Linjära System – Föreläsning 11:
* Räkneexempel, fourieranalys av fyrkantvåg
* LTI-system med periodisk insignal

Från föreläsning 10 – Fourierserieutveckling av periodiska signaler:

Fourierserieutveckling, sammanfattning:

$$\boxed{x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t+\theta_n)}$$

Grundvinkel-frekvens $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

Samband:

$$\boxed{D_{n>0} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}} \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} C_0 = D_0 = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t)\,dt \\ C_{n>0} = 2|D_n| \\ \theta_{n>0} = \arg D_n \end{array}} \right.$$

C_0, $C_{n>0}$: Enkelsidigt amplitudspektrum

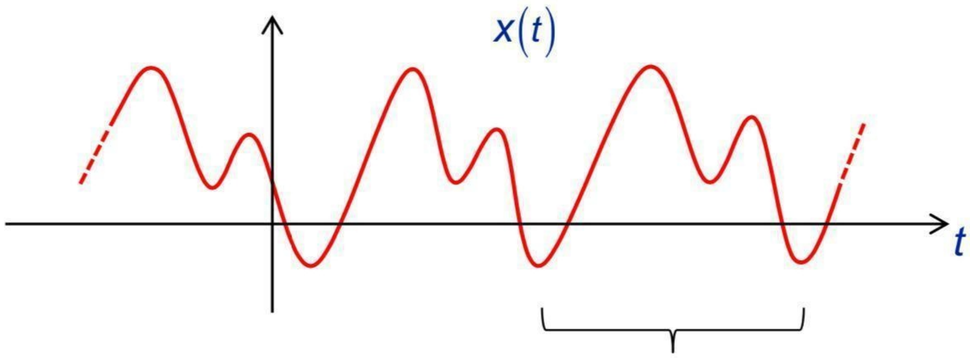
$\theta_{n>0}$: Enkelsidigt fasspektrum

där $\boxed{D_n = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt}$ Komplexa fourierserie-koefficienter

$\boxed{x(t) \text{ reellvärd} \Leftrightarrow D_{-n} = D_n^*}$

Se formelsamlingen, sid. 4!

Typisk beräkningsgång vid fourierserieanalys av periodisk signal:



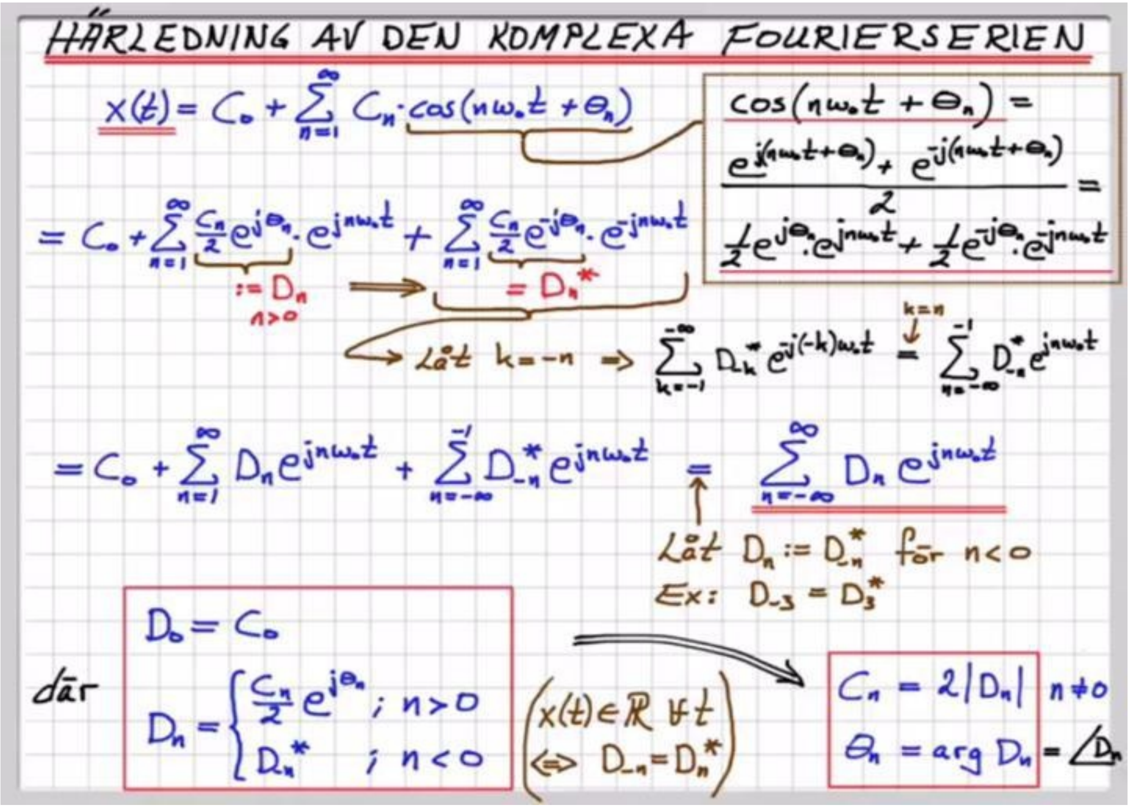
Periodtid $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

$x(t)$ given $\longrightarrow D_n = \dfrac{1}{T_0}\displaystyle\int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \ldots = |D_n| \cdot e^{j\arg D_n}$ Dubbelsidigt spektrum

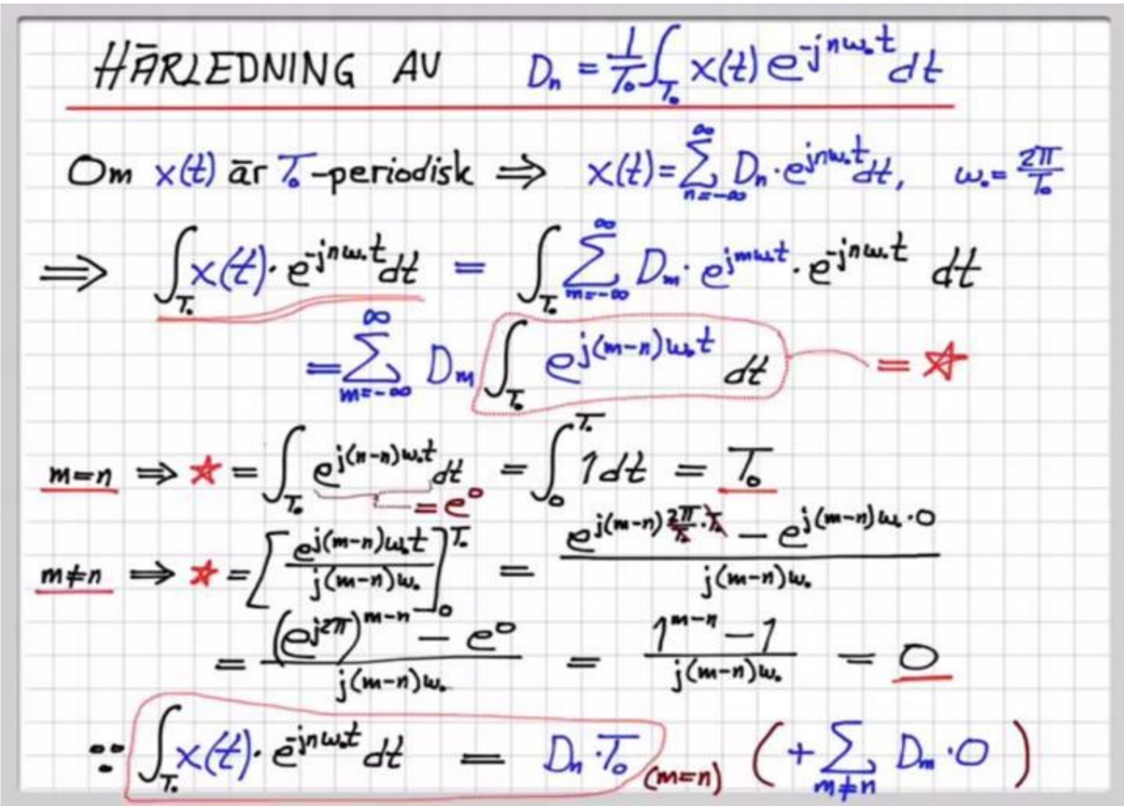
$\longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_0 = D_0 \\ C_n = 2|D_n| \\ \theta_n = \arg D_n \end{array} \right\}$ Enkelsidigt spektrum

(Rött = tillägg efter F10)

Relaterade fourierserievideor att se direkt efter föreläsningen

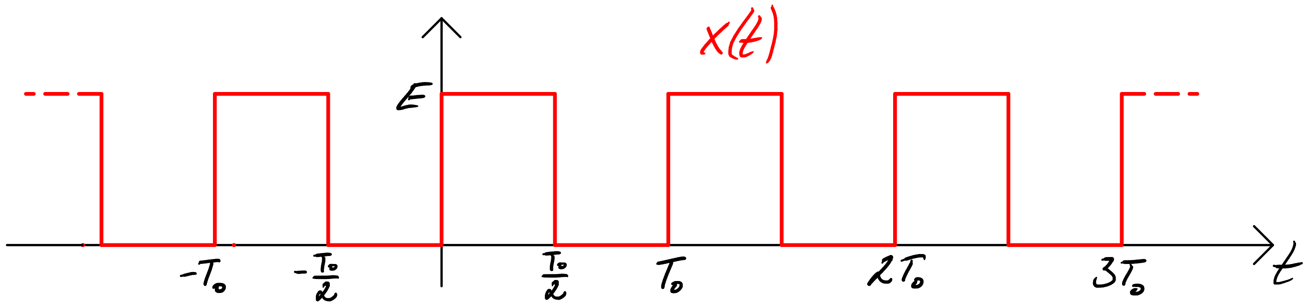


VIDEO 3



VIDEO 4

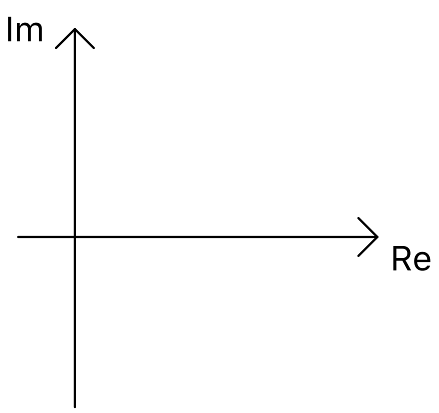
Exempel – beräkna fyrkantvågens dubbelsidiga spektrum och enkelsidiga spektrum



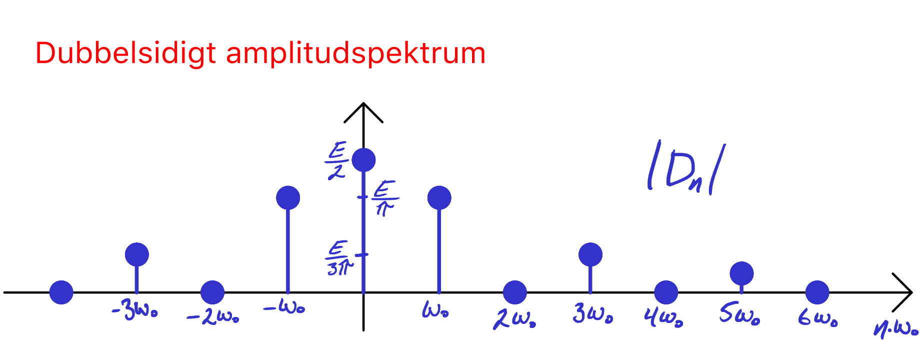
Beräkning på föreläsningen $\Longrightarrow$

$$D_n = \begin{cases} \frac{E}{2} \; ; & n=0 \\ 0 \; ; & \text{jämna } n \neq 0 \\ \frac{E}{jn\pi} \; ; & \text{udda } n \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_0 = \frac{E}{2} \\ C_n = \begin{cases} 0 \; ; & \text{jämna } n>0 \\ \frac{2E}{n\pi} \; ; & \text{udda } n \end{cases} \\ \theta_n = \begin{cases} 0 \; ; & \text{jämna } n \\ -\frac{\pi}{2} \; ; & \text{udda } n \end{cases} \end{cases}$$

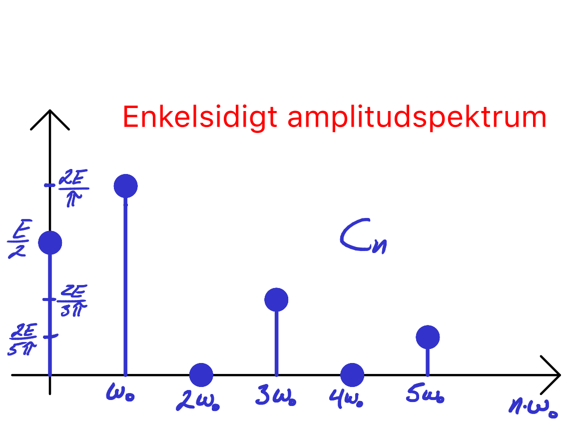
Se även detta enkelsidiga spektrum i Falstads Java-applet: falstad.com/fourier



