TSBB32 Linjära system – Föreläsning 7

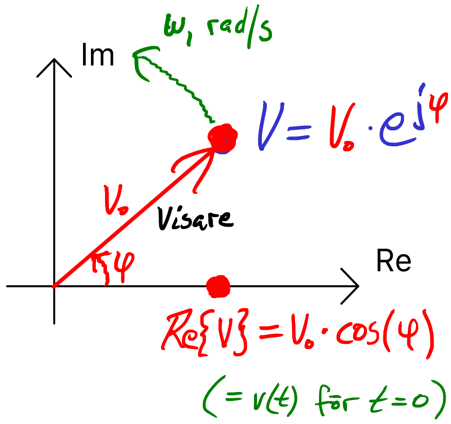
Från föreläsning 5 – Eulers formel: $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$

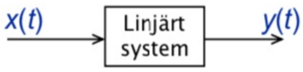
$\Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \mathrm{Re}\{e^{j\alpha}\}$

$\Rightarrow \quad v(t) = V_0 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi) = V_0 \cdot \mathrm{Re}\{e^{j(\omega_1 t + \varphi)}\} = \mathrm{Re}\{V \cdot e^{j\omega_1 t}\}$

där $V = V_0 \cdot e^{j\varphi}$ är den komplexa amplituden till $e^{j\omega_1 t}$

Grafisk beskrivning av v(t) – visardiagram:





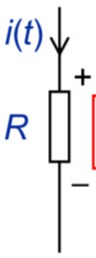
Samband, ström-spänning, för elektriska nätelement vid (co)sinusformade strömmar och spänningar

$$v(t) = V_0 \cos(\omega_1 t + \varphi) = \mathrm{Re}\{V \cdot e^{j\omega_1 t}\}, \qquad \text{där } V = V_0 \cdot e^{j\varphi}$$

$$i(t) = I_0 \cos(\omega_1 t + \alpha) = \mathrm{Re}\{I \cdot e^{j\omega_1 t}\}, \qquad \text{där } I = I_0 \cdot e^{j\alpha}$$

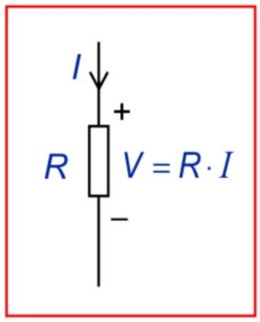
(Vinkelfrekvensen ω_1 är här en *konstant*, inte en variabel)

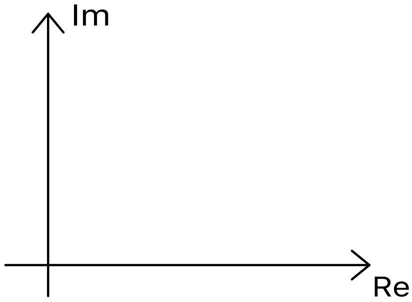
R



$\boxed{v(t) = R \cdot i(t)}$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\{V \cdot e^{j\omega_1 t}\} = \mathrm{Re}\{R \cdot I \cdot e^{j\omega_1 t}\} \quad \Rightarrow$



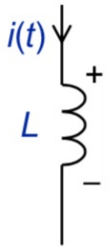


Samband, ström-spänning, för elektriska nätelement vid (co)sinusformade strömmar och spänningar

$v(t) = V_0 \cos(\omega_1 t + \varphi) = \text{Re}\{V \cdot e^{j\omega_1 t}\}$, där $V = V_0 \cdot e^{j\varphi}$

$i(t) = I_0 \cos(\omega_1 t + \alpha) = \text{Re}\{I \cdot e^{j\omega_1 t}\}$, där $I = I_0 \cdot e^{j\alpha}$

