

Linjära System – Föreläsning 11:

- * Räkneexempel, fourieranalys av fyrkantvåg
- * LTI-system med periodisk insignal

Från föreläsning 10 – Fourierserieutveckling av periodiska signaler:

Fourierserieutveckling, sammanfattning:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

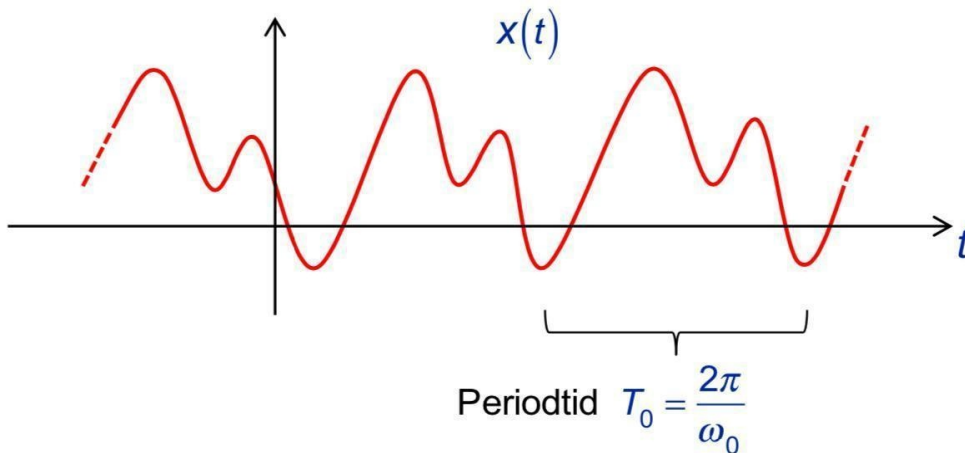
Samband:

$$D_{n>0} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_0 = D_0 = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) dt \\ C_{n>0} = 2|D_n| \\ \theta_{n>0} = \arg D_n \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Grundvinkel-} \\ \text{frekvens } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \\ \text{Enkelsidigt} \\ \text{amplitudspektrum} \\ \text{Enkelsidigt fasspektrum} \end{array}$$

där $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ Komplexa fourierseriekoefficienter $x(t)$ reellvärd $\Leftrightarrow D_{-n} = D_n^*$

Se formelsamlingen, sid. 4!

Typisk beräkningsgång vid fourierserieanalys av periodisk signal:



$x(t)$ given $\rightarrow D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \dots = |D_n| e^{j\arg D_n}$ Dubbelsidigt spektrum

$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_0 = D_0 \\ C_n = 2|D_n| \\ \theta_n = \arg D_n \end{array} \right\}$ Enkelsidigt spektrum

(Rätt = tillägg efter Fö10)

Relaterade fourierserievideor att se direkt efter föreläsningen

VIDEO 3

HÄRLEDNING AV DEN KOMPLEXA FOURIERSERIEN

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}}_{:= D_n, n > 0} \cdot e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}}_{:= D_n^*} \cdot e^{-jn\omega_0 t}$$

$$\cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \frac{e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}}{2} = \frac{1}{2} e^{j\theta_n} e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\theta_n} e^{-jn\omega_0 t}$$

$$\text{Låt } k = -n \Rightarrow \sum_{k=-1}^{\infty} D_k^* e^{j(-k)\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{-1} D_n^* e^{jn\omega_0 t}$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} D_n^* e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Låt $D_n := D_n^*$ för $n < 0$
Ex: $D_{-3} = D_3^*$

$$D_0 = C_0$$

$$D_n = \begin{cases} \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n} & ; n > 0 \\ D_n^* & ; n < 0 \end{cases}$$

dar $(x(t) \in \mathbb{R} \forall t) \Leftrightarrow D_{-n} = D_n^*$

$$C_n = 2|D_n| \quad n \neq 0$$

$$\theta_n = \arg D_n = \angle D_n$$

VIDEO 4

HÄRLEDNING AV $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

Om $x(t)$ är T_0 -periodisk $\Rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\Rightarrow \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m \cdot e^{jm\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

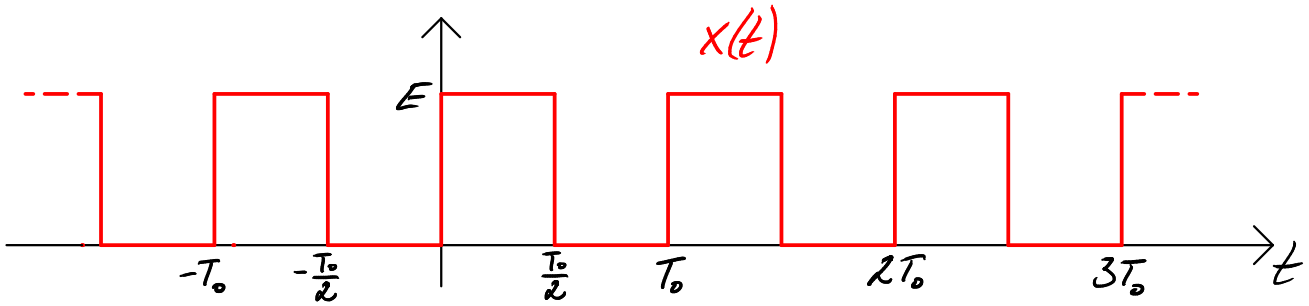
$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m \int_{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \star$$

