

Linjära System – Föreläsning 11:

- * Räkneexempel, fourieranalys av fyrkantvåg
- * LTI-system med periodisk insignal

Från föreläsning 10 – Fourierserieutveckling av periodiska signaler:

Fourierserieutveckling, sammanfattning:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

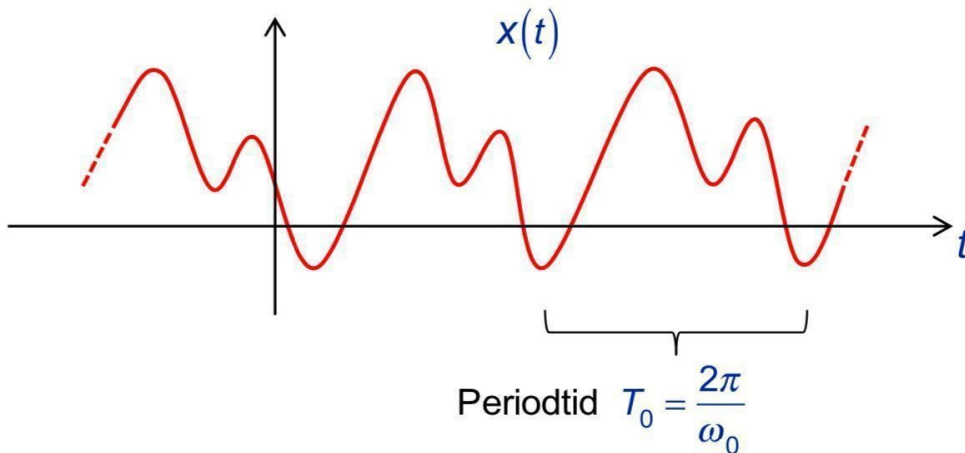
Samband:

$$D_{n>0} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_0 = D_0 = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) dt \\ C_{n>0} = 2|D_n| \\ \theta_{n>0} = \arg D_n \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Grundvinkel-} \\ \text{frekvens } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \\ \text{Enkelsidigt} \\ \text{amplitudspektrum} \\ \text{Enkelsidigt fasspektrum} \end{array}$$

där $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{\alpha}^{\alpha+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$ Komplexa fourierseriekoefficienter $x(t)$ reellvärd
 $\Leftrightarrow D_{-n} = D_n^*$

Se formelsamlingen, sid. 4!

Typisk beräkningsgång vid fourierserieanalys av periodisk signal:



$$x(t) \text{ given} \rightarrow D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \dots = \underbrace{|D_n|}_{\text{Enkelsidigt spektrum}} \cdot \underbrace{e^{j\arg D_n}}_{\text{Dubbelsidigt spektrum}}$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_0 = D_0 \\ C_n = 2|D_n| \\ \theta_n = \arg D_n \end{array} \right\} \text{Enkelsidigt spektrum}$$

(Rött = tillägg efter F&O)

Relaterade fourierserievideor att se direkt efter föreläsningen

VIDEO 3

HÄRLEDNING AV DEN KOMPLEXA FOURIERSERIEN

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}}_{:= D_n, n>0} \cdot e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}}_{:= D_n^*} \cdot e^{-jn\omega_0 t}$$

$$\cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \frac{e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}}{2} = \frac{1}{2} e^{j\theta_n} e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\theta_n} e^{-jn\omega_0 t}$$

$$\xrightarrow{\text{Låt } k=-n} \sum_{k=-1}^{\infty} D_k^* e^{j(-k)\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{-1} D_n^* e^{jn\omega_0 t}$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} D_n^* e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Låt $D_n := D_n^*$ för $n < 0$
Ex: $D_{-3} = D_3^*$

$$D_0 = C_0$$

dar

$$D_n = \begin{cases} \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n} & ; n > 0 \\ D_n^* & ; n < 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} x(t) \in \mathbb{R} \forall t \\ \Leftrightarrow D_{-n} = D_n^* \end{array} \right)$$

$$C_n = 2|D_n| \quad n \neq 0$$

$$\theta_n = \arg D_n = \angle D_n$$

T.ex. $D_{-4} = D_4^*$

VIDEO 4

HÄRLEDNING AV $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

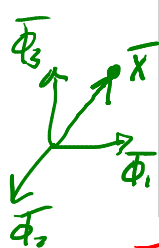
Om $x(t)$ är T_0 -periodisk $\Rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\Rightarrow \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m \cdot e^{jm\omega_0 t} \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m \int_{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \star$$

$m=n \Rightarrow \star = \int_{T_0} e^{j(n-n)\omega_0 t} dt = \int_{T_0} 1 dt = T_0$

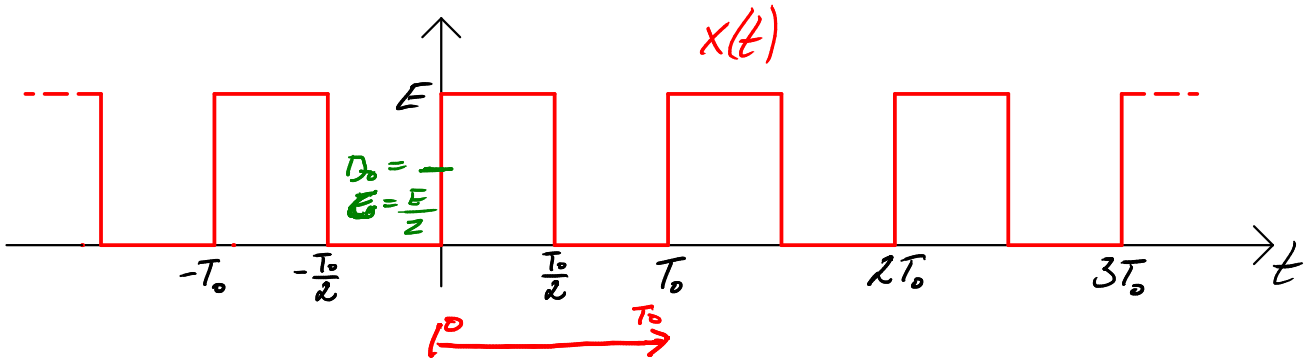
$m \neq n \Rightarrow \star = \left[\frac{e^{j(m-n)\omega_0 t}}{j(m-n)\omega_0} \right]_0^{T_0} = \frac{e^{j(m-n)\omega_0 T_0} - e^{j(m-n)\omega_0 \cdot 0}}{j(m-n)\omega_0} = \frac{e^{j2\pi(m-n)} - 1}{j(m-n)\omega_0} = 0$

$$\therefore \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = D_n \cdot T_0 \quad (m=n) \quad \left(+ \sum_{m \neq n} D_m \cdot 0 \right)$$