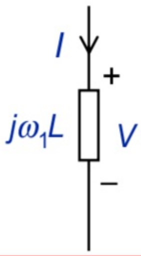
L



$$\boxed{v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}}$$

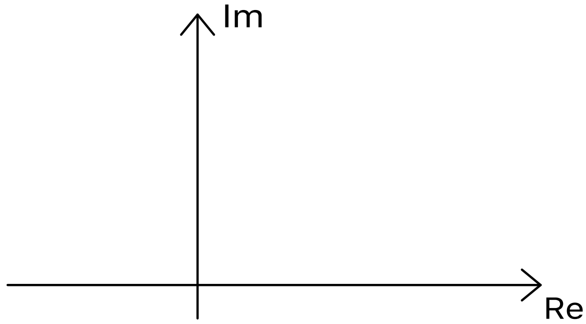
$$\Rightarrow \text{Re}\{V \cdot e^{j\omega_1 t}\} = L \cdot \frac{d\left(\text{Re}\{I \cdot e^{j\omega_1 t}\}\right)}{dt}$$

$$= \text{Re}\left\{L \cdot I \cdot \frac{d\left(e^{j\omega_1 t}\right)}{dt}\right\} = \text{Re}\{j\omega_1 L \cdot I \cdot e^{j\omega_1 t}\}$$



$V = j\omega_1 L \cdot I$

$\Leftarrow$

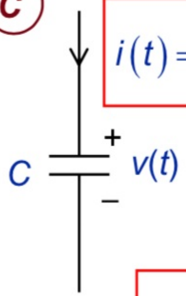


Samband, ström-spänning, för elektriska nätelement vid (co)sinusformade strömmar och spänningar

$v(t)=V_0\cos(\omega_1 t+\varphi)=\mathrm{Re}\{V\cdot e^{j\omega_1 t}\}$, där $\underline{V=V_0\cdot e^{j\varphi}}$

$i(t)=I_0\cos(\omega_1 t+\alpha)=\mathrm{Re}\{I\cdot e^{j\omega_1 t}\}$, där $\underline{I=I_0\cdot e^{j\alpha}}$

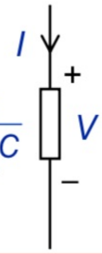
C



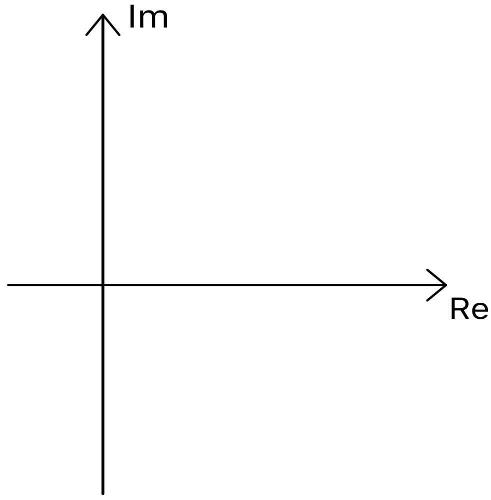
$$\boxed{i(t)=C\cdot\frac{dv(t)}{dt}}$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{Re}\{\underline{I}\cdot e^{j\omega_1 t}\}=C\cdot\frac{d\left(\mathrm{Re}\{V\cdot e^{j\omega_1 t}\}\right)}{dt}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{C\cdot V\cdot\frac{d\left(e^{j\omega_1 t}\right)}{dt}\right\}=\mathrm{Re}\{\underline{j\omega_1 C}\cdot V\cdot e^{j\omega_1 t}\}$$

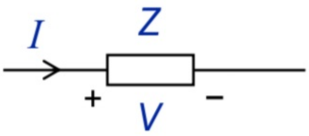


$$\frac{1}{j\omega_1 C}\qquad V=\frac{1}{j\omega_1 C}\cdot I\qquad\Leftarrow$$



Elektriska kretsar med (co)sinusformade källor

Sammanfattningsvis gäller alltså följande:



Ohms lag:

$$\boxed{V = Z \cdot I}$$

V är en *komplexvärd* spänning,
I är en *komplexvärd* ström

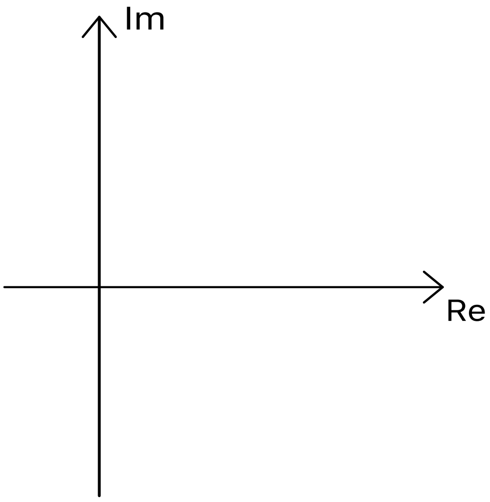
Nätelement		**Impedans, Z**
Resistans R	$\Rightarrow$	$Z_R = R$
Induktans L	$\Rightarrow$	$Z_L = j\omega_1 L$
Kapacitans C	$\Rightarrow$	$Z_C = \dfrac{1}{j\omega_1 C}$

