TSBB32 Linjära system – Föreläsning 7

Från föreläsning 5 – Eulers formel: $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$

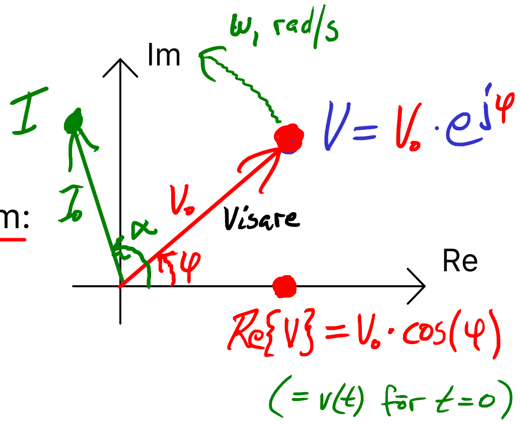
$\Rightarrow \cos(\alpha) = \mathrm{Re}\{e^{j\alpha}\}$

$\Rightarrow v(t) = V_0 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi) = V_0 \cdot \mathrm{Re}\{e^{j(\omega_1 t + \varphi)}\} = \mathrm{Re}\{V \cdot e^{j\omega_1 t}\}$

där $V = V_0 \cdot e^{j\varphi}$ är den komplexa amplituden till $e^{j\omega_1 t}$

$i(t) = I_0 \cos(\omega_1 t + \alpha) \Longleftrightarrow I = I_0 \cdot e^{j\alpha}$

Grafisk beskrivning av v(t) – visardiagram:

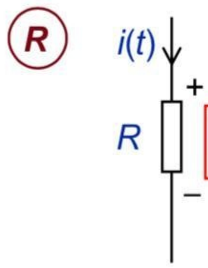


Samband, ström-spänning, för elektriska nätelement vid (co)sinusformade strömmar och spänningar

$$v(t) = V_0 \cos(\omega_1 t + \varphi) = \mathrm{Re}\{V \cdot e^{j\omega_1 t}\}, \qquad \text{där } V = V_0 \cdot e^{j\varphi}$$

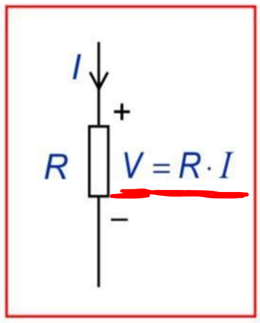
$$i(t) = I_0 \cos(\omega_1 t + \alpha) = \mathrm{Re}\{I \cdot e^{j\omega_1 t}\}, \qquad \text{där } I = I_0 \cdot e^{j\alpha}$$

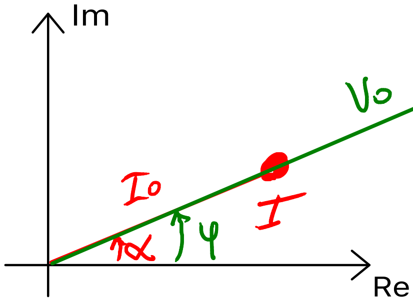
(Vinkelfrekvensen ω_1 är här en *konstant,* inte en variabel)



$$\boxed{v(t) = R \cdot i(t)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\{V \cdot e^{j\omega_1 t}\} = \mathrm{Re}\{R \cdot I \cdot e^{j\omega_1 t}\} \quad \Rightarrow$$





$V = R \cdot I = \underbrace{R \cdot I_0}_{V_0} \cdot \underbrace{e^{j\alpha}}_{\varphi = \alpha}$

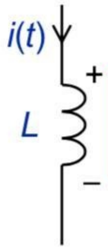
Spänningen ligger i fas med strömmen

Samband, ström-spänning, för elektriska nätelement vid (co)sinusformade strömmar och spänningar

$v(t)=V_0\cos(\omega_1 t+\varphi)=\mathrm{Re}\{V\cdot e^{j\omega_1 t}\}$, där $\underline{V=V_0\cdot e^{j\varphi}}$ | $i(t)=I_0\cos(\omega_1 t+\alpha)=\mathrm{Re}\{I\cdot e^{j\omega_1 t}\}$, där $\underline{I=I_0\cdot e^{j\alpha}}$

L

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{Re}\{\ \}\right)=\mathrm{Re}\left\{\frac{d}{dt}(\ )\right\}$$