$\bar{x} = \sum_n a_n \bar{\Phi}_n \leftarrow$ Basvektorer
 $a_n = \frac{1}{\|\bar{\Phi}_n\|^2} (\bar{x} \cdot \bar{\Phi}_n)$ skalarprod.
 $\bar{\Phi}_i \cdot \bar{\Phi}_j \rightarrow \frac{1}{\|\bar{\Phi}_i\|^2} \sum_m x_m \cdot \Phi_{i,m}$

$x(t) = \sum_n D_n \cdot \phi_n(t) \leftarrow$ Basfun, $\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$
 $D_n = \frac{1}{T_0} \langle x, \phi_n \rangle$ lura prod.
 $\langle \phi_i, \phi_j \rangle \rightarrow \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot \phi_n^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

Exempel – beräkna fyrkantvågens dubbelsidiga spektrum och enkelsidiga spektrum



Beräkning på föreläsningen \Rightarrow

$$D_n = \begin{cases} \frac{E}{2} & ; n=0 \\ 0 & ; \text{jämna } n \neq 0 \\ \frac{E}{jn\pi} & ; \text{udda } n \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} C_0 = \frac{E}{2} \\ C_n = \begin{cases} 0 & ; \text{jämna } n > 0 \\ \frac{2E}{n\pi} & ; \text{udda } n \end{cases} \\ \theta_n = \begin{cases} 0 & ; \text{jämna } n \\ -\frac{\pi}{2} & ; \text{udda } n \end{cases} \end{cases}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow \omega_0 T_0 = 2\pi$$

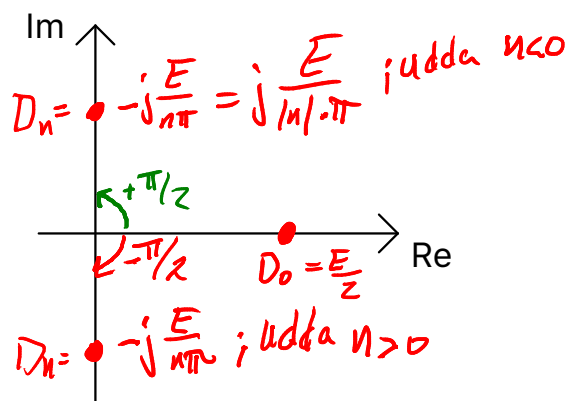
Se även detta enkelsidiga spektrum i Falstads Java-applet: falstad.com/fourier

$$\begin{aligned} X(\omega) \rightarrow D_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} E \cdot e^{jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^0 0 \cdot e^{jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{E}{T_0} \left[\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0} \right]_0^{T_0/2} = \frac{E}{-jn\omega_0 T_0} (e^{-jn\omega_0 \frac{T_0}{2}} - e^0) = \frac{E}{jn2\pi} (1 - e^{jn\pi}) \\ &= \begin{cases} \frac{E}{jn2\pi} (1-1) = 0 & ; \text{jämna } n \neq 0 \\ \frac{E}{jn2\pi} (1-(-1)) = \frac{E}{jn\pi} & ; \text{udda } n \end{cases} \end{aligned}$$

Handwritten notes: $n \neq 0$ ty $-2\pi i$ med n ; $e^{jn\pi} = (-1)^n$; $(e^{jn2\pi})^n = 1^n = 1$

Beräkna D_0 separat:

$$D_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{j0 \cdot \omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0/2} E dt = \frac{E}{2}$$



$$\frac{j}{j} \frac{E}{jn\pi} = -j \frac{E}{n\pi}$$

Dubbelsidigt spektrum;

$$\underline{|D_n|} = \begin{cases} \frac{E}{2}; & n=0 \\ 0; & j\ddot{a}rn \neq 0 \end{cases}$$

$$\left| \frac{E}{j n \pi} \right| = \frac{E}{|n| \pi}; \text{ udda } n$$

$$\underline{\arg D_n} = \begin{cases} \arg \frac{E}{2} = 0; & n=0 \\ 0; & j\ddot{a}rn \neq 0 \\ \arg(-j \frac{E}{n \pi}) = \begin{cases} -\pi/2; & \text{udda } n > 0 \\ \pi/2; & \text{udda } n < 0 \end{cases} \end{cases}$$

ty $D_n = 0 = 0 \cdot e^{j\alpha}$

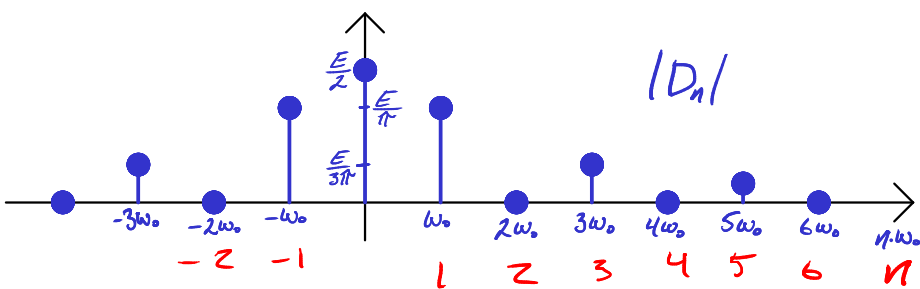
Enkelsidigt spektrum

$$\underline{C_0} = D_0 = \frac{E}{2}$$

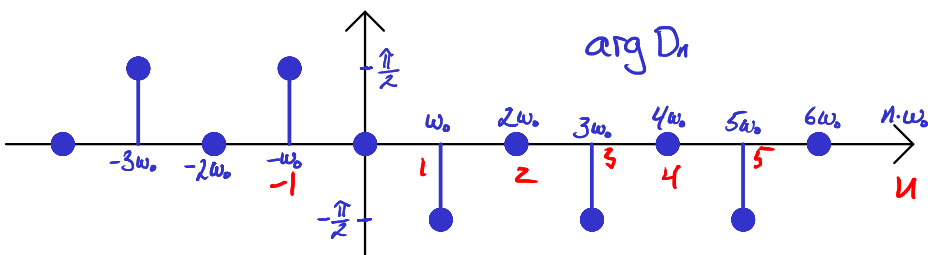
$$n \geq 1; \underline{C_n} = 2|D_n| = \begin{cases} 0; & j\ddot{a}rn \neq 0 \\ \frac{2E}{n\pi}; & \text{udda } n \text{ (} n \geq 1 \text{)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\theta_0} = \arg C_0 = 0 \text{ rad} \\ \underline{\theta_n} = \arg D_n = \begin{cases} 0; & j\ddot{a}rn \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2}; & \text{udda } n \end{cases} \end{cases}$$