Tolkning: Den elektriska kretsen görs om till ett **komplexschema**, med **komplexvärda signaler** och **komplexvärda impedanser.** Impedanserna betraktas som komplexvärda ”resistanser”!

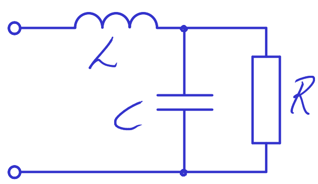
$\Rightarrow$ **Oftast mycket enklare beräkningar!** $\Rightarrow$ $\boxed{\text{"}j\omega\text{-metoden"}}$

OBS: I $j\omega$-metoden brukar man oftast skriva ω i stället för ω_1
Det gör vi också från och med nu, men kom ihåg att ω är en konstant!

Komplexa impedanser

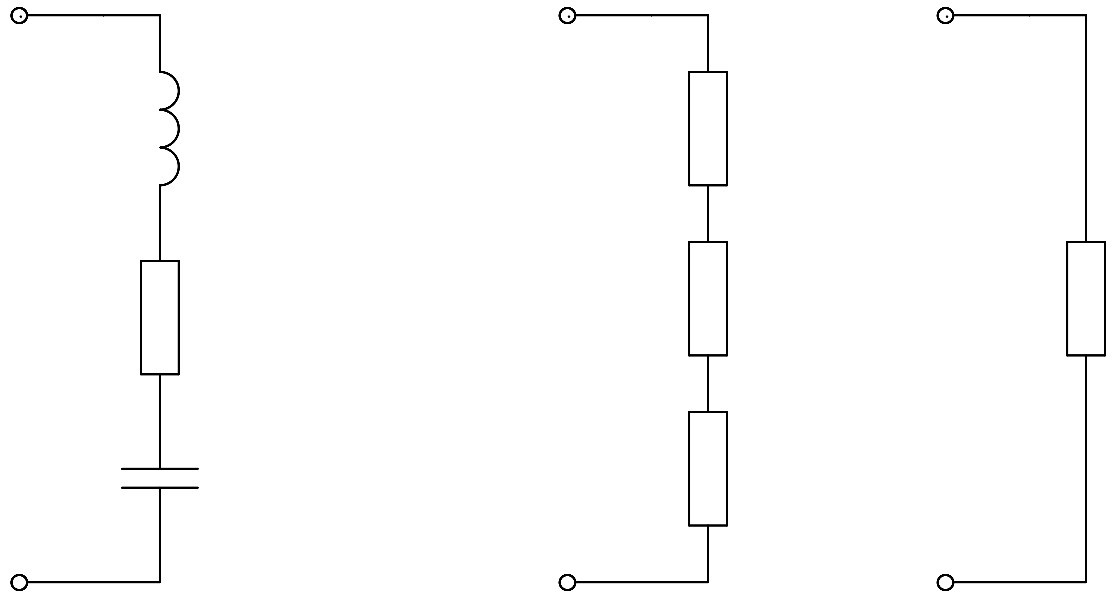


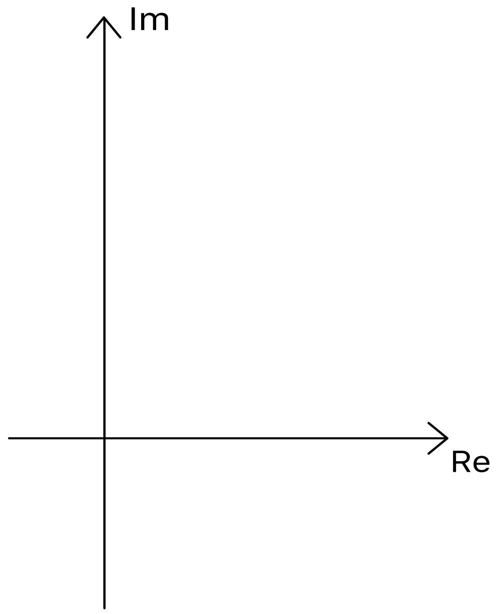
Impedansegenskaper

	$\omega \to 0$, motsvarar	$\omega \to \infty$, motsvarar
$Z_R = R$		
$Z_L = j\omega L$		
$Z_C = \dfrac{1}{j\omega C}$		
		

