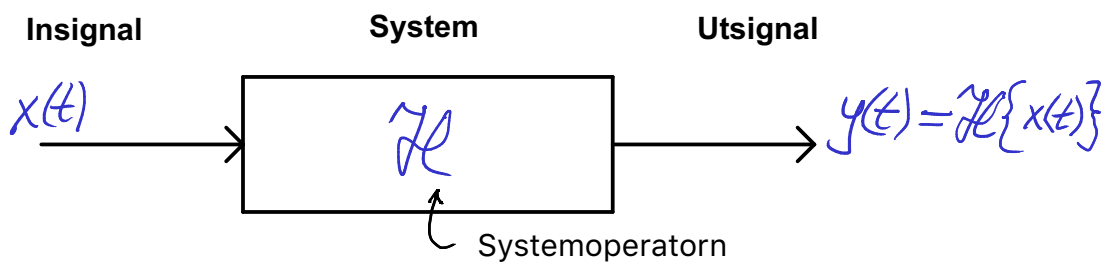


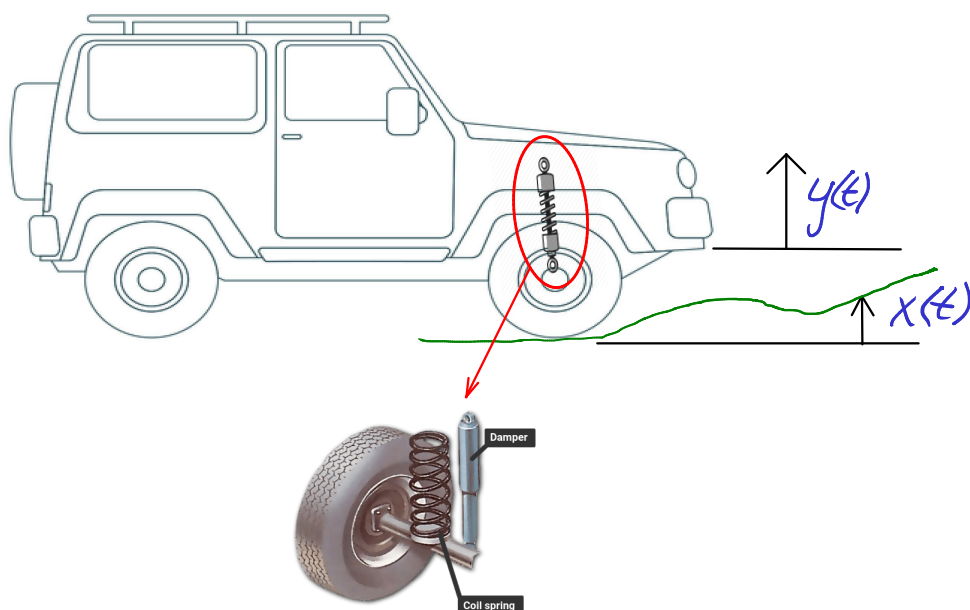
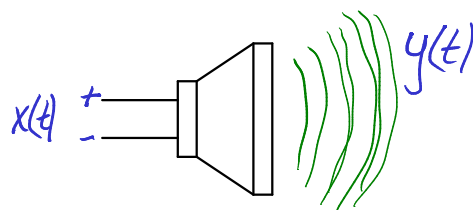
Linjära System – Föreläsning 8: Inledning, signal- och systemegenskaper



Ett SYSTEM = en matematisk modell av ett fysikaliskt system (alt. en algoritm) som för olika insignaler x genererar olika utsignaler y

En SIGNAL = en informationsbärande matematisk funktion som representerar en (ofta mätbar) fysikalisk storhet.

Exempel:



SIGNALOPERATIONER

SYSTEM
 $x(t) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$
 Systemoperator \mathcal{H}

Tidsskiftning:
 $y_1(t) = x(t+2)$
 $y_2(t) = x(t-2)$

Spegling:
 $y_3(t) = x(-t)$

Tidsskalning:
 $y_4(t) = x(2t)$
 $y_5(t) = x(\frac{t}{4})$

EX:
 $y_6(t) = x(-3t+2)$
 $x_1(t) = x(-t)$
 $x_2(t) = x(-t+2) = x(-(t-2)) = x_1(t-2)$

$y_6(t) = x(-3t+2) = x(-(3t)+2) = x_2(3t)$

SIGNAL TYPER

Tidskontinuerlig signal
 $x(t)$

Energisignal
 Har ändlig signalenergi
 $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