$m=n$ $\Rightarrow \star = \int_{T_0} e^{j(n-n)\omega_0 t} dt = \int_{T_0} 1 dt = T_0$

$m \neq n$ $\Rightarrow \star = \int_0^{T_0} \frac{e^{j(m-n)\omega_0 t}}{j(m-n)\omega_0} dt = \frac{e^{j(m-n)\frac{2\pi}{T_0} \cdot T_0} - e^{j(m-n)\omega_0 \cdot 0}}{j(m-n)\omega_0} = \frac{e^{j2\pi(m-n)} - e^0}{j(m-n)\omega_0} = \frac{1^{m-n} - 1}{j(m-n)\omega_0} = 0$

$$\therefore \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = D_n \cdot T_0 \quad (m=n) \quad \left(+ \sum_{m \neq n} D_m \cdot 0 \right)$$

Exempel – beräkna fyrkantvågens dubbelsidiga spektrum och enkelsidiga spektrum



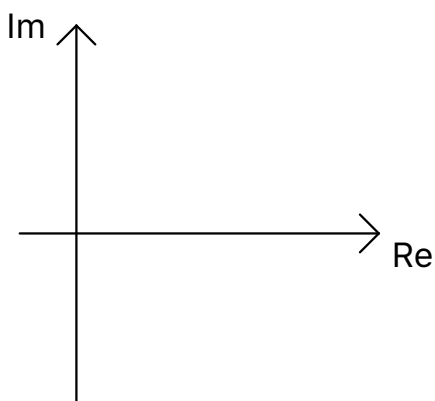
Beräkning på föreläsningen \Rightarrow

$$D_n = \begin{cases} \frac{E}{2} & ; n=0 \\ 0 & ; \text{jämna } n \neq 0 \\ \frac{E}{jn\pi} & ; \text{udda } n \end{cases}$$

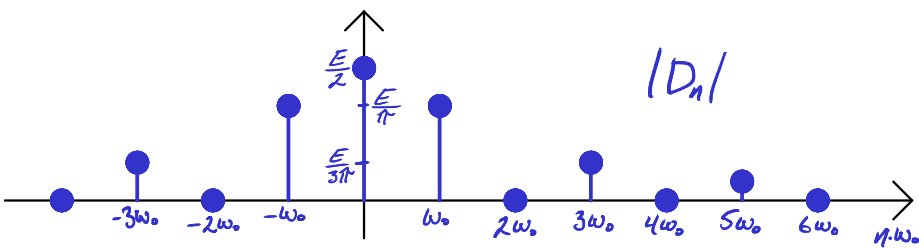
\Rightarrow

$$\begin{cases} C_0 = \frac{E}{2} \\ C_n = \begin{cases} 0 & ; \text{jämna } n > 0 \\ \frac{2E}{n\pi} & ; \text{udda } n \end{cases} \\ \theta_n = \begin{cases} 0 & ; \text{jämna } n \\ -\frac{\pi}{2} & ; \text{udda } n \end{cases} \end{cases}$$

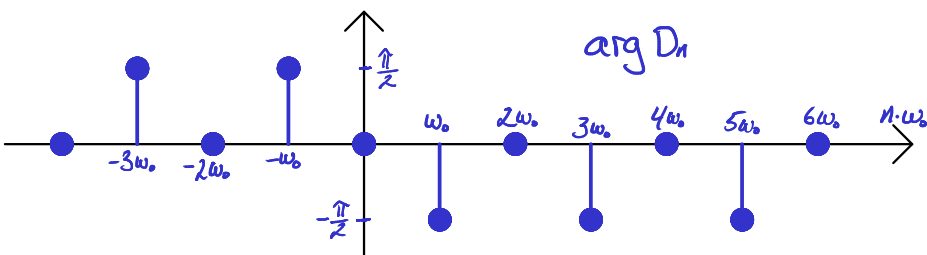
Se även detta enkelsidiga spektrum i Falstads Java-applet: falstad.com/fourier



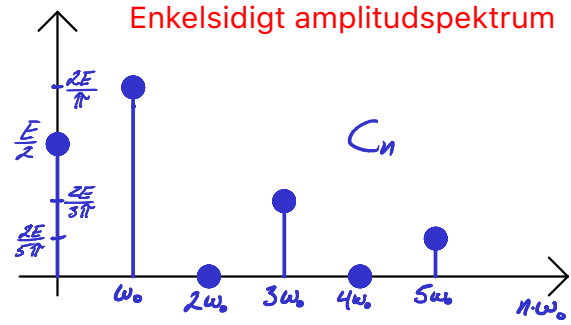
Dubbelsidigt amplitudspektrum



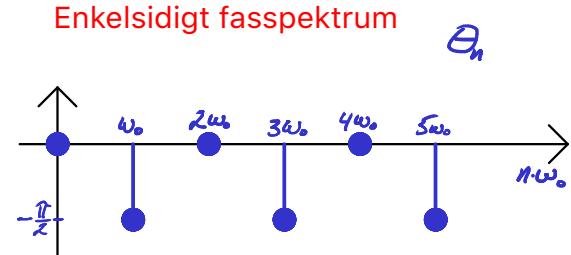
Dubbelsidigt fasspektrum



Enkelsidigt amplitudspektrum



Enkelsidigt fasspektrum



LTI-system med periodisk insignal

VIDEO 1

(Video 5 på webbsidan med videor om fourierserieanalys)