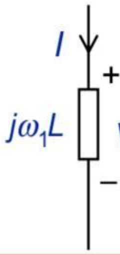
$$\boxed{v(t)=L\cdot\frac{di(t)}{dt}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\{\underline{V}\cdot e^{j\omega_1 t}\}=L\cdot\frac{d\left(\mathrm{Re}\{I\cdot e^{j\omega_1 t}\}\right)}{dt}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{L\cdot I\cdot\frac{d\left(e^{j\omega_1 t}\right)}{dt}\right\}=\mathrm{Re}\{\underline{j\omega_1 L\cdot I}\cdot e^{j\omega_1 t}\}$$

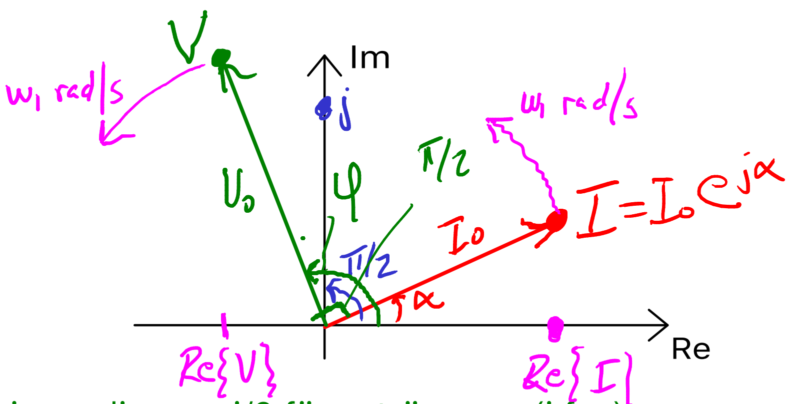
$$\frac{d}{dt}\left(e^{a t}\right)=a\cdot e^{a t}$$

Här: $a=j\omega_1$



$$\underline{V=j\omega_1 L\cdot I}\qquad\Leftarrow$$

$$V=j\omega_1 L\cdot I=\Big/\,j=e^{j\frac{\pi}{2}}\,\Big/=\underbrace{\omega_1 L\cdot I_0}_{V_0}\cdot e^{j\underbrace{\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}_{=\varphi=\alpha+\frac{\pi}{2}}}=V_0\cdot e^{j\varphi}$$



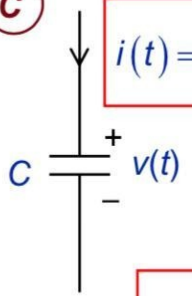
Spänningen ligger pi/2 före strömmen (i fas)

Samband, ström-spänning, för elektriska nätelement vid (co)sinusformade strömmar och spänningar

$v(t) = V_0 \cos(\omega_1 t + \varphi) = \mathrm{Re}\{V \cdot e^{j\omega_1 t}\}$, där $\underline{V = V_0 \cdot e^{j\varphi}}$ | $i(t) = I_0 \cos(\omega_1 t + \alpha) = \mathrm{Re}\{I \cdot e^{j\omega_1 t}\}$, där $\underline{I = I_0 \cdot e^{j\alpha}}$

kontant

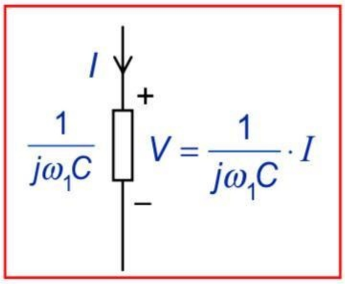
C



$$\boxed{i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}}$$

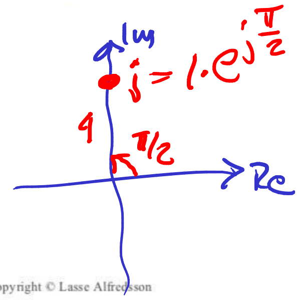
$$\Rightarrow \mathrm{Re}\{\underline{I} \cdot e^{j\omega_1 t}\} = C \cdot \frac{d\left(\mathrm{Re}\{V \cdot e^{j\omega_1 t}\}\right)}{dt}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{C \cdot V \cdot \frac{d\left(e^{j\omega_1 t}\right)}{dt}\right\} = \mathrm{Re}\{\underline{j\omega_1 C \cdot V} \cdot e^{j\omega_1 t}\}$$

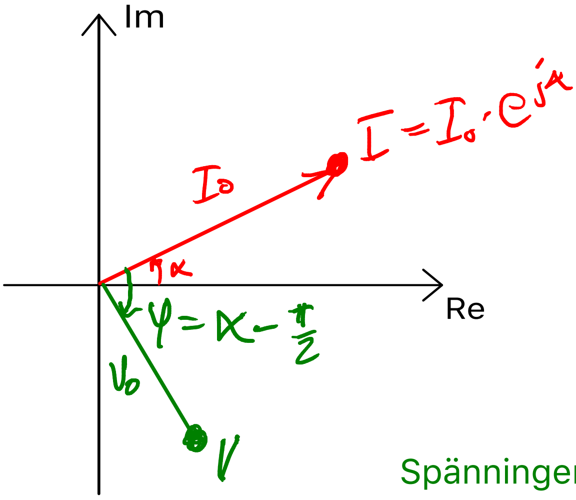


$$V = \frac{1}{j\omega_1 C} \cdot I$$

$\Leftarrow$



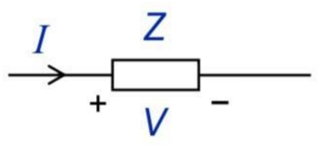
$$V = \frac{1}{j\omega_1 C} \cdot I = \Big/ \frac{1}{j} = \frac{1}{e^{j\pi/2}} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \Big/ = \underbrace{\frac{1}{\omega_1 C} \cdot I_0}_{} \cdot e^{j\underbrace{(\alpha - \frac{\pi}{2})}_{}} = V_0 \cdot e^{j\varphi}$$



Spänningen ligger pi/2 efter strömmen

Elektriska kretsar med (co)sinusformade källor

Sammanfattningsvis gäller alltså följande:



Ohms lag:

$\boxed{V = Z \cdot I}$

V är en *komplexvärd* spänning,
I är en *komplexvärd* ström

Komplexvärd "resistans"

Nätelement		**Impedans, Z**
Resistans R	$\Rightarrow$	$Z_R = R$
Induktans L	$\Rightarrow$	$Z_L = j\omega_1 L$
Kapacitans C	$\Rightarrow$	$Z_C = \frac{1}{j\omega_1 C} \cdot \frac{j}{j} = -j\frac{1}{\omega_1 C}$

$j^2 = -1$

Tolkning: Den elektriska kretsen görs om till ett **komplexschema**, med **komplexvärda signaler** och **komplexvärda impedanser.** Impedanserna betraktas som komplexvärda "resistanser"!

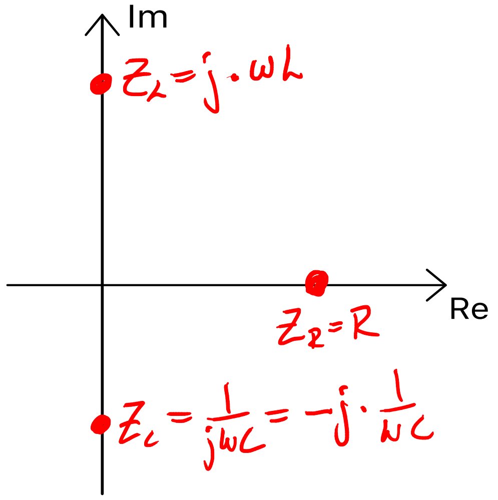
$\Rightarrow$ **Oftast mycket enklare beräkningar!** $\Rightarrow$ $\boxed{\text{"}j\omega\text{-metoden"}}$

$e(t) = E_0 \cdot \cos(\omega_1 t + \beta) \equiv$ $E = E_0 \cdot e^{j\beta}$

OBS: I $j\omega$-metoden brukar man oftast skriva ω i stället för ω_1
Det gör vi också från och med nu, men kom ihåg att ω är en konstant!