Tidsdiskret signal
 $x[n] = x(nT)$
 $P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$

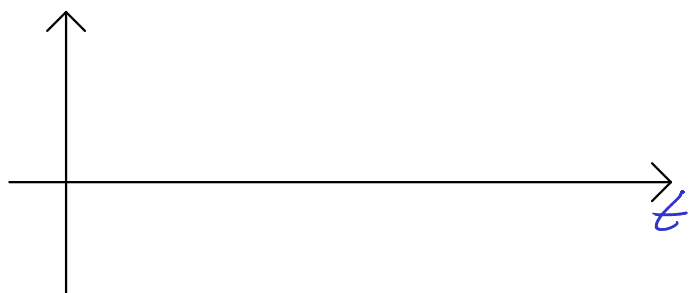
Effekt signal
 Har ändlig effekt signal
 $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$

(T₀-)Periodisk signal
 Grundperioden
 $x(t) = x(t+T_0)$

Kausal signal: $x(t) = 0 ; t < 0$

Stationär signal

Transient signal



SIGNALMODELLER - DE VIKTIGASTE

Enhetssteget $u(t) = \begin{cases} 1; t > 0 \\ 0; t < 0 \end{cases}$



Används ofta

- 1) Vid studie av systemets stegsvar $g(t)$
- 2) Vid definition av signaler i olika tidsintervall,

$$x(t) = 2(u(t+3) - u(t+1)) + e^{-t}u(t)$$



Annars def: $u_0(t) = \begin{cases} 1; t > 0 \\ 0; t < 0 \end{cases}$; $u_0(-t) = \begin{cases} 1; t < 0 \\ 0; t > 0 \end{cases}$

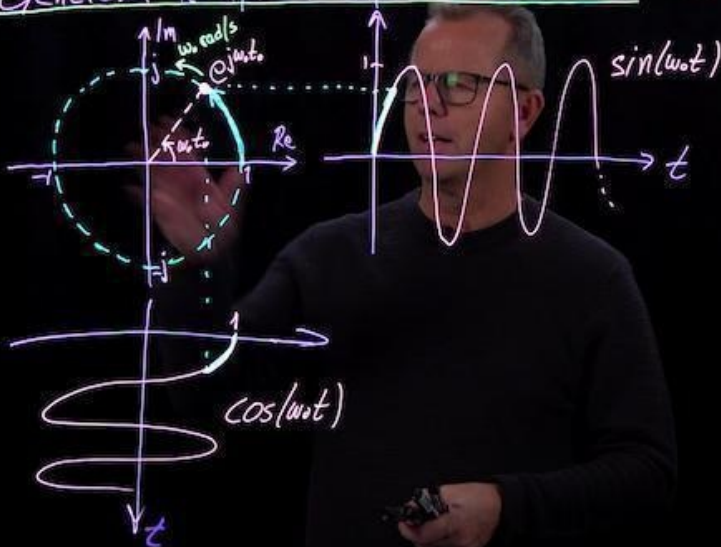


$$x(t) = \begin{cases} e^t u_0(-t) & t < 0 \\ e^{-t} u(t) & t > 0 \end{cases}$$



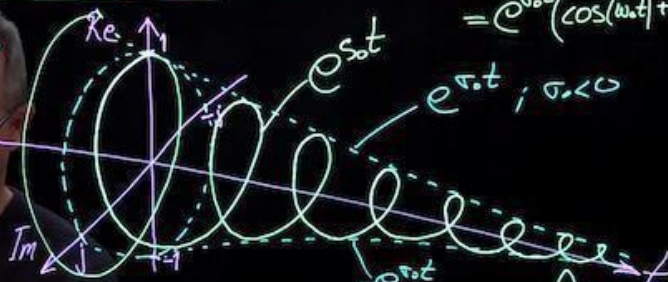
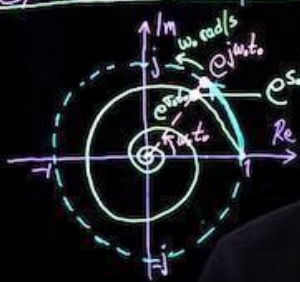
SIGNALMODELLER - DE VIKTIGASTE

Generella komplexa exponentialfunktioner $e^{s_0 t} = \frac{1}{s_0 = \sigma_0 + j\omega_0} = e^{\sigma_0 t} \cdot e^{j\omega_0 t} = e^{\sigma_0 t} (\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t))$