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INSNALER

Stabilt energifritt LTI-system

$X(t)$
 $X_n(t)$

$h(t)$

$Y(t) = Y_{zs}(t)$
 $y_n(t)$

$$X(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t) \xrightarrow{\text{LINJÄRT}} Y_{zs}(t) = \sum_n a_n \cdot y_n(t)$$

$a_n \in \mathbb{C}$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\text{LTI}} Y_{zs}(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$X(t) = \cos(\sin(\omega_0 t)) \rightarrow Y_{zs}(t) = ?$

Allmän T_0 -periodisk $X(t) \rightarrow Y_{zs}(t) = ?$

Med fourierseriebeskrivning: $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \xrightarrow{X_{eff}(t)} Y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \mathcal{H}\{e^{jn\omega_0 t}\}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ $a_n = Y_n(t) = ?$

T_0 -periodisk insignal $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow Y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \mathcal{H}\{e^{jn\omega_0 t}\}$

$= \sum_n a_n \cdot x_n(t)$ $= \sum_n a_n \cdot y_n(t)$

VIDEO 2.1

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INSNALER

Stabilt energifritt LTI-system

$X(t)$

$h(t)$

$Y(t) = Y_{zs}(t)$

$X(t)$ är en fysikalisk T_0 -periodisk signal $\Rightarrow X(t) = X(t+T_0)$

\Rightarrow Fourierserieutveckling av $X(t)$

$X(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$
 kompakt form

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$
 Exponentialform

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$; grundvinkelfrekvens
 $= 2\pi f_0$; f_0 = grundfrekvens

Delton n : $X_n(t) = C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$
 $X_1(t) = C_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1)$; grundton
 $n > 1$ $X_n(t)$; övertoner

Komplexa fourierseriekoefficienter

 $C_0 = D_0$: medelvärde
 $D_{n>1} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}$

$D_{n<-1} = D_n^*$ om $X(t) \in \mathbb{R} \forall t$

$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} X(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

Video 2 är till största delen en repetition på det vi redan vet:

Första delen ovan går igenom de grundläggande definitionerna och terminologin

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INSGNALER

Stabilit energifritt LTI-system

$X(t) \rightarrow h(t) \rightarrow Y(t) = Y_{ps}(t)$

$x(t) = x(t+T_0)$

$x(t)$ är en fysikalisk T_0 -periodisk signal $\Rightarrow x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$

Enkelsidigt amplitud- & fasspektrum

$C_n = 2|D_n|$

$\theta_n = \arg D_n$

Dubbelsidigt amplitud- & fasspektrum

$D_{-n} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}$

$x(t) \in \mathbb{R} \forall t: D_{-n} = D_n^* \Rightarrow |D_{-n}| = |D_n|$

$\arg D_{-n} = -\arg D_n$

Den andra delen av Video 2 ovan är också en repetition:
Enkelsidigt spektrum och dubbelsidigt spektrum

Den tredje delen av Video 2 är dock ny – Signal(medel)effekten för en periodisk signal:

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INSGNALER

Stabilit energifritt LTI-system

$X(t) \rightarrow h(t) \rightarrow Y(t) = Y_{ps}(t)$

Signal(medel)effekten för en T_0 -periodisk signal

$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$

$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k \cdot T_0} \int_{-kT_0/2}^{kT_0/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$

$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \right|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m^* e^{-jm\omega_0 t} \right) dt = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_n D_m^* \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt$

$= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n D_n^* = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$

Parsevals formel: $\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$

$\begin{cases} T_0; m=n \\ 0; m \neq n \end{cases}$

Som jag skriver i videobeskrivningen, så ska $1/T_0$ bort!

Parsevals formel/teorem:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$

Signaleffekten till och med delton M, dvs. för fysikaliska vinkelfrekvenser $0 \leq \omega \leq M\omega_0$:

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INIGNALER

T_0 -periodisk: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$ (Stabilit energifritt LTI)

System: $h(t)$

Output: $y_{zs}(t) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$

Fourier transform of input: $\mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\} = \delta(\omega - n\omega_0)$

Fourier transform of output: $\mathcal{F}\{y_{zs}(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n \delta(\omega - n\omega_0)$

Frequency response: $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$

Output coefficients: $\hat{D}_n = D_n H(n\omega_0)$

Final result: $y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n e^{jn\omega_0 t}$ där $\hat{D}_n = D_n H(n\omega_0)$

$H(\omega)$ är också T_0 -periodisk med komplexa fourierseriekoefficienter \hat{D}_n

$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega)|_{\omega=n\omega_0}$

$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} =$ LTI-systemets frekvensfunktion

Från videon ovan:

Stabilit energifritt LTI-system

Input: $x(t)$ → System: $\mathcal{F}: h(t)$ → Output: $y_{zs}(t) = \mathcal{F}\{x(t)\} = (x * h)(t)$

Input: $x(t) = e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow y_{zs}(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 n \tau} d\tau \right) \cdot e^{jn\omega_0 t}$

$= H_{n,\omega_0} \cdot e^{jn\omega_0 t}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{H(n\omega_0) \text{ i videon}}$

$H_{n,\omega_0} \in \mathbb{C}$, beror på $h(t)$, n & ω_0
och ger information om hur systemet påverkar
frekvenssignaler med vinkelfrekvens $\omega = n\omega_0$.
Mer om detta i början av VT2!