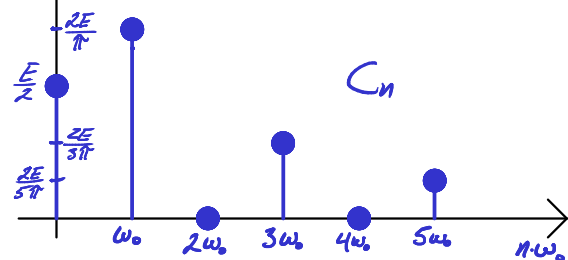
Dubbelsidigt amplitudspektrum



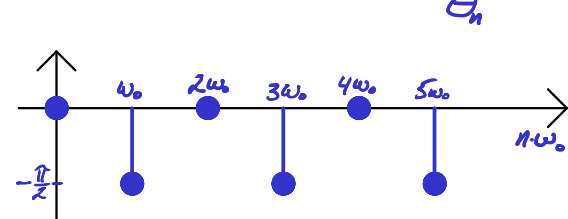
Dubbelsidigt fasspektrum



Enkelsidigt amplitudspektrum



Enkelsidigt fasspektrum



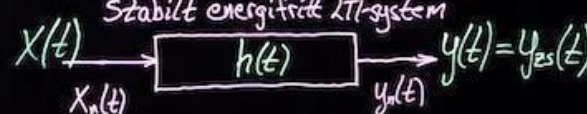
LTI-system med periodisk insignal

VIDEO 1

(Video 5 på webbsidan med videor om fourierserieanalys)

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INSNALER

Stabilt energifritt LTI-system



$$X(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t) \xrightarrow{\text{LINJÄRT}} y_{zs}(t) = \sum_n a_n \cdot y_n(t)$$

$a_n \in \mathbb{C}$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\text{LTI}} y_{zs}(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$X(t) = \cos(\sin(\omega_0 t)) \rightarrow y_{zs}(t) = ?$

Allmän T_0 -periodisk $X(t) \rightarrow y_{zs}(t) = ?$

Med fourierseriebeskrivning: $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \xrightarrow{X_{eff}(t)} y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot \mathcal{H}\{e^{jn\omega_0 t}\}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ $a_n = y_n(t) = ?$

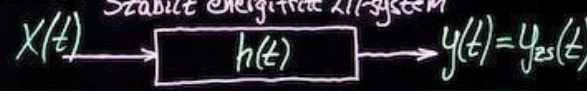
T_0 -periodisk insignal $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot \mathcal{H}\{e^{jn\omega_0 t}\}$

$= \sum_n a_n \cdot x_n(t)$ $= \sum_n a_n \cdot y_n(t)$

VIDEO 2.1

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INSNALER

Stabilt energifritt LTI-system



$X(t)$ är en fysikalisk T_0 -periodisk signal $\Rightarrow X(t) = X(t+T_0)$

\Rightarrow Fourierserieutveckling av $X(t)$

$$X(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

kompakt form Exponentialform

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$; grundvinkelfrekvens
 $= 2\pi f_0$; f_0 = grundfrekvens

Delton n : $X_n(t) = C_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$
 $X_1(t) = C_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \theta_1)$; grundton
 $n > 1$ $X_n(t)$; övertoner

Komplexa fourierseriekoefficienter

$C_0 = D_0$: medelvärde

$D_{n>1} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}$

$D_{n<-1} = D_n^*$ om $X(t) \in \mathbb{R} \forall t$

Video 2 är till största delen en repetition på det vi redan vet:

Första delen ovan går igenom de grundläggande definitionerna och terminologin

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INSGNALER

Stabilt energifritt LTI-system

$X(t) \rightarrow h(t) \rightarrow Y(t) = Y_{ps}(t)$

$x(t) = x(t+T_0)$

$x(t)$ är en fysikalisk T_0 -periodisk signal $\Rightarrow x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$

Enkelsidigt amplitud- & fasspektrum

$C_n = 2|D_n|$

$\theta_n = \arg D_n$

Dubbelsidigt amplitud- & fasspektrum

$x(t) \in \mathbb{R} \forall t: D_{-n} = D_n^* \Rightarrow |D_{-n}| = |D_n|$

$\arg D_{-n} = -\arg D_n$

Den andra delen av Video 2 ovan är också en repetition:
Enkelsidigt spektrum och dubbelsidigt spektrum

Den tredje delen av Video 2 är dock ny – Signal(medel)effekten för en periodisk signal:

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INSGNALER

Stabilt energifritt LTI-system

$X(t) \rightarrow h(t) \rightarrow Y(t) = Y_{ps}(t)$

Signal(medel)effekten för en T_0 -periodisk signal

$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$

$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k \cdot T_0} \int_{-kT_0/2}^{kT_0/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$

$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \right|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m^* e^{-jm\omega_0 t} \right) dt = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_n D_m^* \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt$

$= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n D_n^* = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$

Parsevals formel: $\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$

$\begin{cases} T_0; m=n \\ 0; m \neq n \end{cases}$

Som jag skriver i videobeskrivningen, så ska $1/T_0$ bort!

Parsevals formel/teorem:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$

Signaleffekten till och med delton M, dvs. för fysikaliska vinkelfrekvenser $0 \leq \omega \leq M\omega_0$:

$$P_{M,x} = \sum_{n=-M}^M |D_n|^2$$

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INIGNALER

T_0 -periodisk: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$ → $h(t)$ → $y_{zs}(t) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$

Stabilt energifritt LTI

$y_n(t) = \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\} = e^{jn\omega_0 t} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0(t-\tau)} h(\tau) d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jn\omega_0 t} = H(n\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t}$

$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} =$ LTI-systemets frekvensfunktion $\mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega)|_{\omega=n\omega_0}$

⇒ $y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$ där $\hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0)$

$y_{zs}(t)$ är också T_0 -periodisk med komplexa fourierseriekoefficienter \hat{D}_n

Från videon ovan:

Stabilt energifritt LTI-system

$x(t) \rightarrow \mathcal{H}: h(t) \rightarrow y_{zs}(t) = \mathcal{F}\{x(t)\} = (x * h)(t)$

$x(t) = e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow y_{zs}(t) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right) \cdot e^{jn\omega_0 t} = H_{n,\omega_0} \cdot e^{jn\omega_0 t}$

$H_{n,\omega_0} \in \mathbb{C}$, beror på $h(t)$, n & ω_0 och ger information om hur systemet påverkar frekvenssignaler med vinkelfrekvens $\omega = n\omega_0$. Mer om detta i början av VT2!