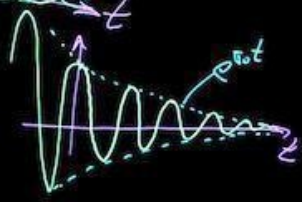
SIGNALMODELLER - DE VIKTIGASTE

Generella komplexa exponentialfunktioner $e^{s_0 t} = /s_0 = \sigma_0 + j\omega_0/ = e^{\sigma_0 t} \cdot e^{j\omega_0 t}$
 $= e^{\sigma_0 t} (\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t))$



$s_0 = 0 \Rightarrow K \cdot e^{s_0 t} = K$

$\text{Re}\{e^{s_0 t}\} = \frac{e^{\sigma_0 t} \cdot \cos(\omega_0 t)}{}$



$\omega_0 = 0 \Rightarrow e^{s_0 t} = e^{\sigma_0 t}$

$= /s_0 = 0/ = \cos(\omega_0 t)$

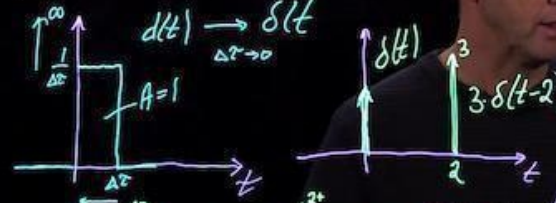


SIGNALMODELLER - DE VIKTIGASTE

Diracimpulsen $\delta(t)$

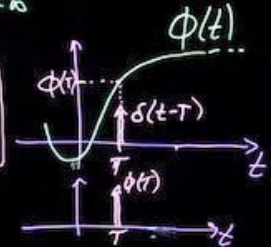
Paul Diracs egen definition: $\begin{cases} \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$

Gränsvärdestolkning:



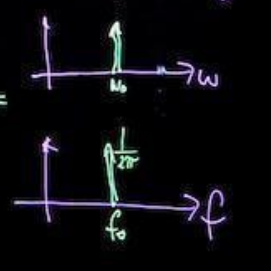
Diracs definition

$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t-\tau) dt = \phi(\tau)$
 $= \phi(\tau) \cdot \delta(t-\tau)$



Annor viktig egenskap:

$\delta(a \cdot t) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$
 $\delta(\omega - \omega_0) = \delta(2\pi(f - f_0)) = \frac{1}{2\pi} \delta(f - f_0)$



$\int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(t-2) dt = 3 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) dt = 3 \cdot 1 = 3$

$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \Rightarrow \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$

Exempel:

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$

SYSTEMEGENSKAPER

(\mathcal{L} = systemoperatorn)

LINJÄRITET



Låt $x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$, a, b, \mathbb{R}

Systemet är linjärt om $y(t) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$

Alt. formulering: $\mathcal{L}\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = a \cdot \mathcal{L}\{x_1(t)\} + b \cdot \mathcal{L}\{x_2(t)\}$

linjärt \Rightarrow Homogent: $\mathcal{L}\{a \cdot x(t)\} = a \cdot \mathcal{L}\{x(t)\}$

Additivitet: $\mathcal{L}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{L}\{x_1(t)\} + \mathcal{L}\{x_2(t)\}$

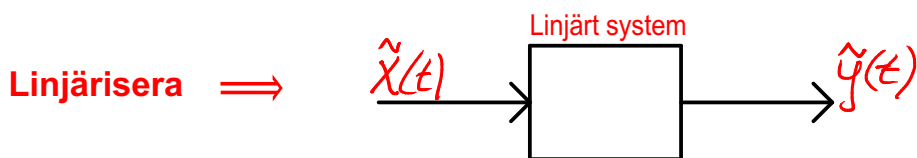
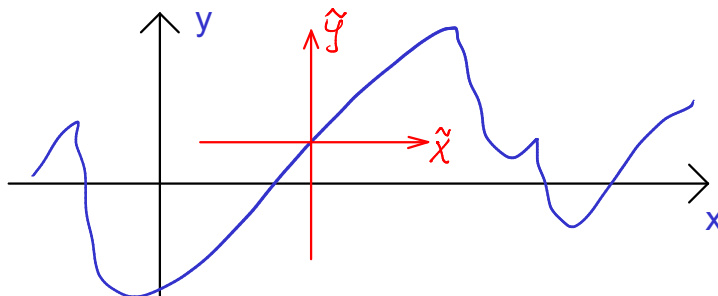
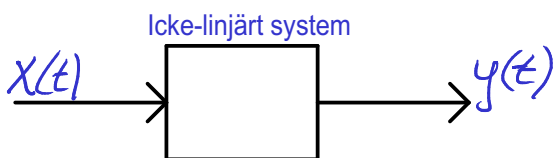
Annars är systemet icke-linjärt