Slutsats:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n e^{jn\omega_0 t}$$

Utsignalens komplexa fourierseriekoefficienter:

$$\hat{D}_n = D_n \cdot H_{n,\omega_0}$$

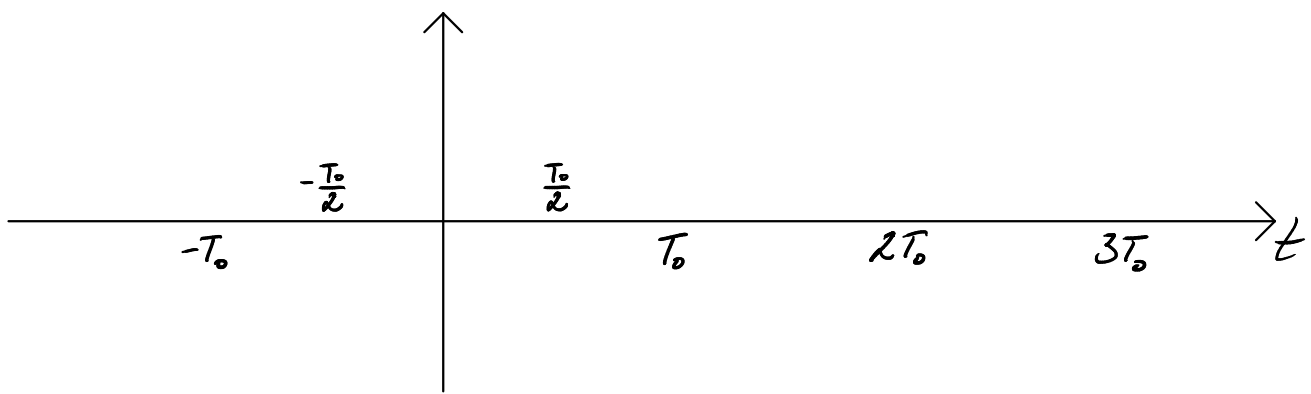
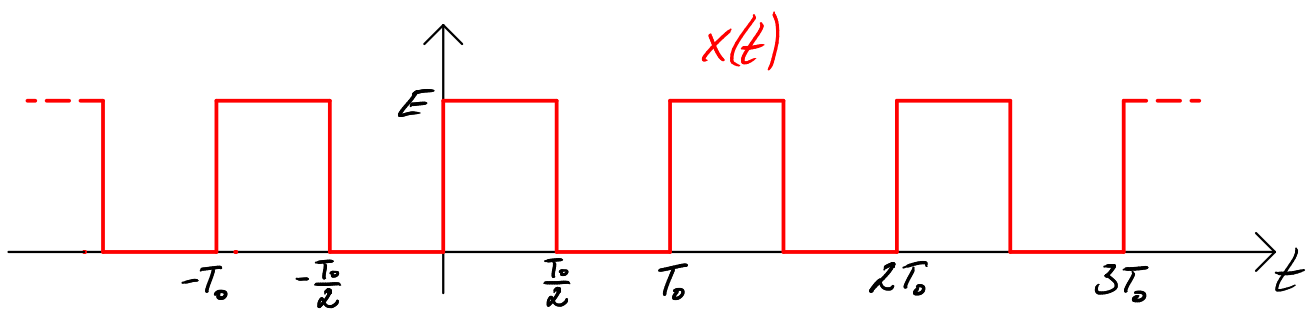
	Insignalen	Systemet	Utsignalen
Tidsdomän-beskrivning:			
Frekvensdomän-beskrivning:			

Några EXEMPEL på energifria LTI-system med periodisk insignal:

- $y(t) = x(t - t_0) =$

- $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} =$

Exempel – alternativ metod för beräkning av fyrkantvågens komplexa fouriersseriekoefficienter:



Kretsberäkningar med allmän periodiska ström- eller spänningskälla.

Bestäm en ström/spänning $y(t)$ i kretsen (=LTI-systemet):

1. Fourierserieutveckla källsignalen (t.ex. en källa $x(t)$) $\Rightarrow C_n$ & θ_n
2. Likströmsteori för källans medelvärde C_0 ger medelvärdet \tilde{C}_0 för $y(t)$
3. Använd **$j\omega$ -metoden** för källans deltoner:

$$x_n(t) = C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \rightarrow X_n = C_n e^{j\theta_n} \quad R, jn\omega_0 L, \frac{1}{jn\omega_0 C}$$

Beräkna sökt storhet på komplex form:

$$Y_n = \tilde{C}_n e^{j\tilde{\theta}_n} \Rightarrow \text{Delton } n: y_n(t) = \tilde{C}_n \cos(n\omega_0 t + \tilde{\theta}_n)$$

4. Linjärt system \Rightarrow Superposition ger tidsuttrycket för sökt storhet:

$$y(t) = \tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) = \tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \cos(n\omega_0 t + \tilde{\theta}_n)$$

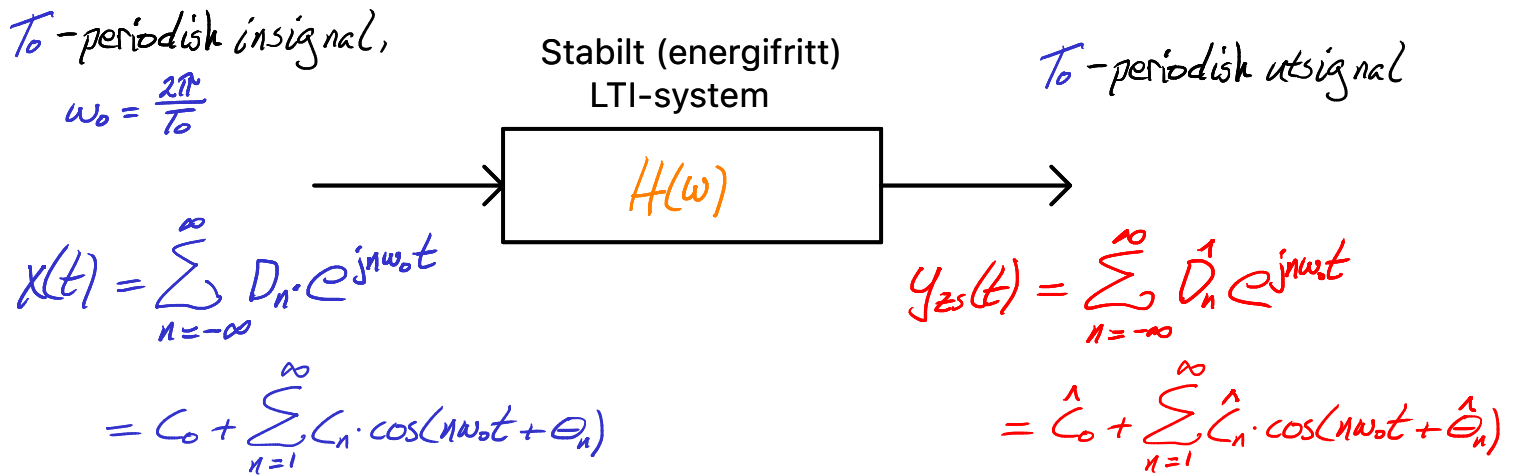
Gå igenom denna sida själv!

Här ges en sammanfattning över de alternativa beräkningsvägar som finns då man önskar beräkna dubbelsidigt och/eller enkelsidigt spektrum för utsignalen från ett stabilt LTI-system med periodisk insignal.

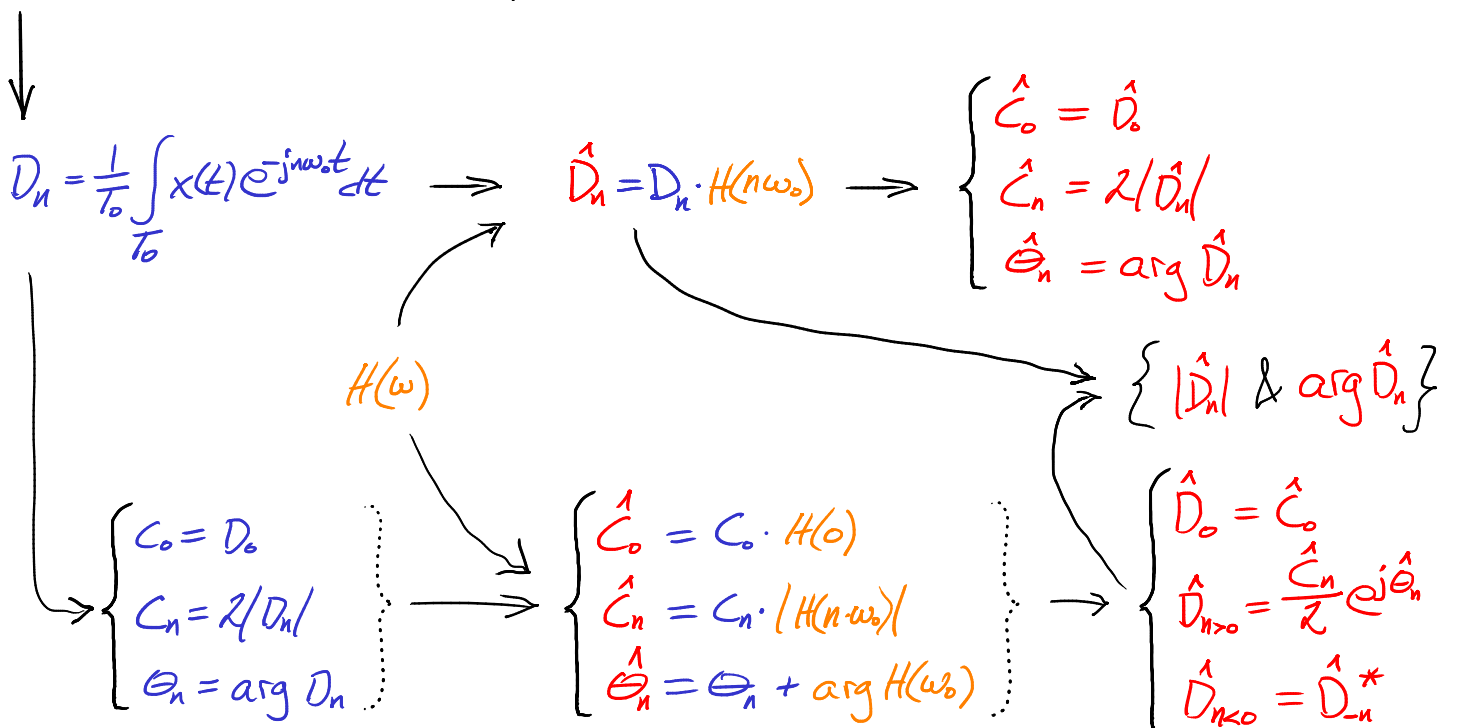
Återkom speciellt hit efter att vi gått igenom analys med fouriertransformen i VT1: $H(\omega)$ nedan är fouriertransformen till systemets impulssvar $h(t)$.

Du bör dock redan nu förstå de allmänna sambanden nedan, även om vi ännu inte beräknat $H_{n,\omega_0} = H(n\omega_0)$. Det gör vi i VT2!

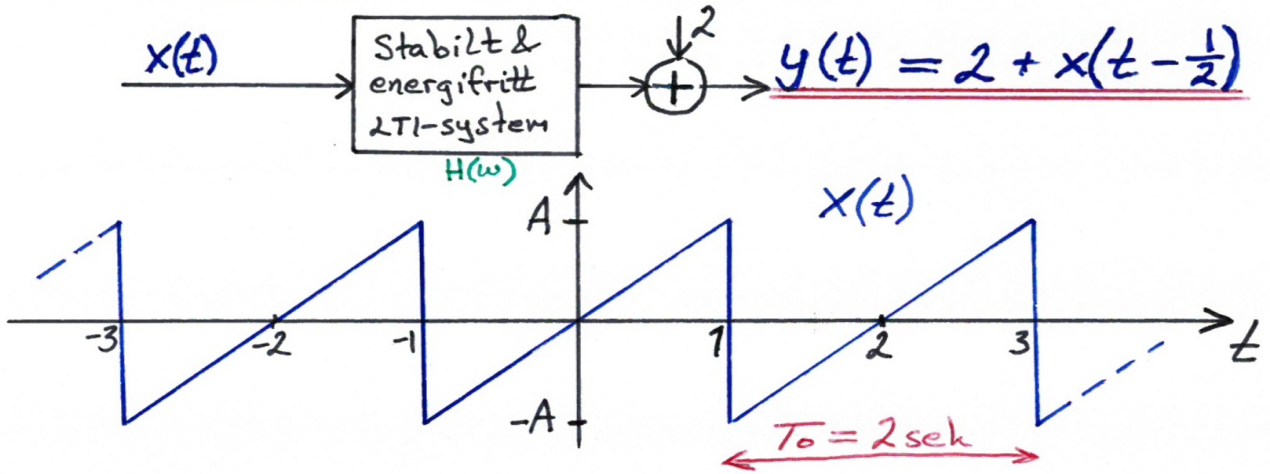
Beräkningsvägar vid beräkning av utsignalen och dess spektrum för LTI-system med periodisk insignal



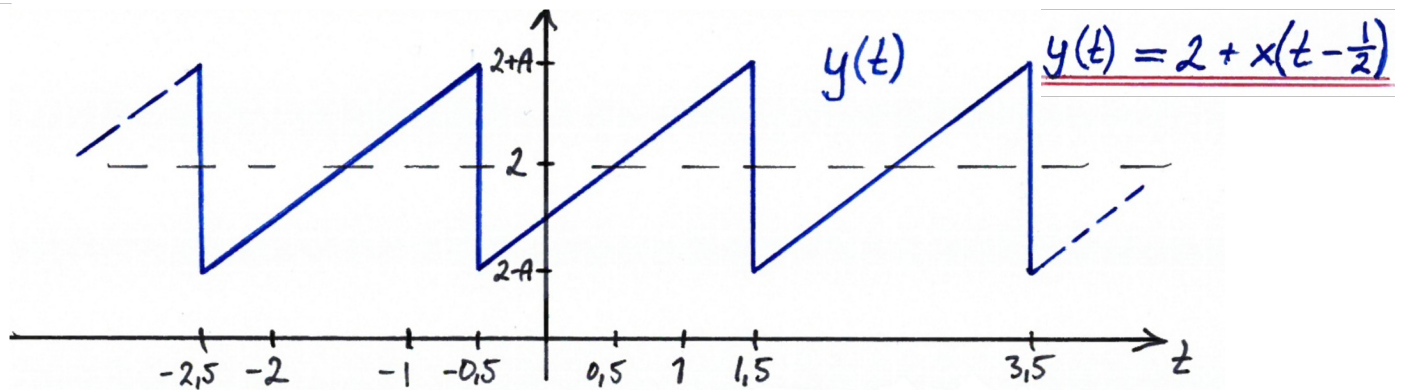
$x(t)$ (given grafiskt eller analytiskt under en period)

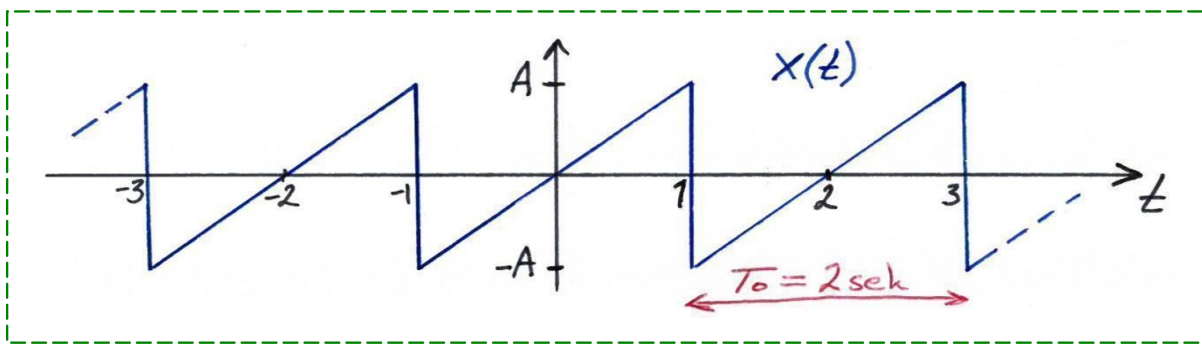


EXEMPEL, LTI-SYSTEM & PERIODISK INSIGNAL



Beräkna och rita både enkelsidigt och dubbelsidigt amplitudspektrum och fasspektrum för $y(t)$.