Komplexa impedanser

$A \cdot \cos(\omega t) \overset{\omega=0}{=} A$



$Z_L = j \cdot \omega L$

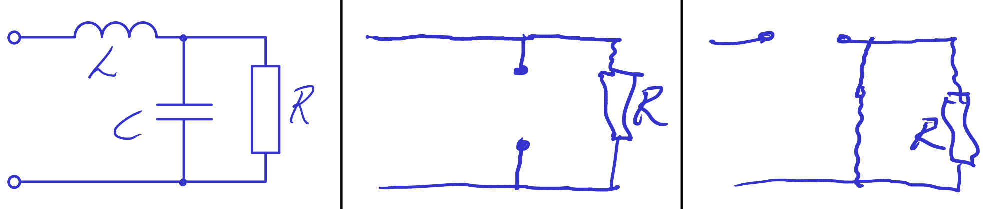
$Z_R = R$

$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \cdot \frac{1}{\omega C}$

Impedansegenskaper

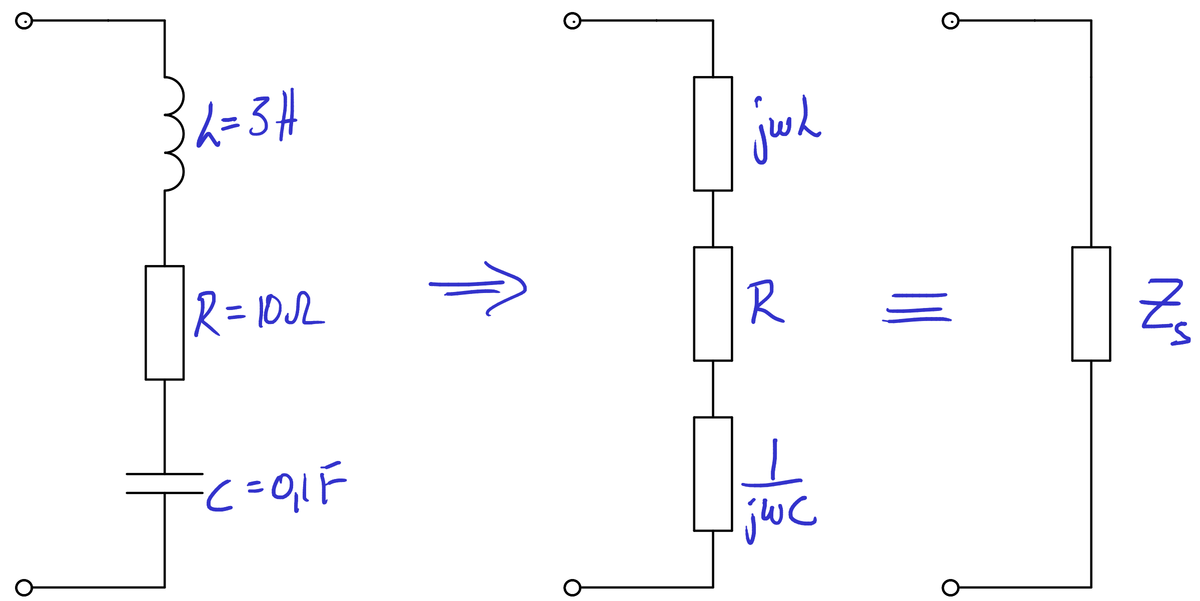
(Likströmsnät)

	$\omega \to 0$, motsvarar	$\omega \to \infty$, motsvarar
$Z_R = R$	R	R
$Z_L = j\omega L$	$j \cdot 0$, kortslutning	$\to j\infty$, avbrott
$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$	$\to -j\infty$, avbrott	$\to -j0$, kortslutning



Exempel 1:

Komplexschema

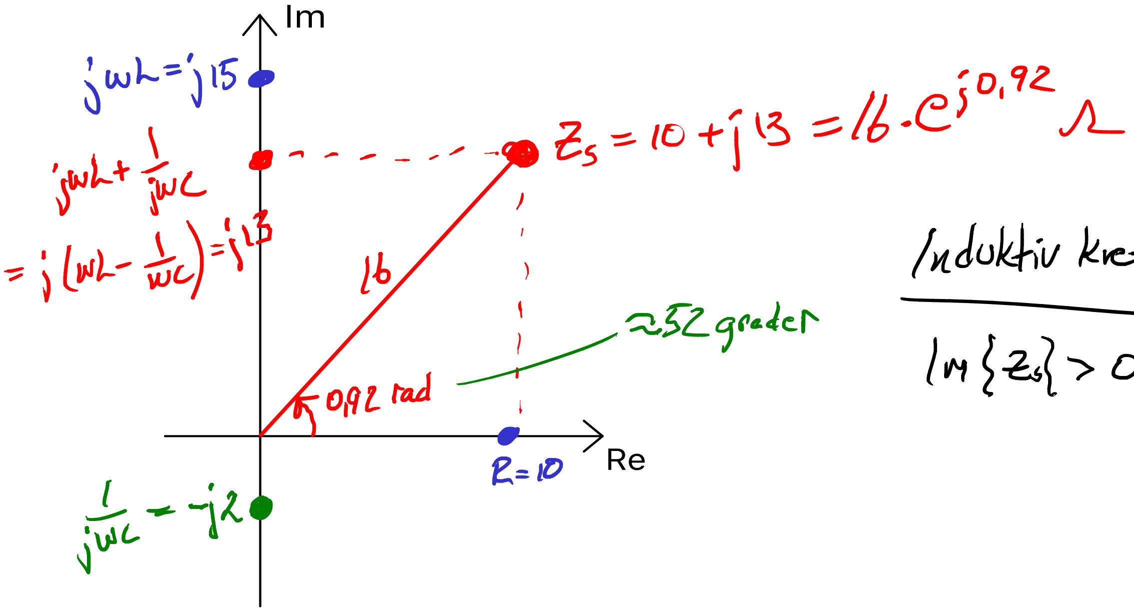


$$Z_s = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

T.ex. $\omega = 5$ rad/s

$$\Rightarrow \underline{Z_s} = 10 + j\left(5\cdot 3 - \underbrace{\frac{1}{5\cdot 0{,}1}}_{\frac{10}{5}=2}\right) = 10 + j13 = \sqrt{10^2+13^2}\, e^{j\arctan\frac{13}{10}}$$

$$\approx \underline{16\cdot e^{j0{,}92}\ \Omega}$$

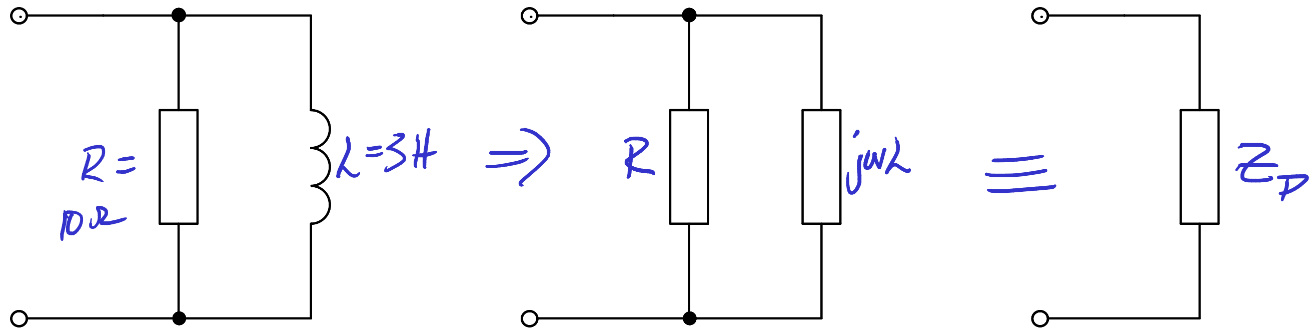


Induktiv krets

$Im\{Z_s\} > 0$

Exempel 2:

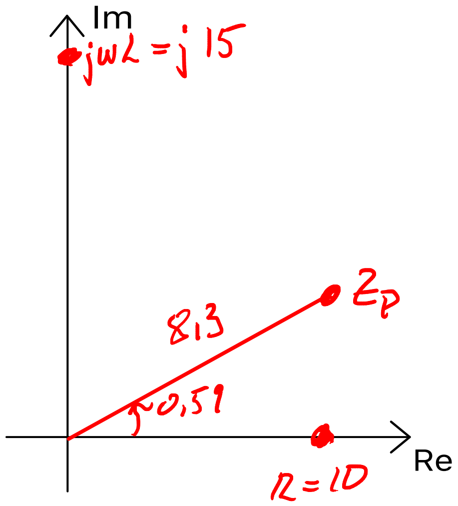
Komplexschema



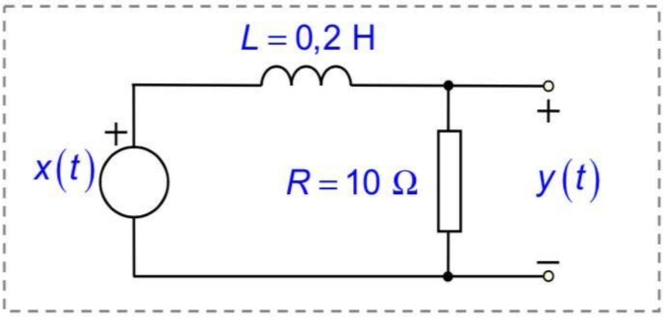
$$Z_p = R \,/\!/\, j\omega L = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = /\text{t.ex. } \omega = 5 \text{ rad/s}/$$

$$= \frac{10 \cdot j5 \cdot 3}{10 + j5 \cdot 3} = \frac{j150}{10 + j15} = \frac{150 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{10^2 + 15^2}\, e^{j \arctan \frac{15}{10}}}$$

$$= \frac{150}{\sqrt{325}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{3}{2}\right)} \approx 8{,}3 \cdot e^{j0{,}59}$$



Exempel – beräkning med $j\omega$-metoden



a) Beräkna den komplexa spänningen Y som funktion av den komplexa spänningen X och vinkelfrekvensen ω.

b) Beräkna spänningen $y(t)$ då $x(t) = 4\cos\left(50t + \frac{\pi}{3}\right)$ [V].

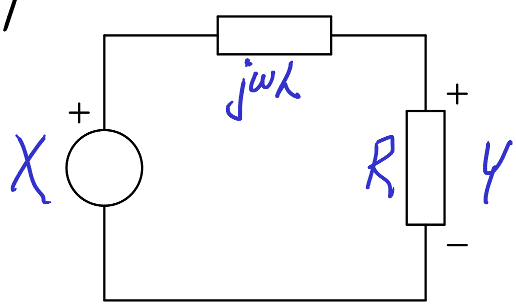
Beräkningar $\Rightarrow$

$$\boxed{Y = X \cdot \frac{50}{50 + j\omega} \quad [\text{V}]} \quad a)$$

$$\boxed{y(t) = 2\sqrt{2}\cos\left(50t + \frac{\pi}{12}\right) \quad [\text{V}]} \quad b)$$

Lösning: Sinusformad inspänning/spänningskälla => Använd jw-metoden!

a) Komplexschema:



$X = 4 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$, $\omega = \omega_1 = 50$ rad/s

$L = 0{,}2$ H $\quad R = 10\,\Omega$

Spänningsdelning $\Rightarrow$ $Y = X \cdot \frac{R}{R + j\omega L} = X \cdot \frac{10}{10 + j\underset{\omega}{\cancel{50}} \cdot 0{,}2} \cdot \frac{5}{5}$

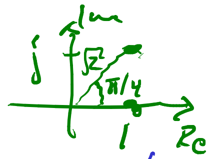
$$= \underbrace{X \cdot \frac{50}{50 + j\omega}}_{:= H(\omega)} \quad [\text{V}]$$

$:= H(\omega)$ = frekvensbeskrivn. av systemet

$\omega = 2\pi f$

$H(f) = \frac{50}{50 + j2\pi f}$

b) $y(t) = ?$ $\quad (\omega = \omega_1 = 50\ \text{rad/s})$



$$Y = X \cdot \frac{50}{50 + j50} = 4 \cdot e^{j\pi/3} \cdot \frac{1}{1+j} = \Big(1+j = \sqrt{2} \cdot e^{j\pi/4} \Big)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{12}} = Y_0 \cdot e^{j\beta}$$

$$\Rightarrow y(t) = Y_0 \cdot \cos(\omega_1 t + \beta) = 2\sqrt{2} \cos\left(50t + \frac{\pi}{12}\right)$$

$$H(\omega) = \frac{50}{50 + j\omega} \quad (\text{Frekvensfunktion}) \qquad Y = X \cdot H(\omega)$$

$$|H(\omega)| = \left| \frac{50}{50 + j\omega} \right| = \frac{50}{\sqrt{50^2 + \omega^2}}$$

$$H(50) = \frac{1}{1+j}$$

$$|H(50)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$