Viktig linjäritetskonsekvens:

Om $x(t) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$

Anv. vid motbevis

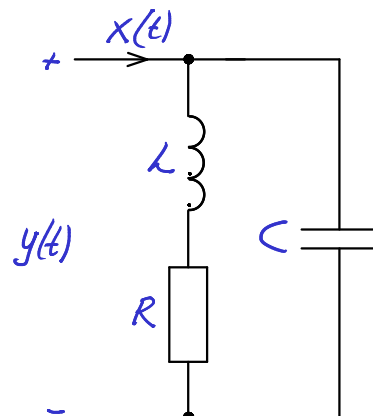
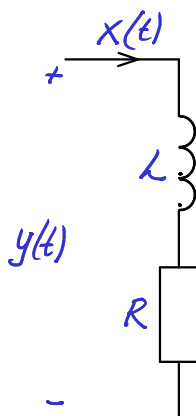
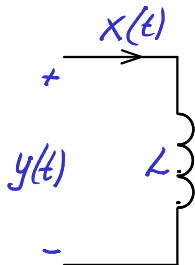
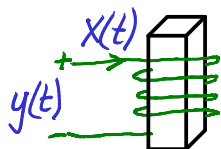
De flesta fysikaliska system är inte linjära.



Exempel – fysikaliskt system med olika linjära modeller:

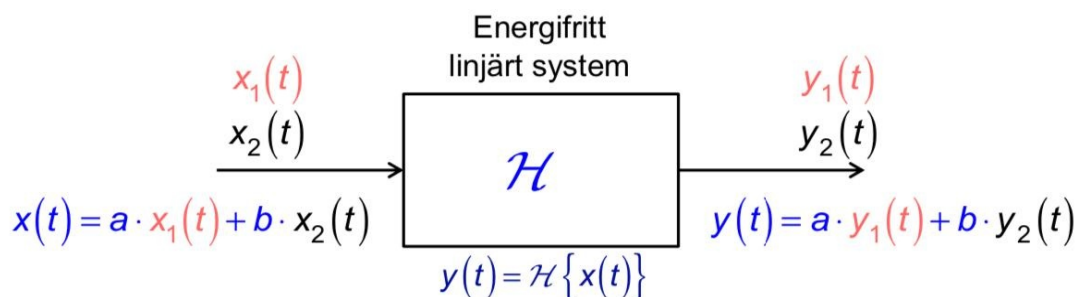
Spole

Olika linjära modeller



Metod för att testa linjäritet

- 1) **Antag** att insignalerna $x_n(t)$ ger motsvarande ut signaler $y_n(t) = \mathcal{H}\{x_n(t)\}$ och låt $x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$, där $a, b \in \mathbb{R}$

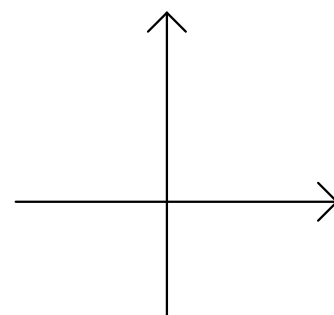


- 2) **Om** $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \dots$ / kan omformas till: $\dots = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$ så är systemet **linjärt**
-

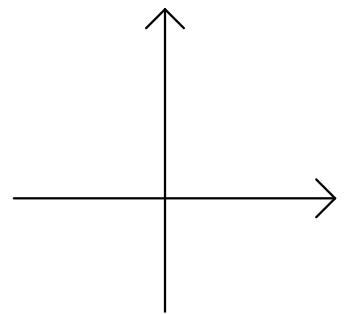
Exempel:

① $y(t) = t \cdot x(t-4)$ $\Rightarrow y_n(t) = t \cdot x_n(t-4)$

② $y(t) = 5x(t) + 3$ $\Rightarrow y_n(t) = 5x_n(t) + 3$



$$\textcircled{3} \quad \underline{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3 \frac{dx(t)}{dt}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_n(t)}{dt} + 2y_n(t) = 3 \frac{dx_n(t)}{dt}$$
$$(y_n' + 2y_n = 3x_n') \quad *$$