dvs. $\underline{D_n} = \begin{cases} \frac{jA(-1)^n}{\pi n} ; n \neq 0 \\ 0 ; n = 0 \end{cases} = \begin{cases} j \cdot \frac{A}{\pi n} = \frac{A}{\pi n} e^{j\frac{\pi}{2}} ; \text{j\u00e4mna } n > 0 \\ -j \cdot \frac{A}{\pi n} = \frac{A}{\pi n} e^{-j\frac{\pi}{2}} ; \text{udda } n > 0 \\ D_{-n}^* = |D_n| e^{j \arg D_n} ; \text{alla } n < 0 \\ 0 ; n = 0 \end{cases}$

T.ex. $D_{-7} = D_7^* = |D_7| \cdot e^{j \arg D_7}$

\hat{D}_0 & \hat{D}_n från (*) ovan \Rightarrow

$$\hat{D}_0 = 2 + D_0 = 2 + 0 = 2 = 2 \cdot e^{j0} \Rightarrow \begin{cases} |\hat{D}_0| = 2 \\ \arg \hat{D}_0 = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

$$n \neq 0 \Rightarrow \hat{D}_n = D_n \cdot e^{jn\frac{\pi}{2}} = \frac{jA(-1)^n}{\pi n} \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}}$$

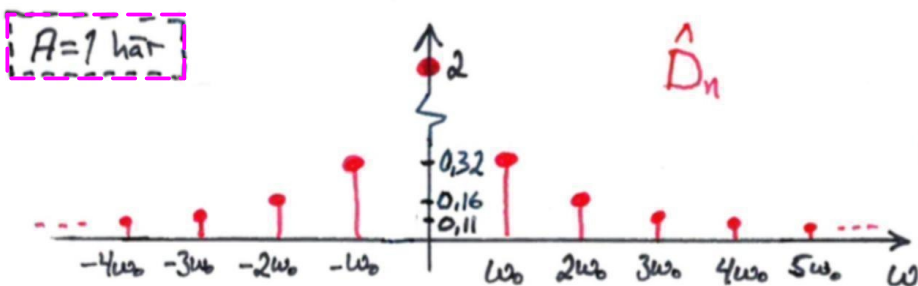
$$= \frac{j = e^{j\frac{\pi}{2}}}{(-1)^n = e^{jn\pi}} = \frac{A}{\pi n} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}(n+1)}$$

$$\Rightarrow |\hat{D}_n| = |D_n| = \frac{A}{\pi \cdot |n|} \quad ; \quad n \neq 0$$

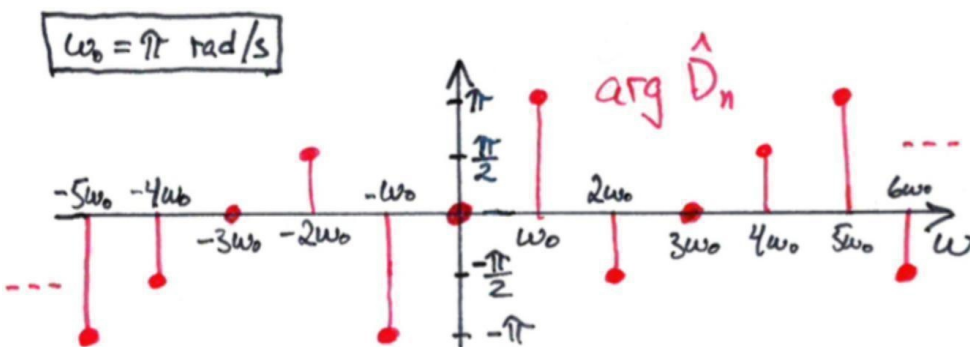
och $\begin{cases} \arg \hat{D}_n = \frac{\pi}{2}(n+1) & \text{d\u00e5 } n > 0 \\ \arg \hat{D}_n = -\arg \hat{D}_n & \text{d\u00e5 } n < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; n = 1, 5, 9, \dots \\ \frac{3\pi}{2}, \text{ dvs. } \frac{-\pi}{2} & ; n = 2, 6, 10, \dots \\ 2\pi, \text{ dvs. } 0 & ; n = 3, 7, 11, \dots \\ \frac{5\pi}{2}, \text{ dvs. } \frac{\pi}{2} & ; n = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$

Dvs. $|\hat{D}_n|$ och $\arg \hat{D}_n$ ovan \u00e4r de dubbelsidiga amplitud- och fasspektrumen som efterfr\u00e4ges i uppgiften.

FREKVENSSPEKTRUM F\u00d6R S\u00c4GTANDSV\u00c4GEN/-FUNKTIONEN



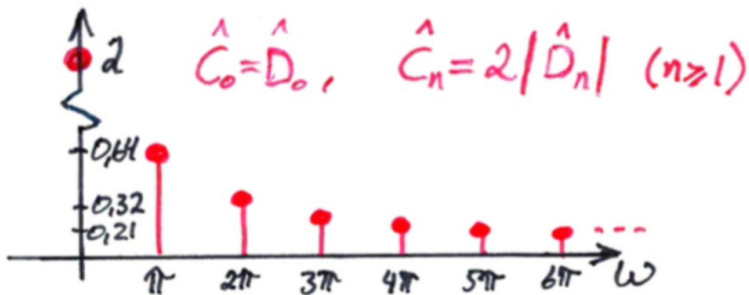
Dubbelsidigt amplitudspektrum



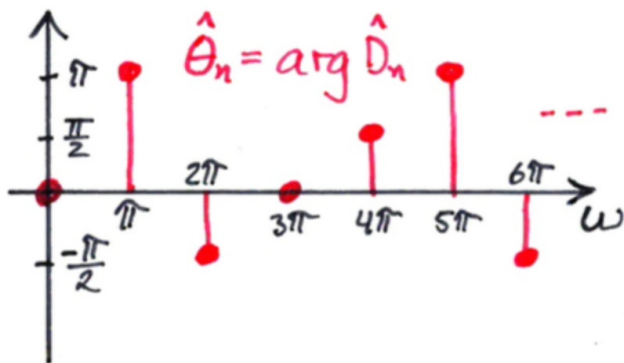
Dubbelsidigt fasspektrum

Enkelsidigt amplitudspektrum & fasspektrum:

$$\begin{cases} \hat{C}_0 = \hat{D}_0 = 2 \\ \hat{C}_n = 2|\hat{D}_n| = \frac{2A}{\pi n} ; n \geq 1 \\ \hat{\Theta}_n = \arg \hat{D}_n ; n \geq 1, \text{ enligt ovan} \end{cases}$$



Enkelsidigt
amplitudspektrum



Enkelsidigt
fasspektrum

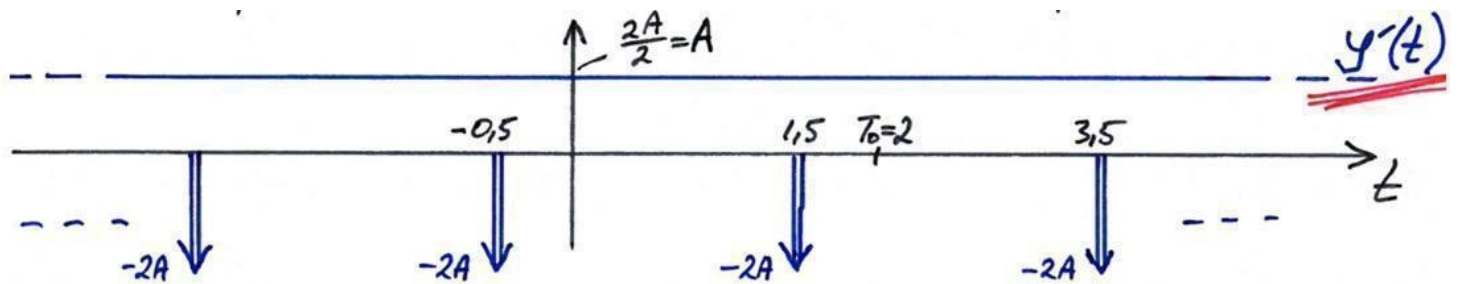
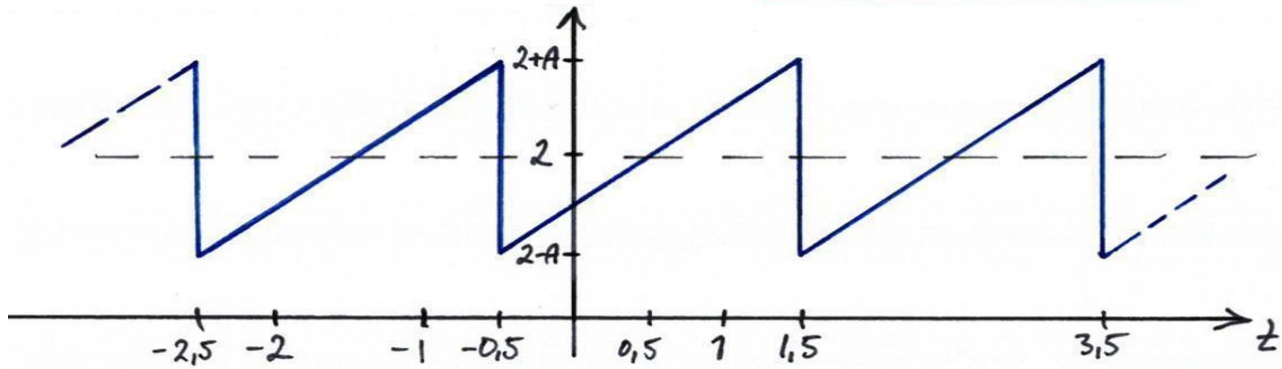
"Läxa": Beräkna själv de komplexa fourierseriekoefficienterna nedan, enligt den alternativa metoden!

Alternativ lösning för beräkning av \hat{D}_n baserat på sambandet

$D_n = \frac{D_{nx'}}{jn\omega_0}$, där D_n & $D_{nx'}$ är de komplexa fourierseriekoefficienterna

för $x(t)$ resp. $x'(t)$:

$$\underline{y(t) = 2 + x(t - \frac{1}{2})}$$



Ovanstående metod är lämplig att använda då signalen, för vilken man vill beräkna de komplexa fourierseriekoefficienterna för, innehåller diskontinuiteter eller ramper.