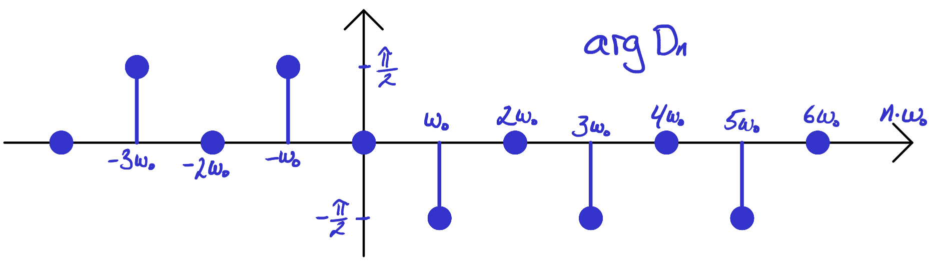
Dubbelsidigt amplitudspektrum



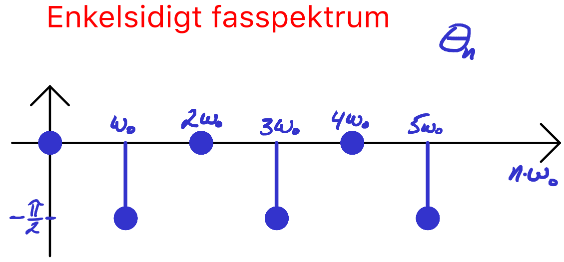
Enkelsidigt amplitudspektrum



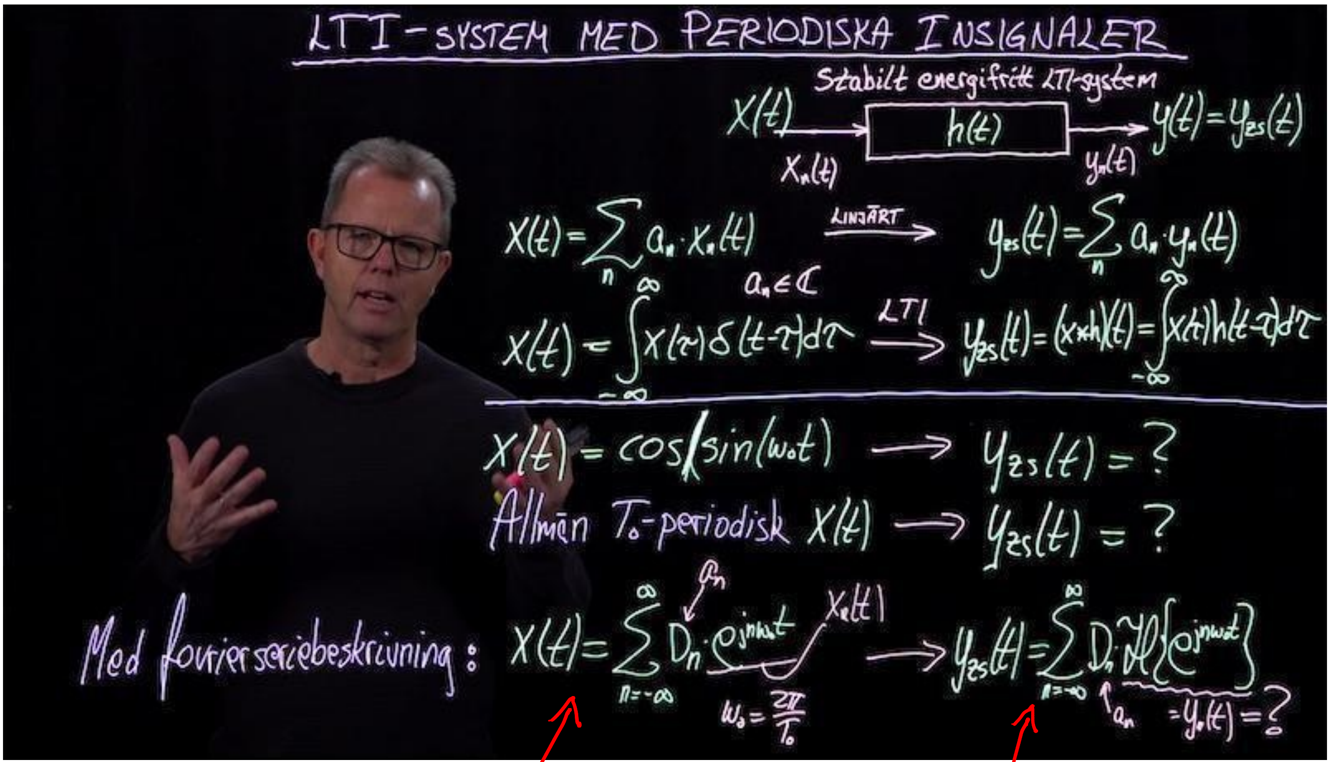
Dubbelsidigt fasspektrum



Enkelsidigt fasspektrum



LTI-system med periodisk insignal

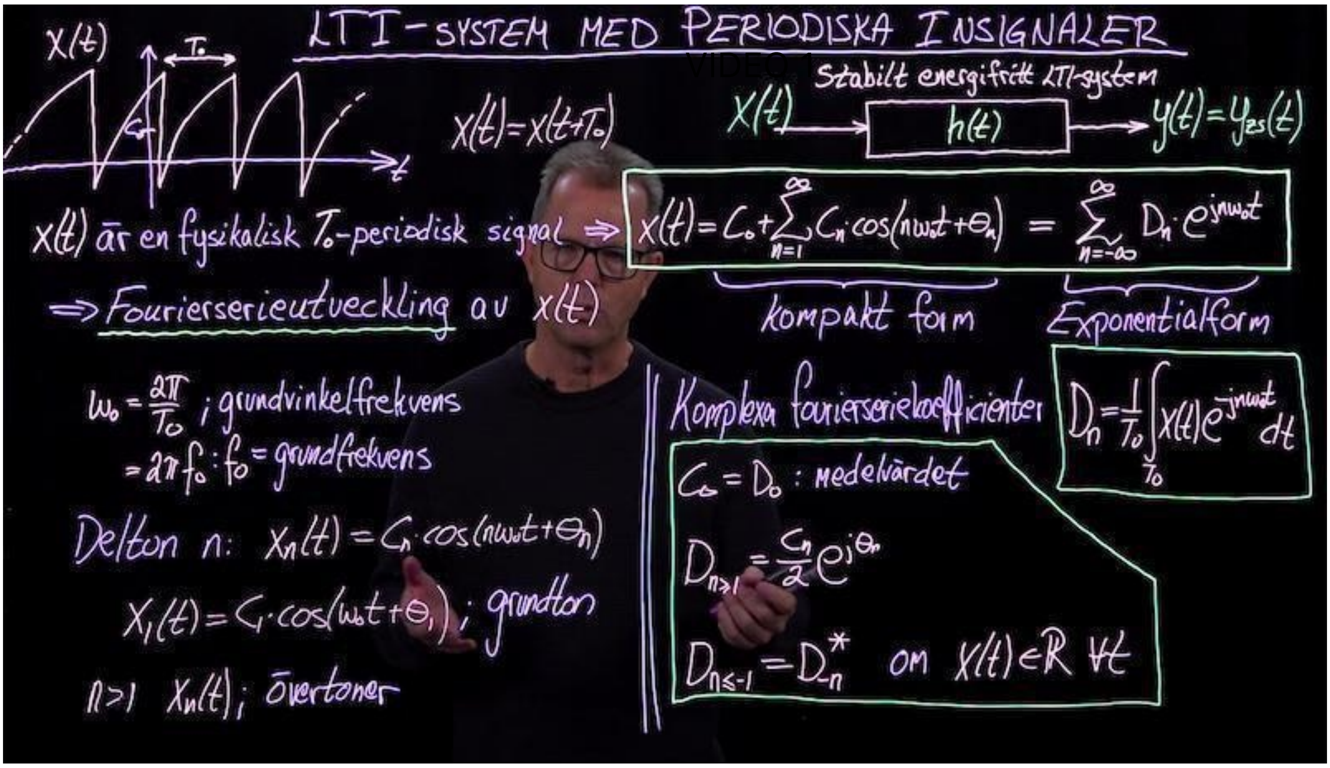


VIDEO 1

(Video 5 på webbsidan med videor om fourier-serieanalys)

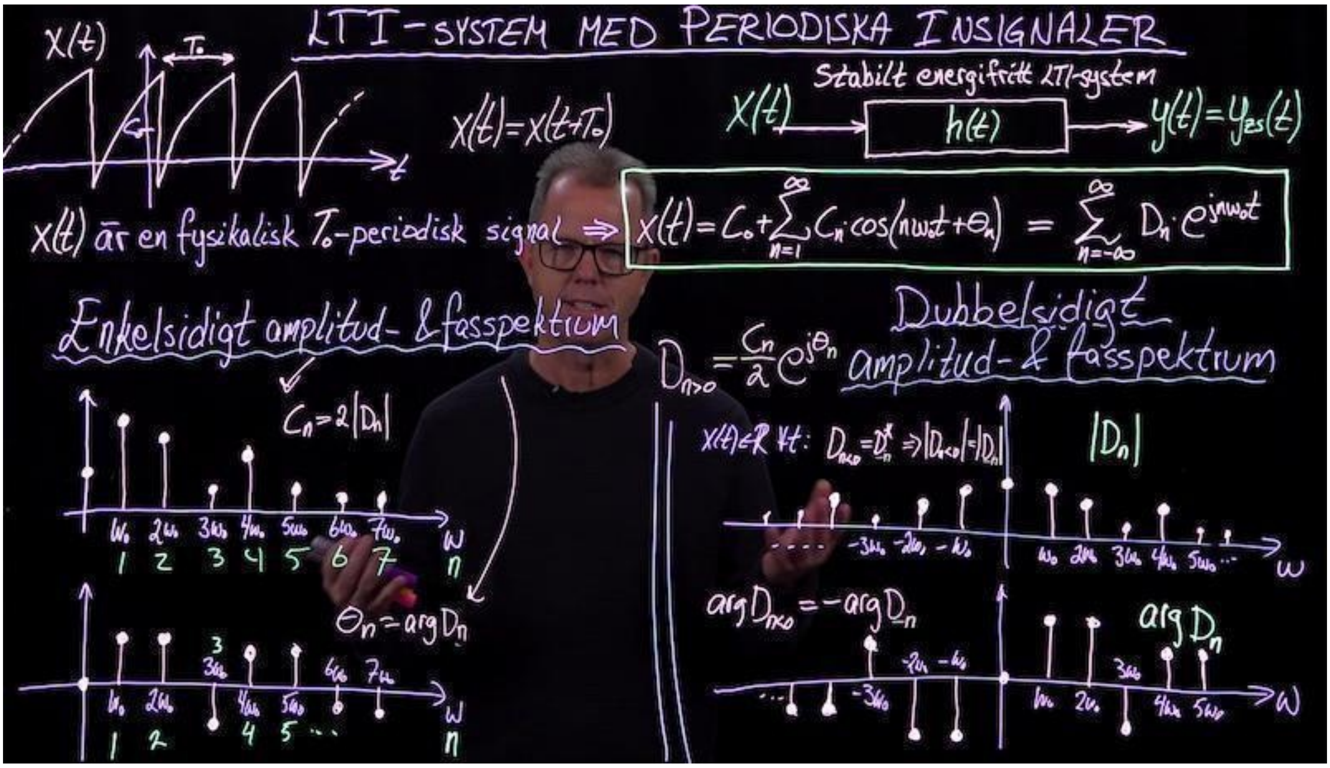
T_0-periodisk insignal $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow y_{zs}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot \mathcal{H}\{e^{jn\omega_0 t}\}$

$=\sum_n a_n \cdot x_n(t)$ $\qquad$ $=\sum_n a_n \cdot y_n(t)$



VIDEO 2.1

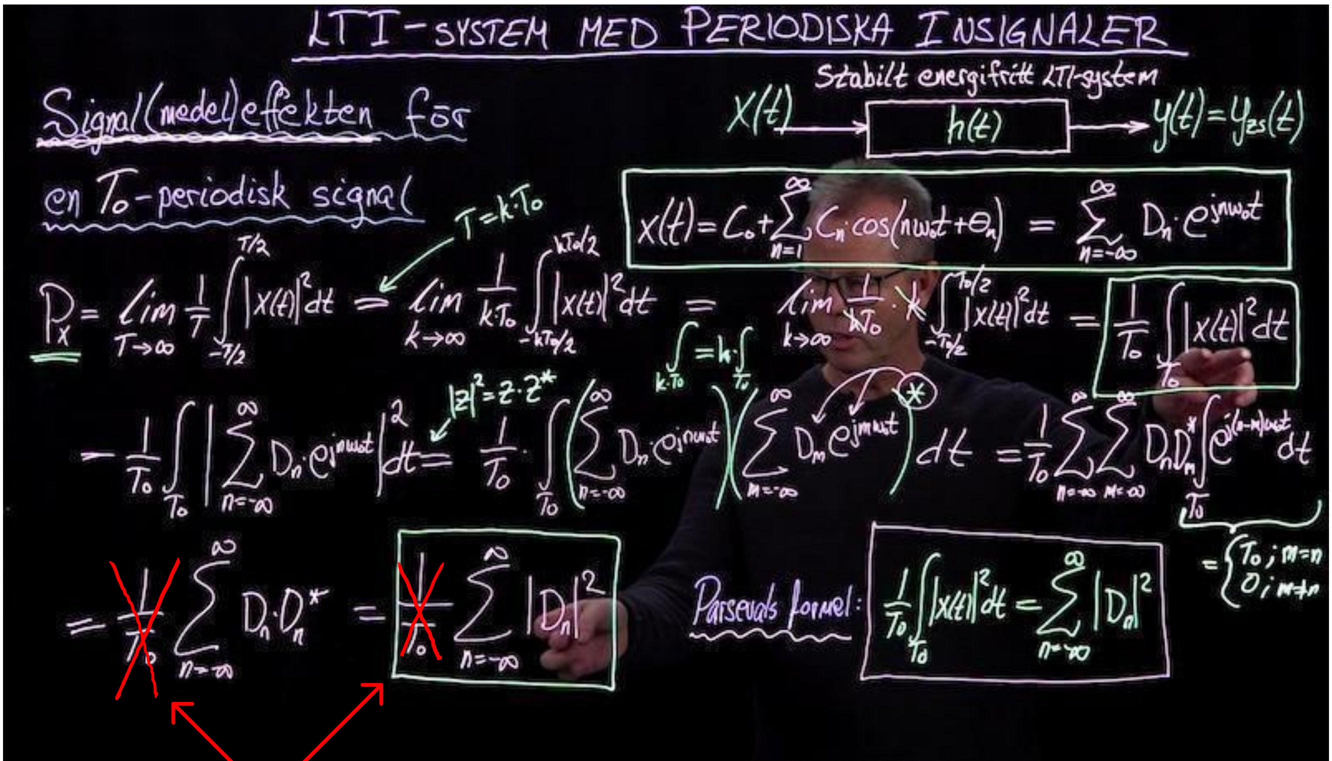
Video 2 är till största delen en repetition på det vi redan vet:
Första delen ovan går igenom de grundläggande definitionerna och terminologin



VIDEO 2.2

Den andra delen av Video 2 ovan är också en repetition:
Enkelsidigt spektrum och dubbelsidigt spektrum

Den tredje delen av Video 2 är dock ny – Signal(medel)effekten för en periodisk signal:

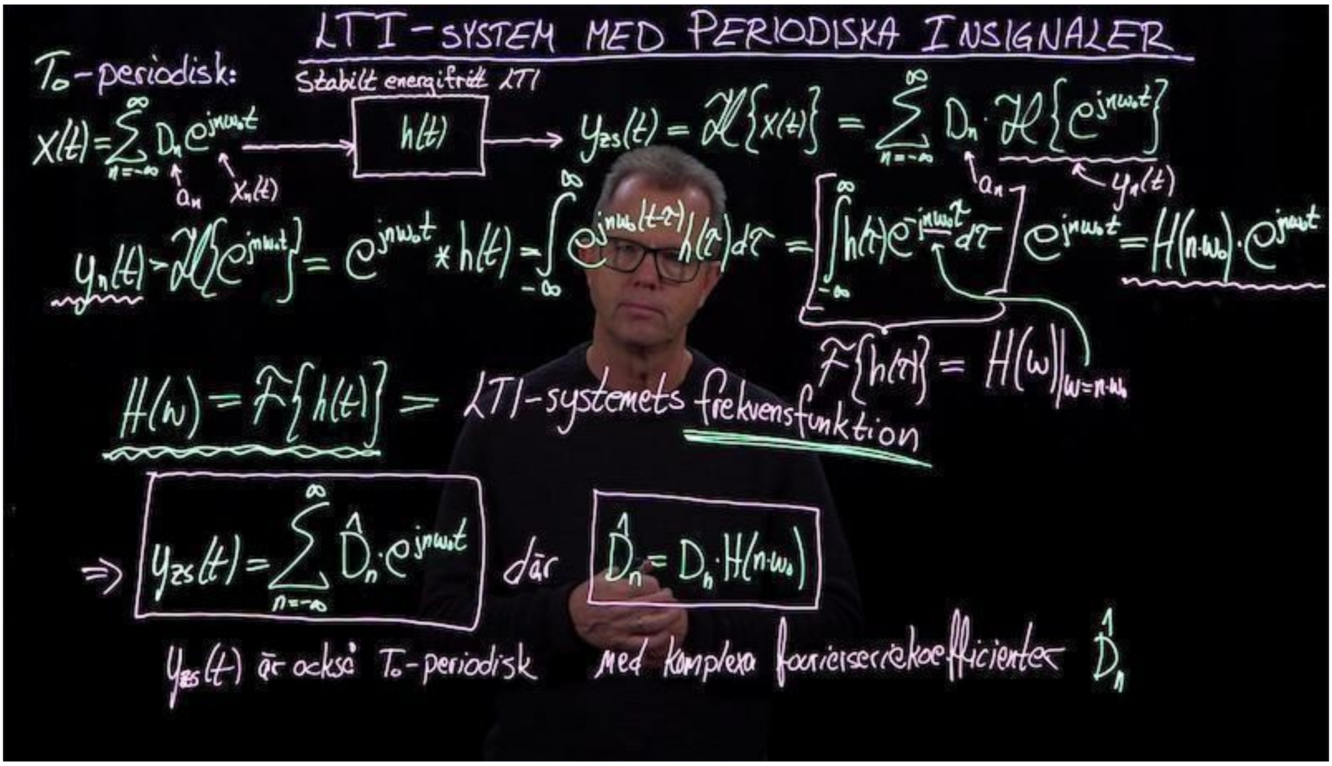


VIDEO 2.3

Som jag skriver i videobeskrivningen, så ska 1/To bort!

Parsevals formel/teorem: $P_x = \boxed{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2\, dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2}$

Signaleffekten till och med delton M,
dvs. för fysikaliska vinkelfrekvenser $0 \le \omega \le M\omega_0$:



Från videon ovan:

Stabilt energifritt LTI-system

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}: h(t)} \longrightarrow y_{zs}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = (x*h)(t)$$

$$x(t) = e^{jn\omega_0 t} \quad \Longrightarrow \quad y_{zs}(t) = \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau\right)} \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$= H_{n,\omega_0} \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$H(n\omega_0)$ i videon

$H_{n,\omega_0} \in \mathbb{C}$, beror på $h(t)$, n & ω_0
och ger information om hur systemet påverkar
frekvenssignaler med vinkelfrekvens $\omega = n\omega_0$.
Mer om detta i början av VT2!

Slutsats:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad \Longrightarrow \quad y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n e^{jn\omega_0 t}$$

Utsignalens komplexa fourierseriekoefficienter: $\boxed{\hat{D}_n = D_n \cdot H_{n,\omega_0}}$

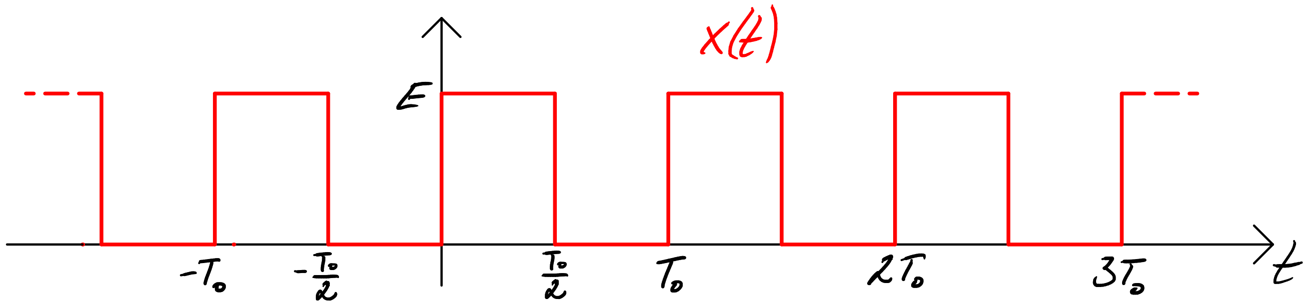
	Insignalen	Systemet	Utsignalen
Tidsdomän-beskrivning:			
Frekvensdomän-beskrivning:			

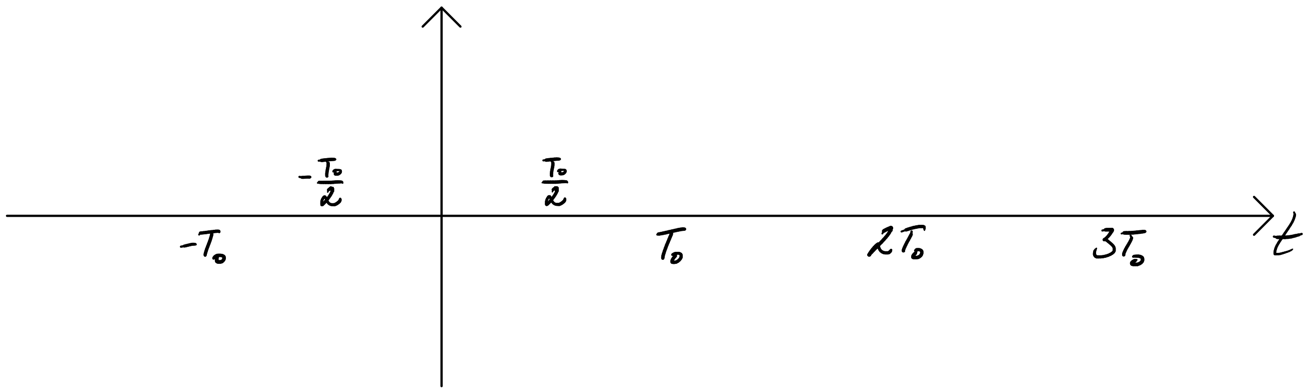
Några EXEMPEL på energifria LTI-system med periodisk insignal:

- $y(t) = x(t-t_0) =$

- $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} =$

Exempel – alternativ metod för beräkning av fyrkantvågens komplexa fourierseriekoefficienter:





Kretsberäkningar med allmän periodiska ström- eller spänningskälla.

Bestäm en ström/spänning $y(t)$ i kretsen (=LTI-systemet):

1. Fourierserieutveckla källsignalen (t.ex. en källa $x(t)$) $\Rightarrow C_n$ & θ_n

2. Likströmsteori för källans medelvärde C_0 ger medelvärdet $\tilde{C}_0$ för $y(t)$

3. Använd ***jω*-metoden** för källans deltoner:

$$x_n(t) = C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad \rightarrow \quad X_n = C_n e^{j\theta_n} \qquad R,\ jn\omega_0 L,\ \frac{1}{jn\omega_0 C}$$

Beräkna sökt storhet på komplex form:

$$Y_n = \tilde{C}_n e^{j\tilde{\theta}_n} \quad \Rightarrow \quad \text{Delton } n\text{:}\ \ y_n(t) = \tilde{C}_n \cos(n\omega_0 t + \tilde{\theta}_n)$$

4. Linjärt system $\Rightarrow$ Superposition ger tidsuttrycket för sökt storhet:

$$y(t) = \tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) = \tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \cos(n\omega_0 t + \tilde{\theta}_n)$$

Gå igenom denna sida själv!
Här ges en sammanfattning över de alternativa beräkningsvägar som finns
då man önskar beräkna dubbelsidigt och/eller enkelsidigt spektrum för utsignalen
från ett stabilt LTI-system med periodisk insignal.
Återkom speciellt hit efter att vi gått igenom analys med fouriertransformen i VT1:
H(w) nedan är fouriertransformen till systemets impulssvar h(t).
Du bör dock redan nu förstå de allmänna sambanden nedan, även om vi ännu inte
beräknat $H_{n,\omega_0} = H(n\omega_0)$. Det gör vi i VT2!

Beräkningsvägar vid beräkning av utsignalen och dess spektrum
för LTI-system med periodisk insignal

T_0-periodisk insignal,

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Stabilt (energifritt)
LTI-system

$H(\omega)$

T_0-periodisk utsignal

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n e^{jn\omega_0 t} = \hat{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \hat{\theta}_n)$$

$x(t)$ (given grafiskt eller analytiskt under en period)

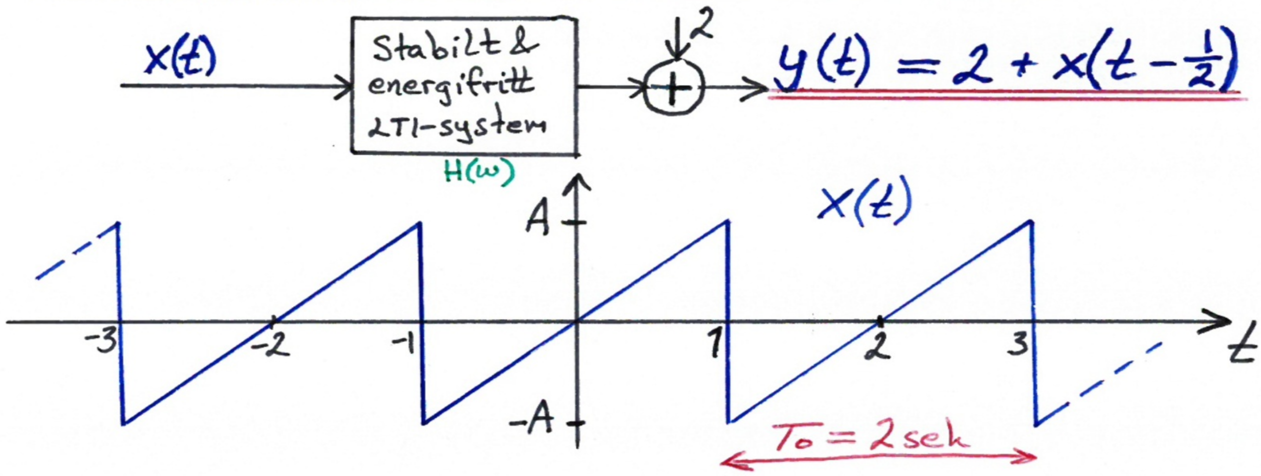
$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \;\longrightarrow\; \hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0) \;\longrightarrow\; \begin{cases} \hat{C}_0 = \hat{D}_0 \\ \hat{C}_n = 2|\hat{D}_n| \\ \hat{\theta}_n = \arg \hat{D}_n \end{cases}$$

$H(\omega)$

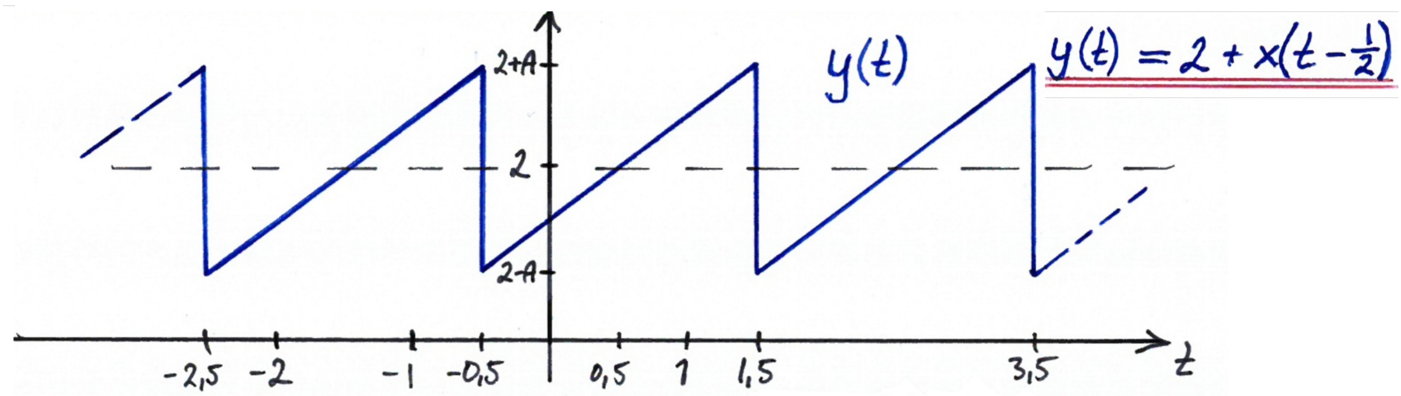
$$\left\{ |\hat{D}_n| \;\&\; \arg \hat{D}_n \right\}$$