$H(n\omega_0)$ i videon

Slutsats:

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$

Utsignalens komplexa fourierseriekoefficienter: $\hat{D}_n = D_n \cdot H_{n,\omega_0}$

	Insignalen	Systemet	Utsignalen
Tidsdomän-beskrivning:	$x(t)$	$h(t)$	$y_{zs}(t) = (x * h)(t)$
Frekvensdomän-beskrivning:	D_n	H_{n, ω_0}	$\hat{D}_n = D_n \cdot H_{n, \omega_0}$

Några EXEMPEL på energifria LTI-system med periodisk insignal:

$$\bullet y(t) = x(t - t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0(t-t_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{D_n \cdot e^{-jn\omega_0 t_0}}_{\hat{D}_n} \underbrace{e^{jn\omega_0 t}}_{H_{n, \omega_0}}$$

$$\bullet y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_n D_n e^{jn\omega_0 t} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \frac{d}{dt} (e^{jn\omega_0 t})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{D_n \cdot jn\omega_0}_{\hat{D}_n} e^{jn\omega_0 t} = H_{n, \omega_0}$$

$$\hat{D}_n = D_n \cdot jn\omega_0$$

| $x(t)$

$y(t) = x'(t)$

$$D_n = \frac{\hat{D}_n}{jn\omega_0}$$

∞ ∞ D_n för en T_0 -periodisk signal $x(t)$ kan erhållas från $D_{nx'}$ för $x'(t)$:

$$D_n = \frac{D_{nx'}}{jn\omega_0}$$

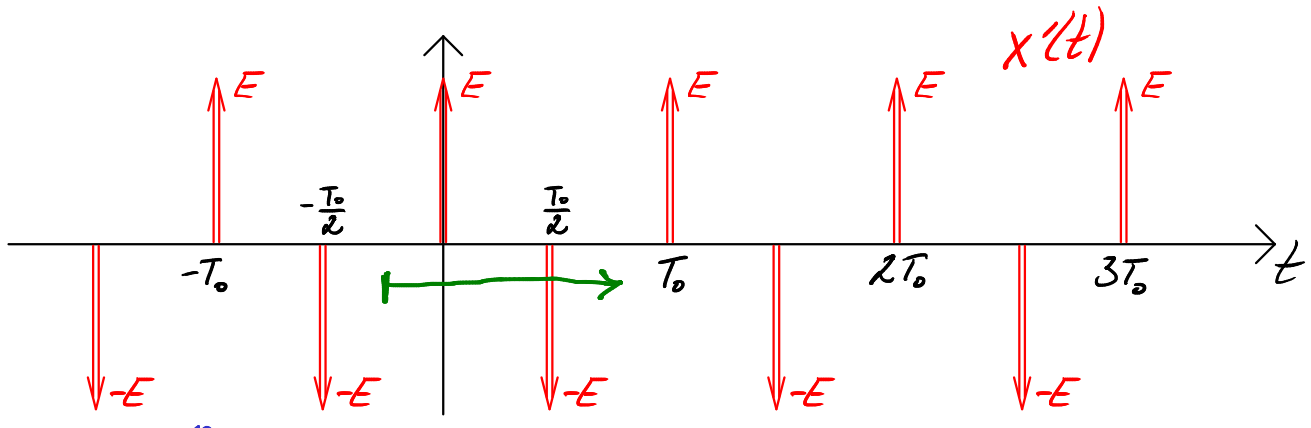
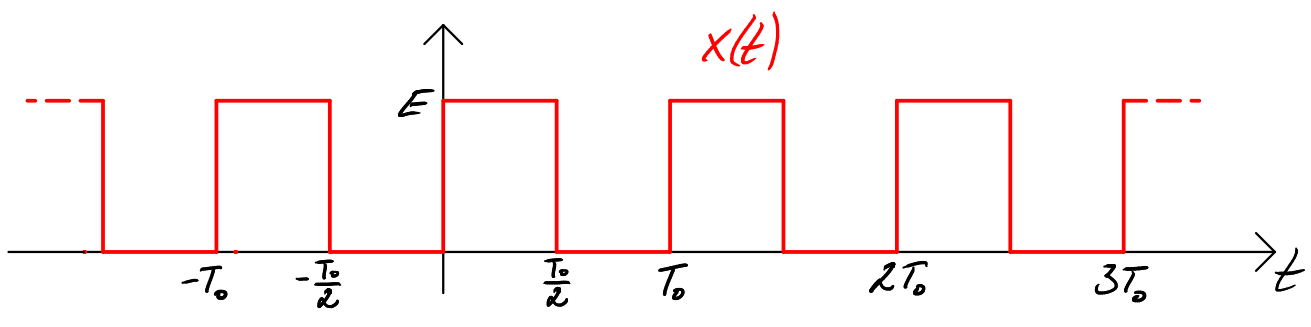
$$x''(t) \leftrightarrow D_{nx''}$$

⇒

$$D_{nx'} = \frac{D_{nx''}}{jn\omega_0}$$

$$\Rightarrow D_n = \frac{D_{nx''}}{(jn\omega_0)^2}$$

Exempel – alternativ metod för beräkning av fyrkantvågens komplexa fouriersseriekoefficienter:



$$x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_{nx'} e^{jn\omega_0 t}$$

$$D_{nx'} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x'(t) e^{jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{0^+}^{T_0} E \delta(t) e^{jn\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0} -E \delta(t - T_0/2) e^{jn\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{E}{T_0} \left(1 - e^{jn\omega_0 \frac{T_0}{2}} \right) = \frac{E}{T_0} \left(1 - e^{-jn\pi} \right) = (-1)^n$$

$$= \begin{cases} 0 & ; \text{jämna } n \\ \frac{2E}{T_0} & ; \text{udda } n \end{cases} \Rightarrow D_n = \frac{D_{nx'}}{jn\omega_0} = \dots$$

Hit hann jag under föreläsningen.

Resten av lösningen:

$$D_n = \frac{D_{nx'}}{jn\omega_0} = \begin{cases} 0 & ; \text{jämna } n \neq 0 \\ \frac{2E}{T_0 \cdot jn\omega_0} = \frac{E}{jn\pi} & ; \text{udda } n \end{cases}$$

$n \neq 0$ ty division med n
 $\Rightarrow D_0$ beräknas separat, som tidigare
 $\omega_0 T_0 = 2\pi$

Denna metod är lämplig (ger enklare beräkningar) då $x(t)$ är styckvis konstant och/eller innehåller diskontinuiteter: Derivera då tills du erhåller dirac:er. Integraler med dirac:er multiplicerade med en komplex exponentialfunktion blir enkla att beräkna, se ovan!

Kretsberäkningar med allmän periodiska ström- eller spänningskälla.

Bestäm en ström/spänning $y(t)$ i kretsen (=LTI-systemet):

1. Fourierserieutveckla källsignalen (t.ex. en källa $x(t)$) $\Rightarrow C_n$ & θ_n
2. Likströmsteori för källans medelvärde C_0 ger medelvärdet \tilde{C}_0 för $y(t)$
3. Använd **$j\omega$ -metoden** för källans deltoner:

$$x_n(t) = C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \rightarrow X_n = C_n e^{j\theta_n} \quad R, jn\omega_0 L, \frac{1}{jn\omega_0 C}$$

Beräkna sökt storhet på komplex form:

$$Y_n = \tilde{C}_n e^{j\tilde{\theta}_n} \Rightarrow \text{Delton } n: y_n(t) = \tilde{C}_n \cos(n\omega_0 t + \tilde{\theta}_n)$$

4. Linjärt system \Rightarrow Superposition ger tidsuttrycket för sökt storhet:

$$y(t) = \tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) = \tilde{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{C}_n \cos(n\omega_0 t + \tilde{\theta}_n)$$

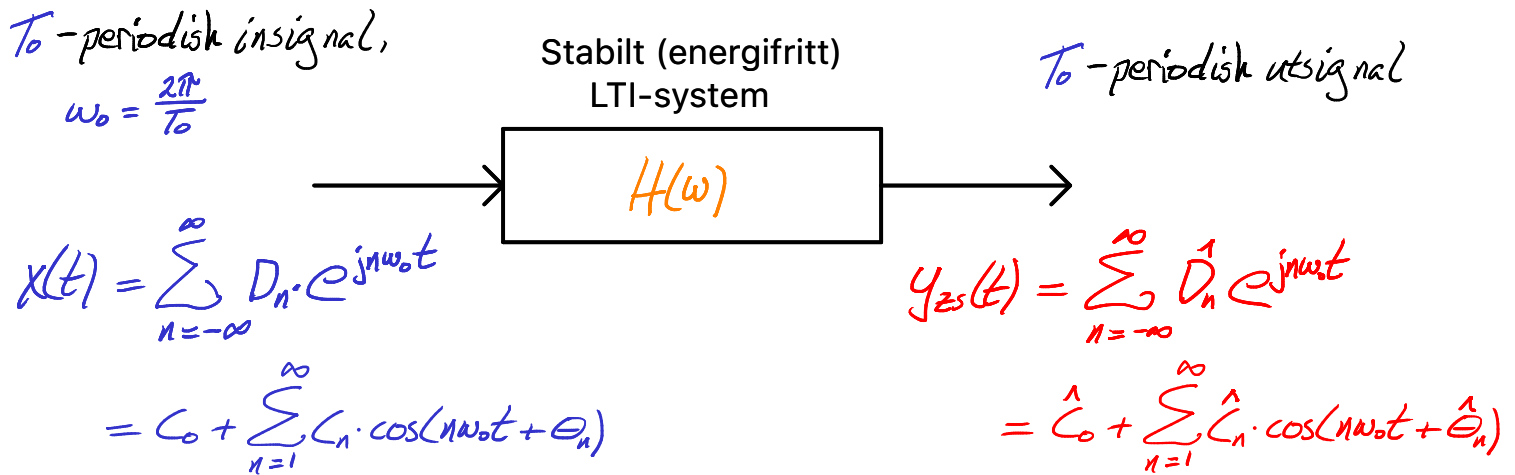
Gå igenom denna sida själv!

Här ges en sammanfattning över de alternativa beräkningsvägar som finns då man önskar beräkna dubbelsidigt och/eller enkelsidigt spektrum för utsignalen från ett stabilt LTI-system med periodisk insignal.

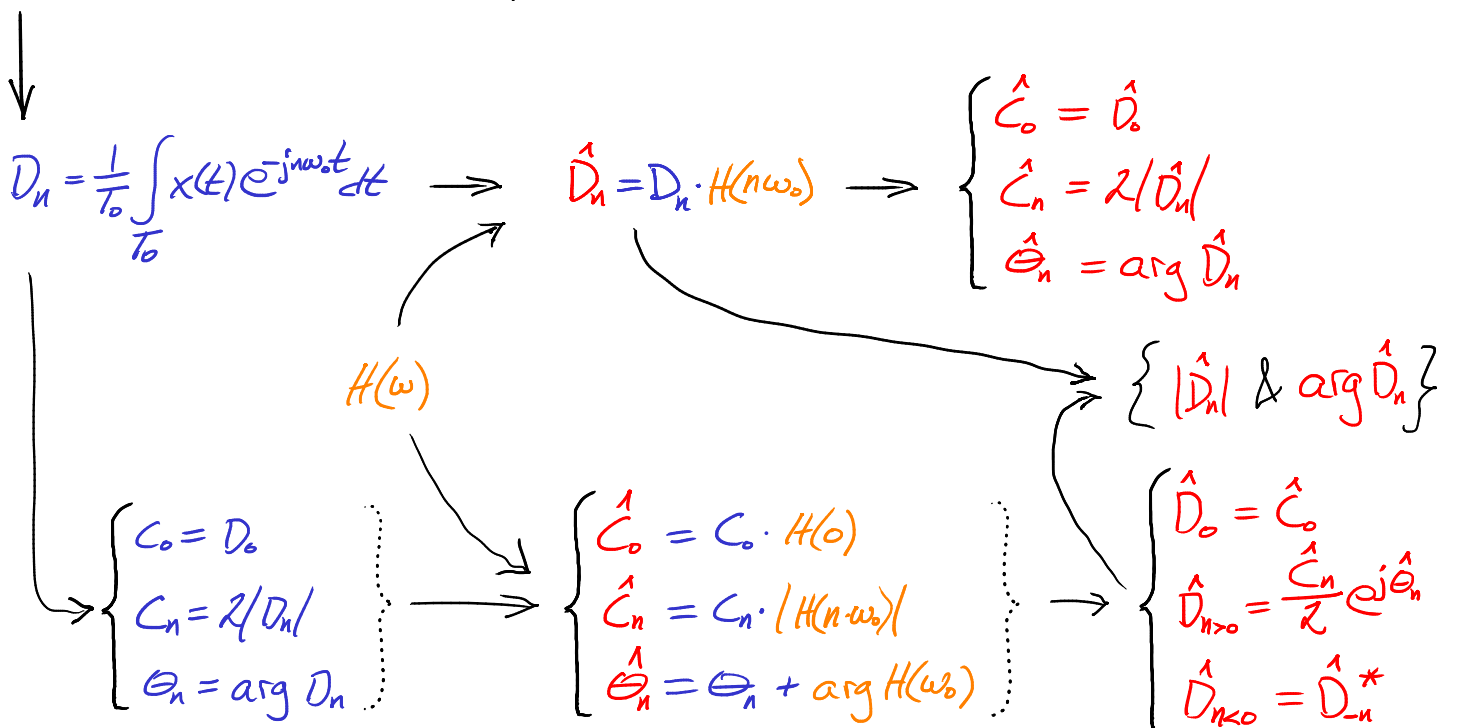
Återkom speciellt hit efter att vi gått igenom analys med fouriertransformen i VT1: $H(\omega)$ nedan är fouriertransformen till systemets impulssvar $h(t)$.

Du bör dock redan nu förstå de allmänna sambanden nedan, även om vi ännu inte beräknat $H_{n,\omega_0} = H(n\omega_0)$. Det gör vi i VT2!

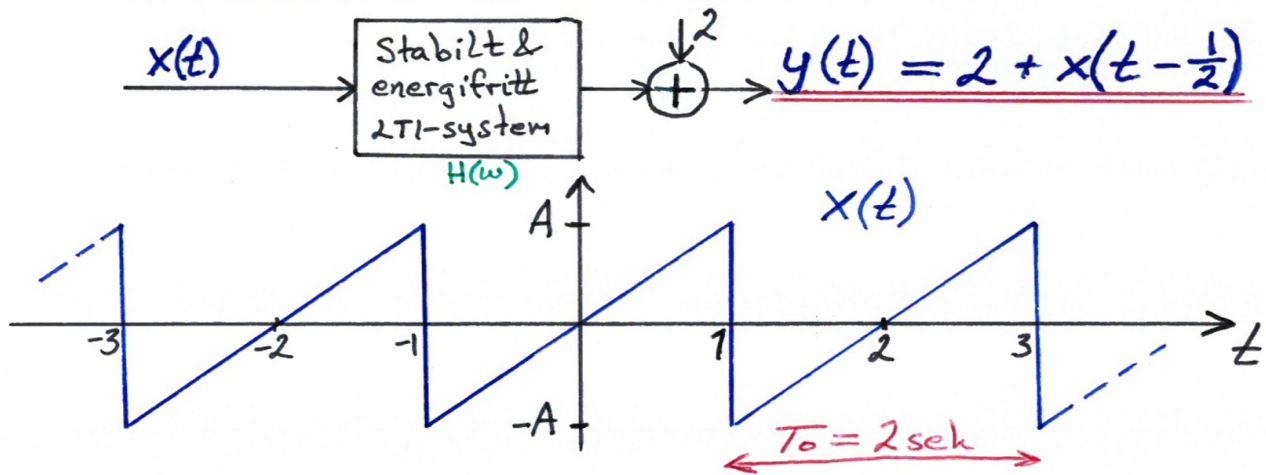
Beräkningsvägar vid beräkning av utsignalen och dess spektrum för LTI-system med periodisk insignal



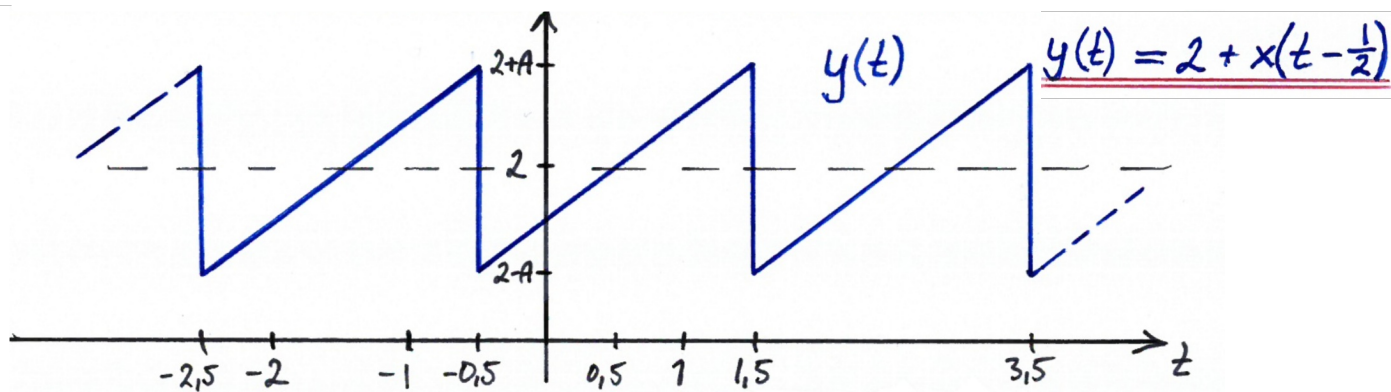
$x(t)$ (given grafiskt eller analytiskt under en period)



EXEMPEL, LTI-SYSTEM & PERIODISK INSIGNAL



Beräkna och rita både enkelsidigt och dubbelsidigt amplitudspektrum och fasspektrum för $y(t)$.