Exempel 1:

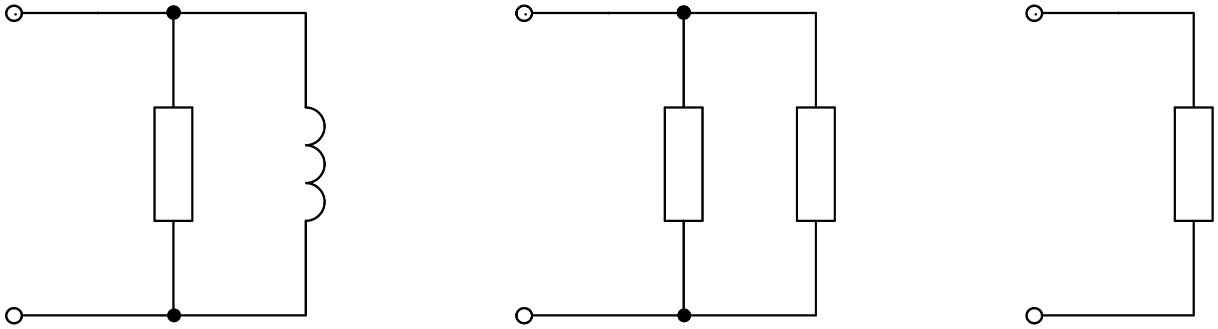
Komplexschema

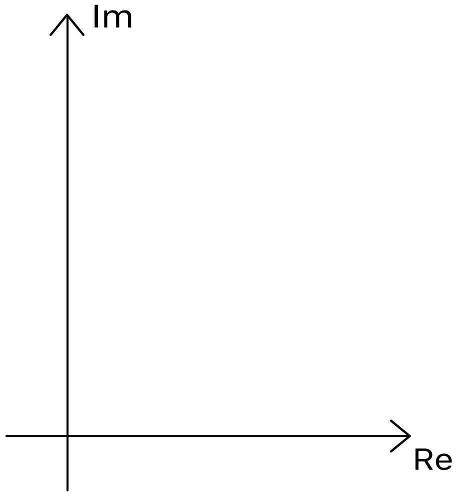




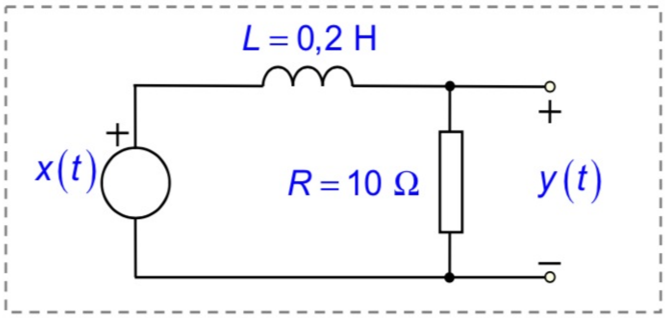
Exempel 2:

Komplexschema





Exempel – beräkning med $j\omega$-metoden



a) Beräkna den komplexa spänningen Y som funktion av den komplexa spänningen X och vinkelfrekvensen ω.

b) Beräkna spänningen $y(t)$ då $x(t) = 4\cos\left(50t + \frac{\pi}{3}\right)$ [V].

Beräkningar $\Rightarrow$

$$\boxed{Y = X \cdot \frac{50}{50 + j\omega} \quad [\mathrm{V}]}$$

$$\boxed{y(t) = 2\sqrt{2}\cos\left(50t + \frac{\pi}{12}\right) \quad [\mathrm{V}]}$$

Lösning: