin{cases} C_n = 2|D_n| \\ \theta_n = \arg D_n \end{cases}$

Exempel – beräkna fyrkantvågens dubbelsidiga spektrum och enkelsidiga spektrum



Beräkning på föreläsningen $\Longrightarrow$

$$D_n = \begin{cases} \frac{E}{2} \; ; & n=0 \\ 0 \; ; & \text{jämna } n \neq 0 \\ \frac{E}{jn\pi} \; ; & \text{udda } n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = \frac{E}{2} \\ C_n = \begin{cases} 0 \; ; & \text{jämna } n>0 \\ \frac{2E}{n\pi} \; ; & \text{udda } n \end{cases} \\ \theta_n = \begin{cases} 0 \; ; & \text{jämna } n \\ -\frac{\pi}{2} \; ; & \text{udda } n \end{cases} \end{cases}$$