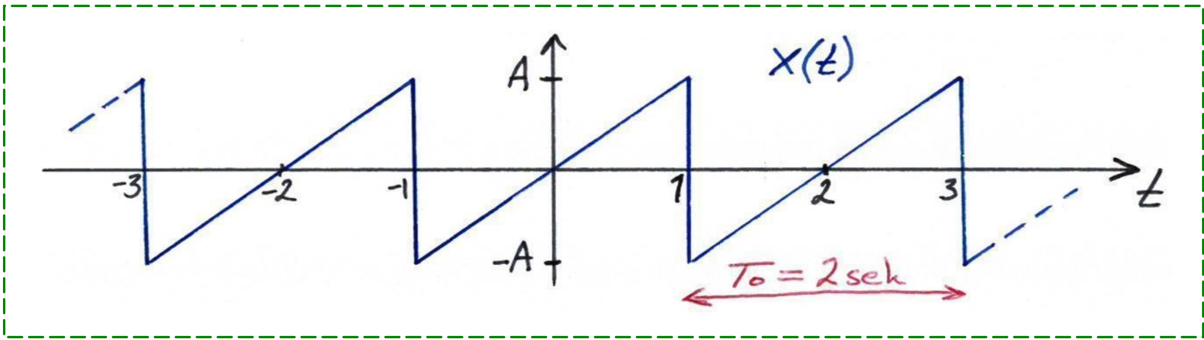
$$\begin{cases} C_0 = D_0 \\ C_n = 2|D_n| \\ \theta_n = \arg D_n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \hat{C}_0 = C_0 \cdot H(0) \\ \hat{C}_n = C_n \cdot |H(n\omega_0)| \\ \hat{\theta}_n = \theta_n + \arg H(\omega_0) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \hat{D}_0 = \hat{C}_0 \\ \hat{D}_{n>0} = \frac{\hat{C}_n}{2} e^{j\hat{\theta}_n} \\ \hat{D}_{n<0} = \hat{D}_{-n}^* \end{cases}$$

EXEMPEL, LTI-SYSTEM & PERIODISK INSIGNAL



Beräkna och rita både enkelsidigt och dubbelsidigt amplitudspektrum och fasspektrum för $y(t)$.





$$\text{dvs. } \underline{\underline{D_n}} = \begin{cases} \dfrac{jA(-1)^n}{\pi n} & ; n \neq 0 \\ 0 & ; n = 0 \end{cases} = \begin{cases} j \cdot \dfrac{A}{\pi n} = \dfrac{A}{\pi n} e^{j\frac{\pi}{2}} & ; \text{ jämna } n > 0 \\ -j \cdot \dfrac{A}{\pi n} = \dfrac{A}{\pi n} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} & ; \text{ udda } n > 0 \\ D_{-n}^{*} = |D_{-n}| e^{-j \arg D_{-n}} & ; \text{ alla } n < 0 \\ 0 & ; n = 0 \end{cases}$$

T.ex. $D_{-7} = D_7^{*} = |D_7| \cdot e^{-j \arg D_7}$

$\hat{D}_0$ & $\hat{D}_n$ från (A) ovan $\Rightarrow$

$$\hat{D}_0 = 2 + D_0 = 2 + 0 = 2 = 2 \cdot e^{j0} \Rightarrow \begin{cases} |\hat{D}_0| = 2 \\ \arg \hat{D}_0 = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

$$n \neq 0 \Rightarrow \hat{D}_n = D_n \cdot e^{jn\frac{\pi}{2}} = \frac{jA(-1)^n}{\pi n} \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}}$$

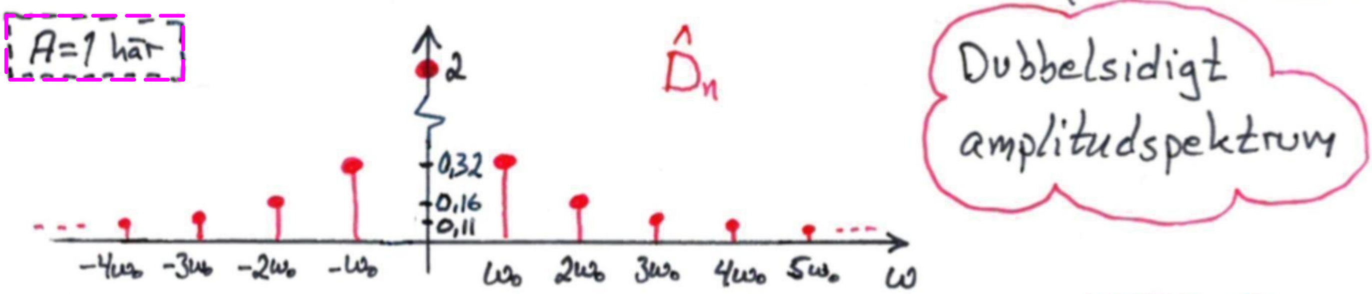
$$= \left/ \begin{matrix} j = e^{j\frac{\pi}{2}} \\ (-1)^n = e^{jn\pi} \end{matrix} \right/ = \frac{A}{\pi n} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}(n+1)}$$

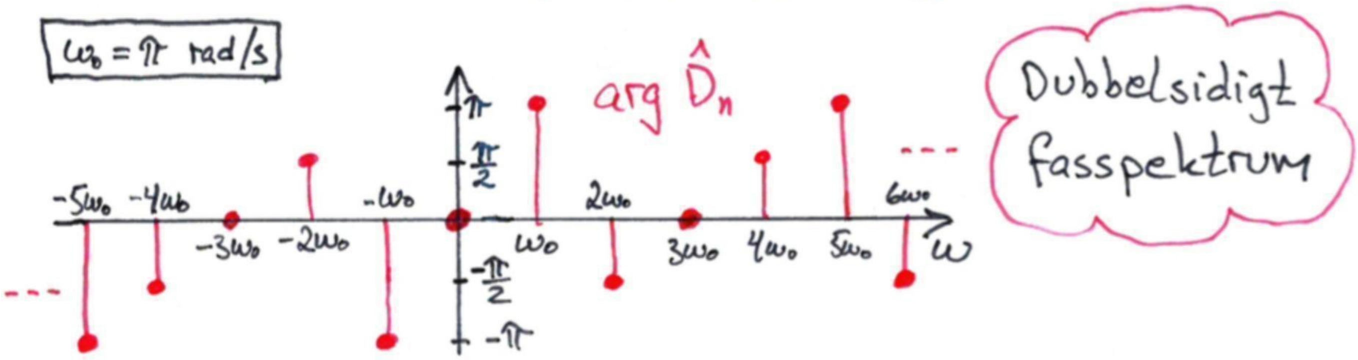
$$\Rightarrow |\hat{D}_n| = |D_n| = \frac{A}{\pi \cdot |n|} \quad ; \quad n \neq 0$$

$$\text{och} \begin{cases} \arg \hat{D}_n = \frac{\pi}{2}(n+1) = \begin{cases} \pi & ; n = 1, 5, 9, \ldots \\ \frac{3\pi}{2}, \text{ dvs. } \frac{-\pi}{2} & ; n = 2, 6, 10, \ldots \\ 2\pi, \text{ dvs. } 0 & ; n = 3, 7, 11, \ldots \\ \frac{5\pi}{2}, \text{ dvs. } \frac{\pi}{2} & ; n = 4, 8, 12, \ldots \end{cases} \\ \quad \text{då } n > 0 \\ \arg \hat{D}_n = -\arg \hat{D}_{-n} \quad \text{då } n < 0 \end{cases}$$

Dvs. $|\hat{D}_n|$ och $\arg \hat{D}_n$ ovan är de dubbelsidiga amplitud- och fasspektrumen som efterfrågas i uppgiften.

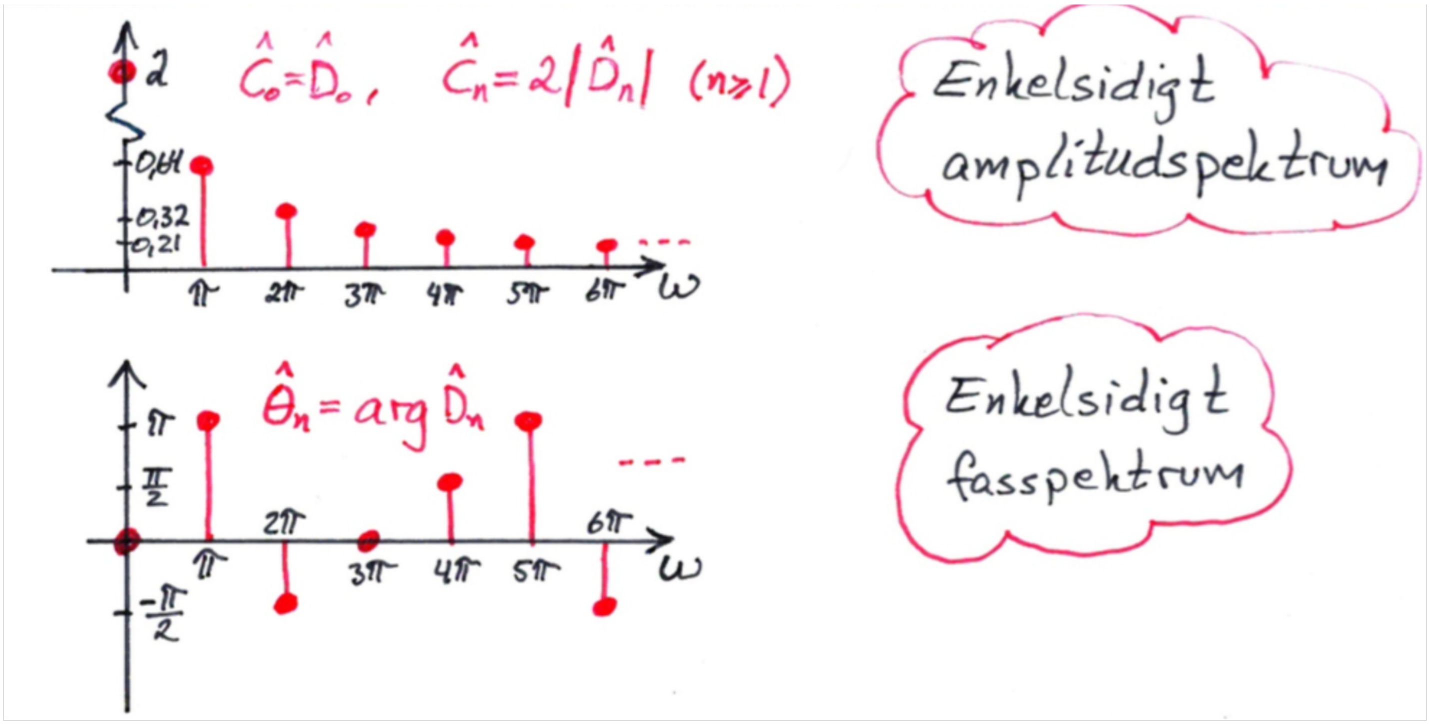
FREKVENSSPEKTRUM FÖR SÅGTANDSVÅGEN/-FUNKTIONEN





Enkelsidigt amplitudspektrum & fasspektrum:

$$\begin{cases} \hat{C}_0 = \hat{D}_0 = 2 \\ \hat{C}_n = 2|\hat{D}_n| = \dfrac{2A}{\pi n} \quad ; \quad n \geq 1 \\ \hat{\theta}_n = \arg \hat{D}_n \quad ; \; n \geq 1 \text{, enligt ovan} \end{cases}$$

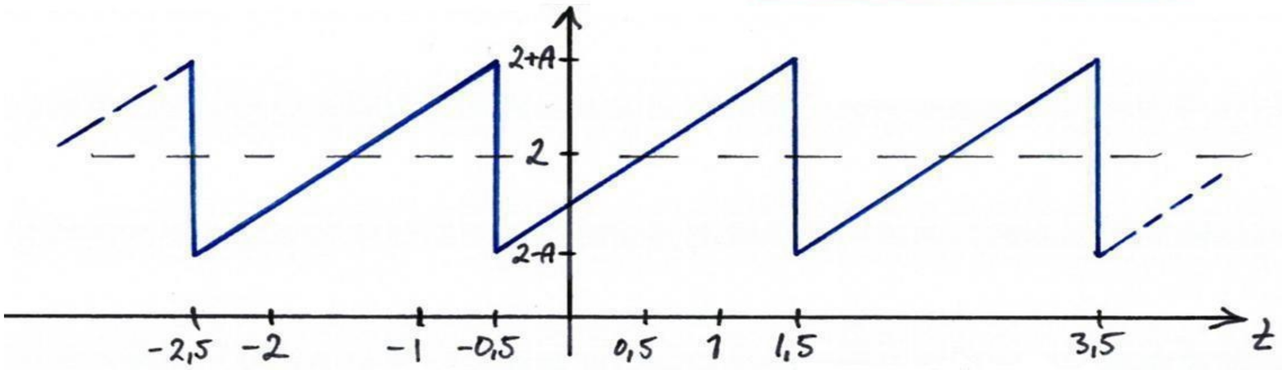


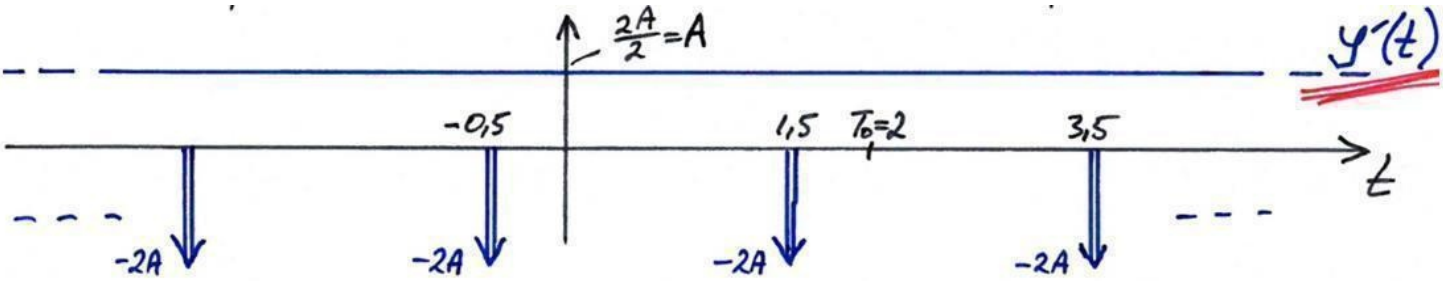
"Läxa": Beräkna själv de komplexa fourierseriekoefficienterna nedan, enligt den alternativa metoden!

<u>Alternativ Lösning</u> för beräkning av $\hat{D}_n$ baserat på sambandet

$D_n = \frac{D_{nx'}}{jn\omega_0}$, där D_n & $D_{nx'}$ är de komplexa fourierseriekoefficienterna för $x(t)$ resp. $x'(t)$:

$y(t) = 2 + x(t - \frac{1}{2})$





Ovanstående metod är lämplig att använda då signalen, för vilken man vill beräkna de komplexa fourierseriekoefficienterna för, innehåller diskontinuiteter eller ramper.