SYSTEMEGENSKAPER

(\mathcal{A} = systemoperatorn)

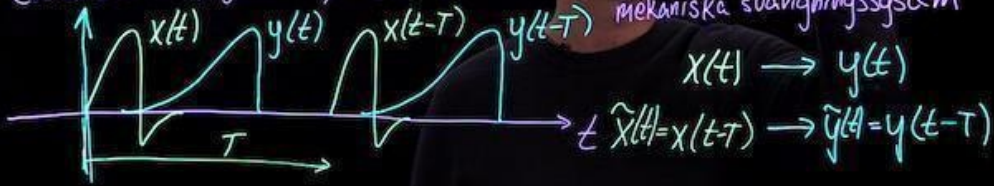
Tidsinvarians



LTI-system

Systemparametrarna för ett tidsinvariant system är konstanta
 T.ex. R, L, C för elektriska nät/system, dämpn.konstant & fjäderkonstant hos mekaniska svängningssystem

Konsekvens:



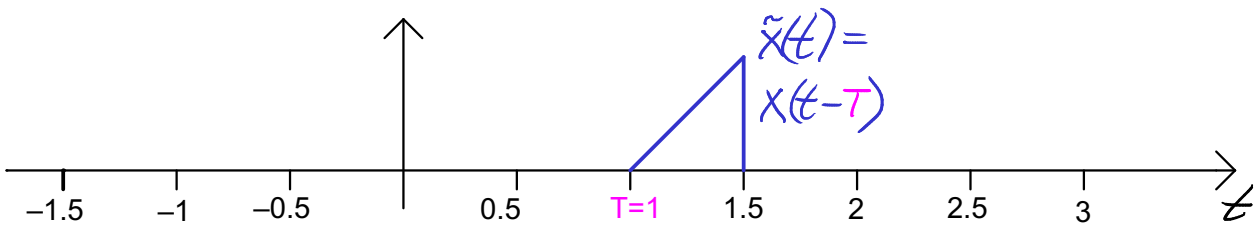
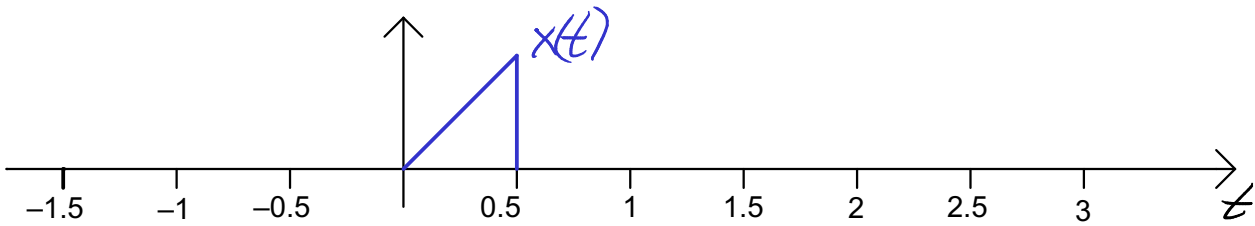
Testmetod:

$$y(t) = X(2-t) \quad \textcircled{1} \quad \text{Låt } \tilde{x}(t) = X(t-T) \quad \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow \tilde{y}(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \tilde{x}(2-t) \stackrel{\textcircled{2}}{=} X(2-t-T) = X(2-(t+T)) \stackrel{\textcircled{1}}{=} y(t+T) \neq y(t-T)$$

\Rightarrow Systemet är tidsvariant (tidsvariabelt)

Grafisk illustration av föreläsningsexemplet



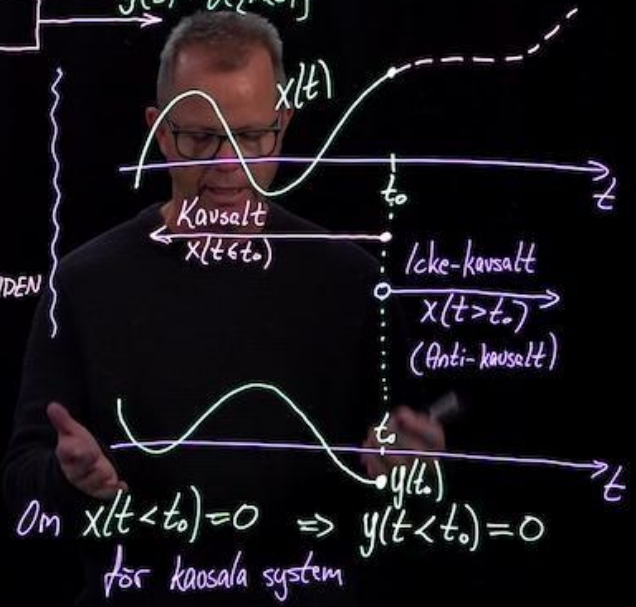
SYSTEMEGENSKAPER (\mathcal{A} = systemoperatorn)

Kausalitet



Handlar om vilken del av insignalen som utsignalen beror på.
 Kausalt system \Rightarrow Utsignalen $y(t)$ beror inte på insignalens, $x(t)$, framtida värden.

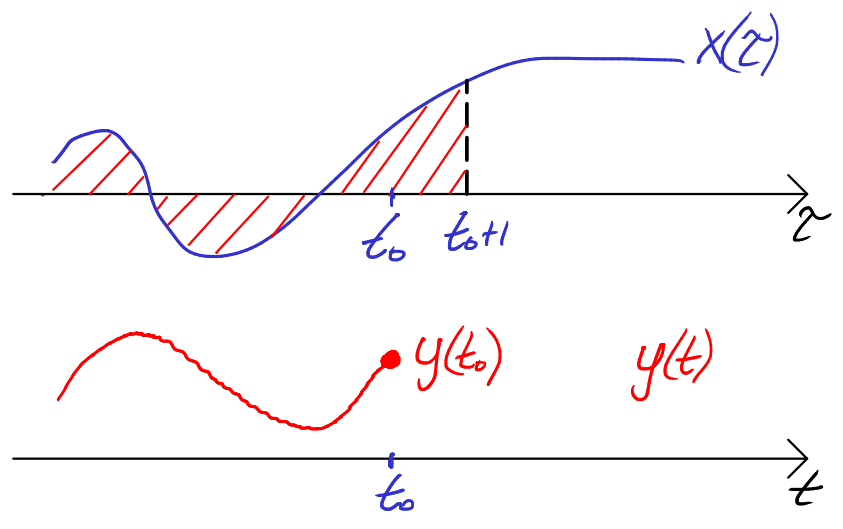
SYSTEMEGENSKAP	$y(t)$ beror på $x(t \leq t_0)$?	$y(t_0)$ beror på $x(t > t_0)$?
Kausalt	JÄ	NEJ
Icke-kausalt	Eventuellt	JÄ
Spec. fall: Anti-kausalt	NEJ	JÄ



Exempel

① $y(t) = \sqrt{x(t-2)}$

② $y(t) = \int_{-\infty}^{t+1} x(\tau) d\tau$



③ $y(t) = x(t+3)$

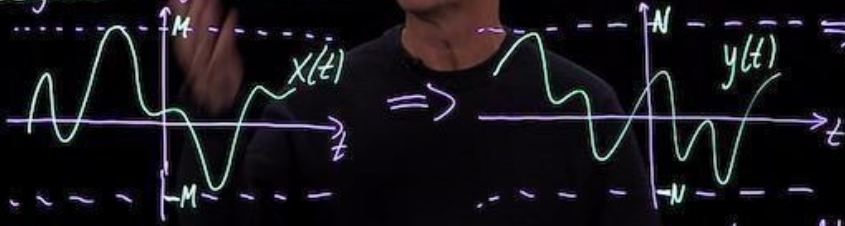
④ $y(t) = x(-t)$

SYSTEMEGENSKAPER (\mathcal{A} = systemoperatören)

Stabilitet



Insignal-utsignalstabil (BIBO-stabil) system om $|x(t)| \leq M < \infty$
 $\Rightarrow |y(t)| \leq N < \infty$
 $M, N \in \mathbb{R}$



- Marginellt stabilt system: BIBO-stabilt för de flesta begränsade insignaler, men minst en begränsad insignal ger icke-begränsad utsignal
- Instabilt system: Ingen begränsad insignal resulterar i en begränsad utsignal.

Exempel:

① $y(t) = 5x(t-2) + 3$

② $y(t) = \frac{dx(t-3)}{dt}$

③ $\frac{dy(t)}{dt} - y(t) = x(t)$

Stabilisering av instabila system med hjälp av återkoppling

(kommer senare i kursen)