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}, \text{ där } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow y(t) = 2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\pi(t-\frac{1}{2})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n e^{jn\pi t}$$

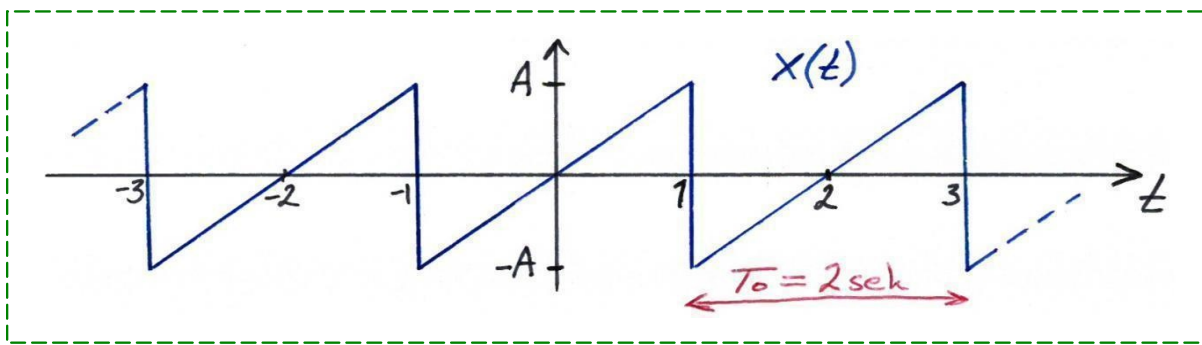
$= D_n \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jn\pi t}$ \uparrow $y(t)$ är också T_0 -periodisk

$y(t) = 2 + x(t - \frac{1}{2})$

där

$$\begin{cases} \hat{D}_0 = 2 + D_0 \cdot e^{j0 \cdot \frac{\pi}{2}} = 2 + D_0 \\ \hat{D}_n = D_n \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}} ; n \neq 0 \end{cases} \quad (\star)$$

$= D_n \cdot H(n\omega_0), \text{ där } H(n\omega_0) = e^{-jn\frac{\pi}{2}} \quad (H(\omega) = e^{-j\frac{\omega}{2}})$



där
$$\underline{D_n} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A \cdot t \cdot e^{-jn\pi t} dt$$

= / Partiell integration - se formelsamlingen, sid 3:

$$\int t \cdot e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2} (at - 1) ; \text{ Här: } a = -jn\pi /$$

=
$$\frac{A}{2} \left[\frac{e^{-jn\pi t}}{(-jn\pi)^2} (-jn\pi t - 1) \right]_{-1}^1 \quad (n \neq 0, \text{ ty division med } n^2)$$

=
$$\frac{A}{-2n^2\pi^2} \left(e^{-jn\pi} (-jn\pi - 1) - e^{jn\pi} (jn\pi - 1) \right) = \left. \begin{array}{l} e^{\pm jn\pi} = \\ (e^{\pm jn\pi})^n = (-1)^n \end{array} \right/$$

=
$$\frac{A}{-2n^2\pi^2} \left(-jn\pi 2(-1)^n + 0 \right) = \underline{\underline{\frac{jA(-1)^n}{n\pi}}} ; \underline{n \neq 0}$$

$$\underline{D_0} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \underbrace{e^{-j0\omega_0 t}}_{=1} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A \cdot t dt = \underline{0} \quad \left(\text{Erhålls även direkt från grafen; } D_0 = \text{medelvärdet} \right)$$

dvs.
$$\underline{D_n} = \begin{cases} \frac{jA(-1)^n}{\pi n} ; n \neq 0 \\ 0 ; n = 0 \end{cases} = \begin{cases} j \cdot \frac{A}{\pi n} = \frac{A}{\pi n} e^{j\frac{\pi}{2}} ; \text{ jämna } n > 0 \\ -j \cdot \frac{A}{\pi n} = \frac{A}{\pi n} e^{-j\frac{\pi}{2}} ; \text{ udda } n > 0 \\ D_{-n}^* = |D_n| e^{j\arg D_n} ; \text{ alla } n < 0 \\ 0 ; n = 0 \end{cases}$$

Tex. $D_{-7} = D_7^* = |D_7| \cdot e^{j\arg D_7}$

\hat{D}_0 & \hat{D}_n från (*) ovan \Rightarrow

$$\hat{D}_0 = 2 + D_0 = 2 + 0 = 2 = 2 \cdot e^{j0} \Rightarrow \begin{cases} |\hat{D}_0| = 2 \\ \arg \hat{D}_0 = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

$$n \neq 0 \Rightarrow \hat{D}_n = D_n \cdot e^{jn\frac{\pi}{2}} = \frac{jA(-1)^n}{\pi n} \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}}$$

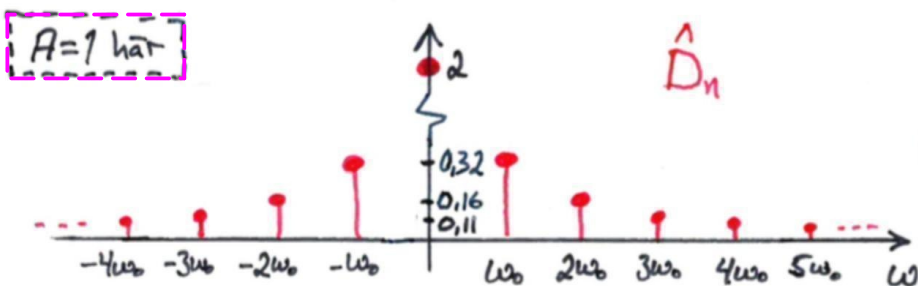
$$= \frac{j = e^{j\frac{\pi}{2}}}{(-1)^n = e^{jn\pi}} = \frac{A}{\pi n} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}(n+1)}$$

$$\Rightarrow |\hat{D}_n| = |D_n| = \frac{A}{\pi \cdot |n|} \quad ; \quad n \neq 0$$

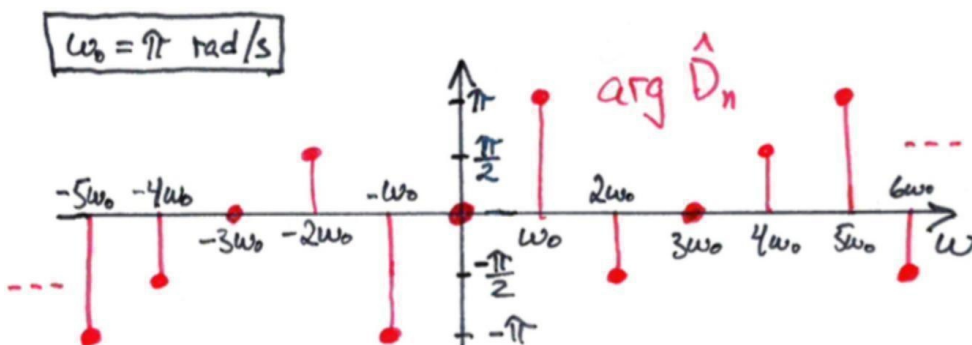
och $\begin{cases} \arg \hat{D}_n = \frac{\pi}{2}(n+1) & \text{d\u00e5 } n > 0 \\ \arg \hat{D}_n = -\arg \hat{D}_n & \text{d\u00e5 } n < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; n = 1, 5, 9, \dots \\ \frac{3\pi}{2}, \text{ dvs. } \frac{-\pi}{2} & ; n = 2, 6, 10, \dots \\ 2\pi, \text{ dvs. } 0 & ; n = 3, 7, 11, \dots \\ \frac{5\pi}{2}, \text{ dvs. } \frac{\pi}{2} & ; n = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$

Dvs. $|\hat{D}_n|$ och $\arg \hat{D}_n$ ovan \u00e4r de dubbelsidiga amplitud- och fasspektrumen som efterfr\u00e4ges i uppgiften.

FREKVENSPEKTRUM F\u00d6R S\u00c4GTANDSV\u00c4GEN/-FUNKTIONEN



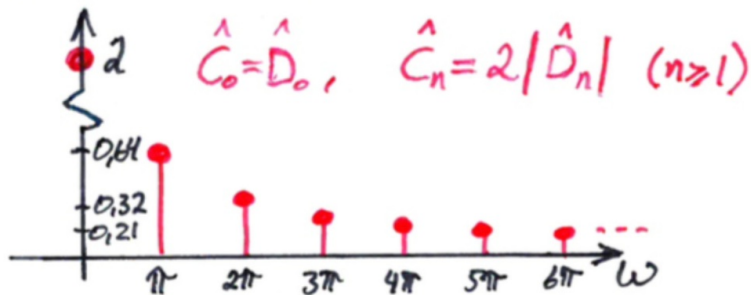
Dubbelsidigt amplitudspektrum



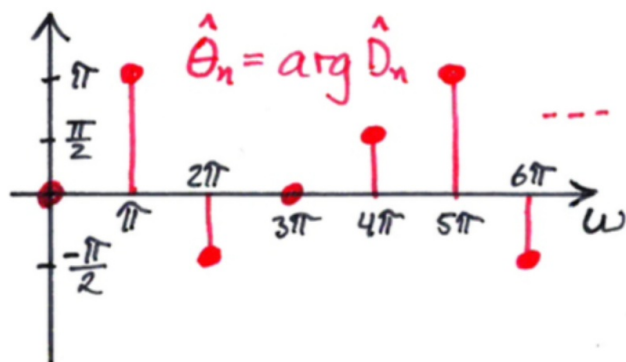
Dubbelsidigt fasspektrum

Enkelsidigt amplitudspektrum & fasspektrum :

$$\begin{cases} \hat{C}_0 = \hat{D}_0 = 2 \\ \hat{C}_n = 2|\hat{D}_n| = \frac{2A}{\pi n} ; n \geq 1 \\ \hat{\Theta}_n = \arg \hat{D}_n ; n \geq 1, \text{ enligt ovan} \end{cases}$$



Enkelsidigt
amplitudspektrum



Enkelsidigt
fasspektrum

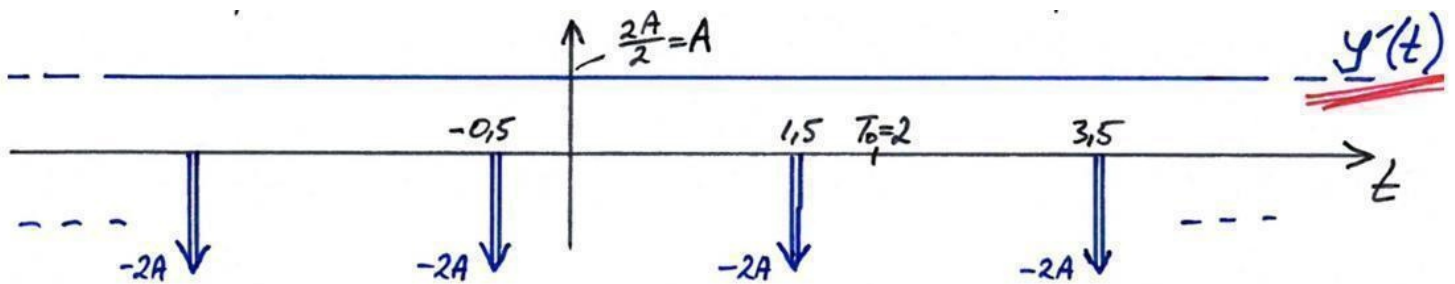
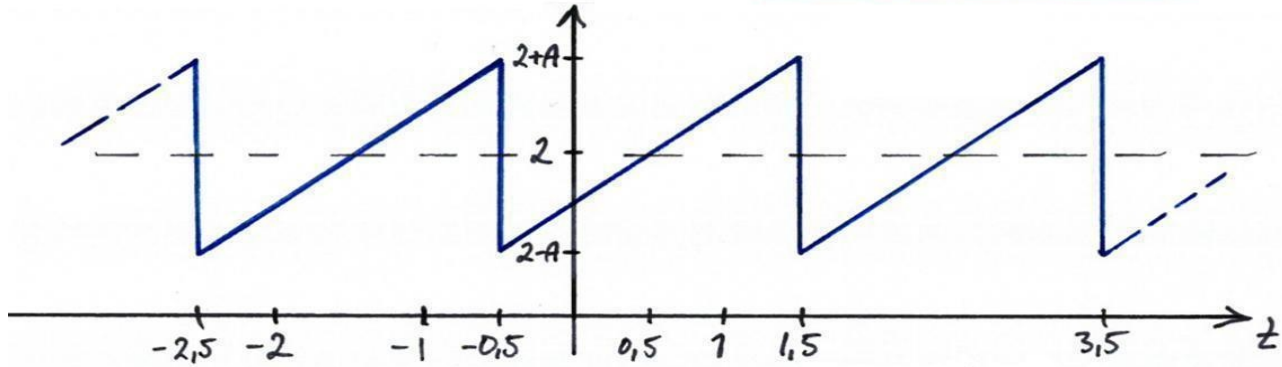
"Läxa": Beräkna själv de komplexa fouriersseriecoefficiënterna nedan, enligt den alternativa metoden!

Alternativ lösning för beräkning av \hat{D}_n baserat på sambandet

$D_n = \frac{D_{nx}}{jn\omega_0}$, där D_n & D_{nx} är de komplexa fouriersseriecoefficiënterna

för $x(t)$ resp. $x'(t)$:

$$\underline{y(t) = 2 + x(t - \frac{1}{2})}$$



Ovanstående metod är lämplig att använda då signalen, för vilken man vill beräkna de komplexa fouriersseriecoefficiënterna för, innehåller diskontinuiteter eller ramper.