

UTSIGNALEN FRÅN KAUSALA LTI-SYSTEM

Kausalt LTI-system

$x(t) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow y(t) = \mathcal{H}\{\text{lagrad energi \& } x(t)\} = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

Zero-input response (fria svängningen) + Zero-state response (tvingad svängning)

Låt $x(t < 0) = 0$

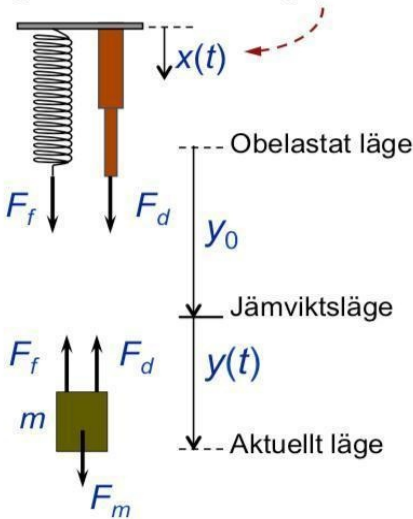
$y_{zi}(t) = \mathcal{H}\{\text{Energilagrard i systemet vid } t=0\} \Big|_{x(t)=0} = y(t) \Big|_{x(t)=0}$

$y_{zs}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} \Big|_{\text{Energifritt system}} = y(t) \Big|_{\text{Inittillst. vid } t=0} = 0$

Systemexempel 1 – Mekaniskt svängningssystem, massa i dämpad fjäder

Svängande dämpad fjäder – frilägg och sätt ut krafter:

Insignal: ändrad infästningspunkt



Fjäderkraften $F_f = k \cdot y_{\text{tot}}(t) = k \cdot (y_0 + y(t) - x(t))$
 Dämpkraften $F_d = c \cdot (y_{\text{tot}}(t))' = c \cdot (y'(t) - x'(t))$
 Tyngdkraften $F_m = m \cdot g$ ($g =$ tyngdaccelerationen)

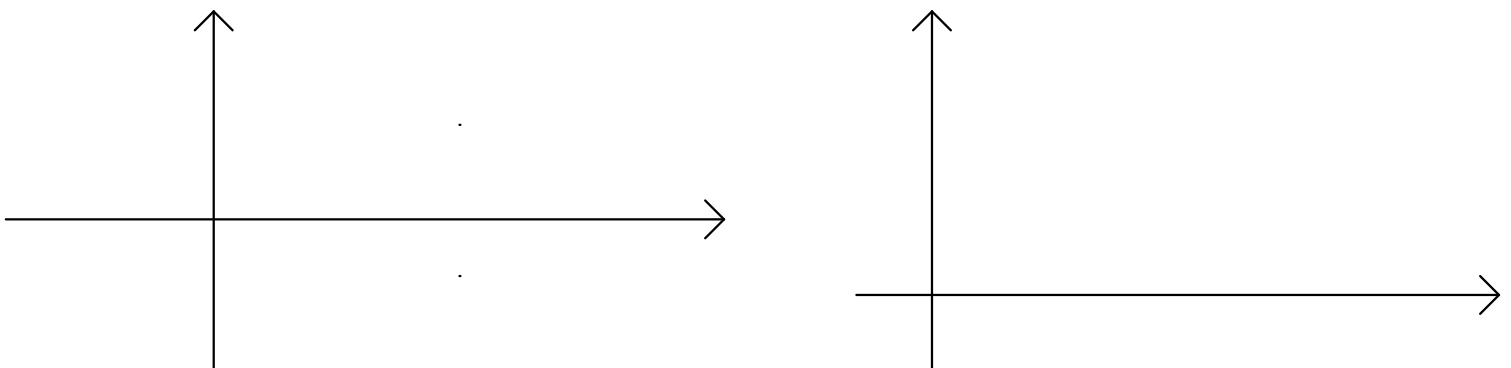
Newtons 2:a lag: $F_m - F_f - F_d = m \cdot y''(t)$

$\Rightarrow m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = m \cdot g - k \cdot y_0 + c \cdot x'(t) + k \cdot x(t)$

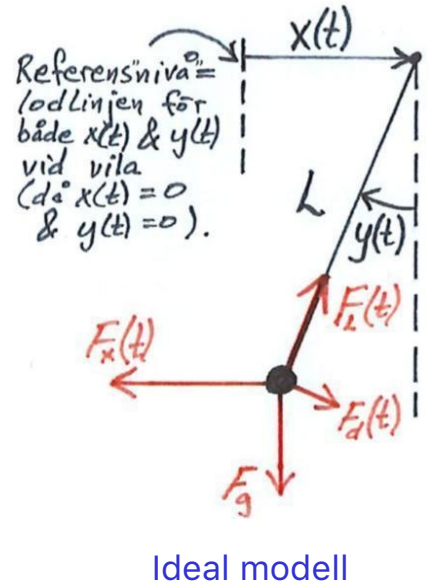
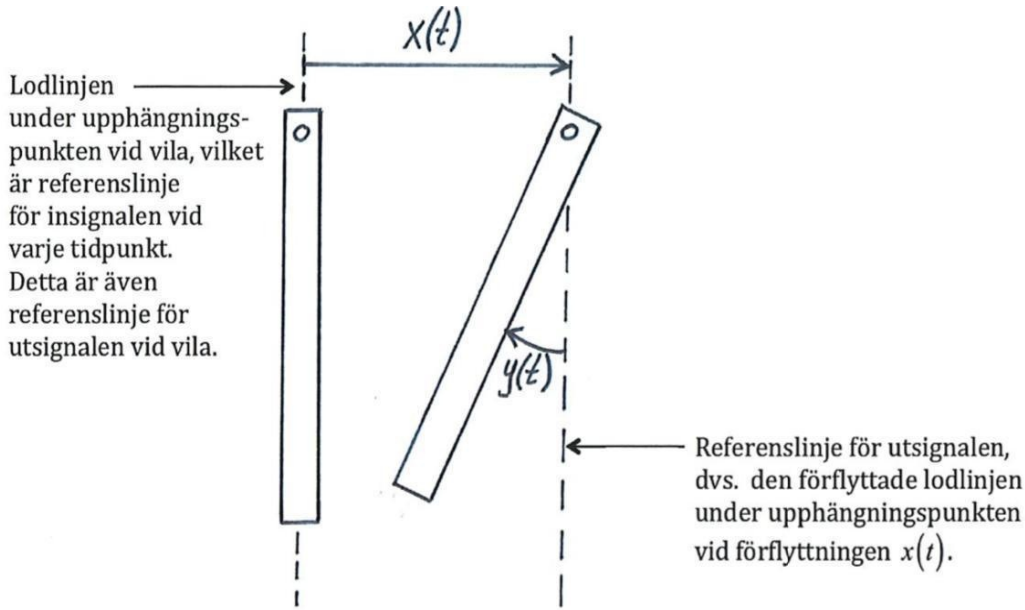
Vid vila är $x=0, x'=0, y=0, y'=0, y''=0 \Rightarrow m \cdot g = k \cdot y_0$

\Rightarrow

$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \frac{dy(t)}{dt} + k \cdot y(t) = c \frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t)$



Systemexempel 2 – Mekaniskt svängningssystem, pendlande linjal



Newtons 2:a lag $\Rightarrow y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{g}{l}\sin(y) = \frac{\cos(y)}{l} \cdot x''$

Icke-linjärt system, p.g.a. $\sin(y)$ och $\cos(y)$

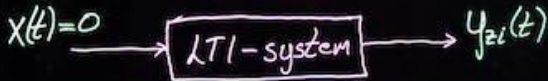
\Rightarrow Linjärisera, dvs. approximera med linjär modell:

Om vinkeln y är liten $\Rightarrow \sin(y) \approx y, \cos(y) \approx 1$

$$\Rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{g}{l} y(t) = \frac{1}{l} \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$



DEN FRIA SVÄNGNINGEN, ZERO-INPUT RESPONSE $y_{zi}(t)$



Differentialekvationsbeskrivning:

$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

(Vanligen: $N > M$)

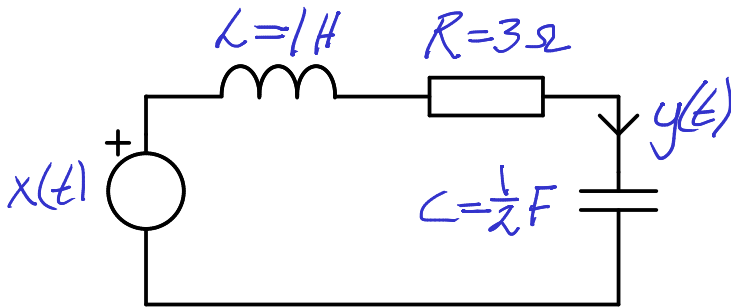
Deriveringsoperatören D : $Dy(t) = \frac{dy(t)}{dt}$, $D^i y(t) = \frac{d^i y(t)}{dt^i}$

$$\Rightarrow Q(D)y(t) = P(D)x(t) \quad \text{där} \quad \begin{cases} Q(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 \\ P(D) = b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{lös } \boxed{Q(D)y_{zi}(t) = 0} \Rightarrow y_{zi}(t) = \sum (\text{karaktäristiska termer})$$

$$e^{\lambda t}, t^n e^{\lambda t}, e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t)$$

Exempel:



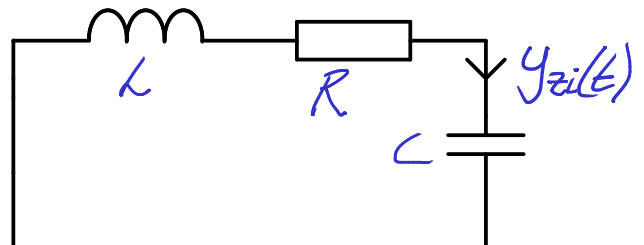
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -5$$

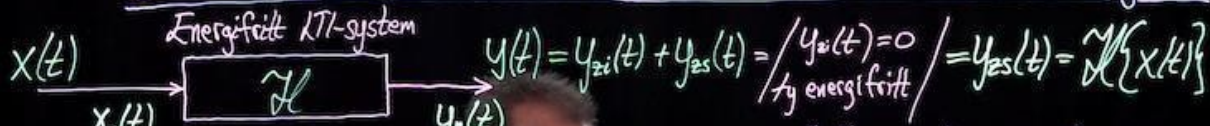
I VT2 kommer ni, i En- och flervariabelkursen, att lära er hur man löser (dvs. beräknar $y(t)$) sådana här differentialekvationer!

Beräkna $y_{zi}(t)$

Ekvivalent krets då $x(t)=0$:

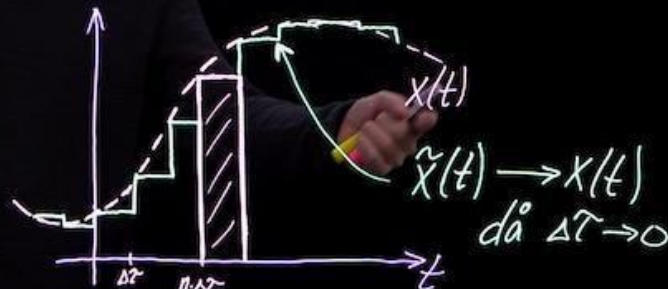
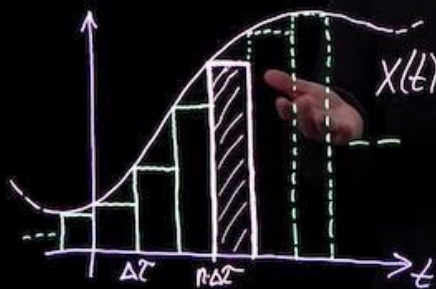


DEN TVINGADE SVÄNGNINGEN, ZERO-STATE RESPONSE $y_{zs}(t)$

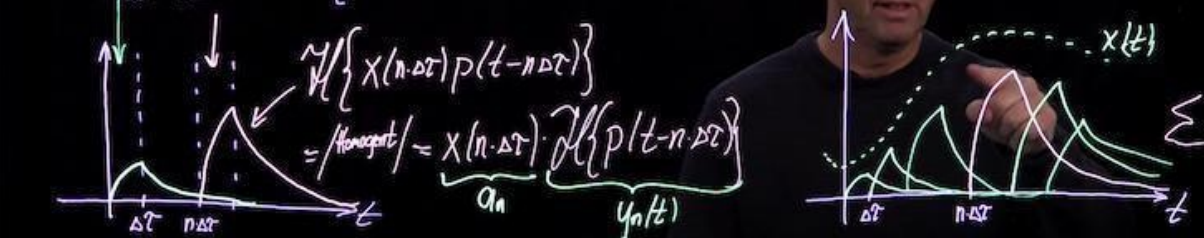
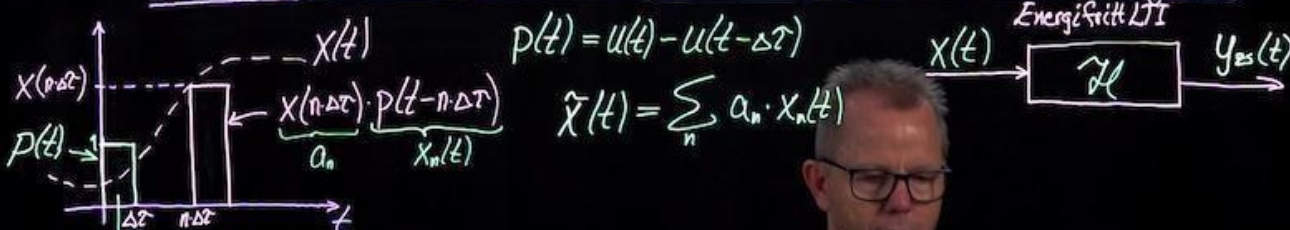


Låt $x(t) = a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t) + \dots = \sum_n a_n \cdot x_n(t)$
 Linjärt system $\Rightarrow y(t) = a_1 \cdot y_1(t) + a_2 \cdot y_2(t) + \dots = \sum_n a_n \cdot y_n(t)$

Hur väljer vi lämplig uppsättning $\{x_n(t)\}$ för repr. av godtycklig $x(t)$, som ger enkel/enklast beräkning av $\{y_n(t)\}$?



DEN TVINGADE SVÄNGNINGEN, ZERO-STATE RESPONSE $y_{zs}(t)$



Linjärt system $\Rightarrow \tilde{y}(t) = \sum_n a_n \cdot y_n(t) = \sum_n x(n\Delta\tau) \cdot \mathcal{H}\{p(t - n\Delta\tau)\} \rightarrow y_{zs}(t)$
 då $\Delta\tau \rightarrow 0$

DEN TVINGADE SVÄNGNINGEN, ZERO-STATE RESPONSE $y_{zs}(t)$

$p(t) = u(t) - u(t - \Delta\tau)$
 $\hat{x}(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t)$
 $\mathcal{L}\{p(t - n\Delta\tau)\} = ?$

$x(t) \xrightarrow{\text{Energisätt DTI}} \mathcal{L} \rightarrow y_{zs}(t)$

$x(n\Delta\tau) \cdot p(t - n\Delta\tau) \rightarrow x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$
 $x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$

$d(t) \rightarrow \delta(t)$
 $p(t) = d(t) \cdot \Delta\tau$
 $d\epsilon \Delta\tau \rightarrow 0 \rightarrow \delta(t) \cdot d\tau$

Dvs. $\hat{x}(t) = \sum_n x(n\Delta\tau) p(t - n\Delta\tau) \xrightarrow{\Delta\tau \rightarrow 0} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$
 $\hat{y}(t) = \sum_n x(n\Delta\tau) \mathcal{L}\{p(t - n\Delta\tau)\} \xrightarrow{\Delta\tau \rightarrow 0} y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} d\tau$

DEN TVINGADE SVÄNGNINGEN, ZERO-STATE RESPONSE $y_{zs}(t)$

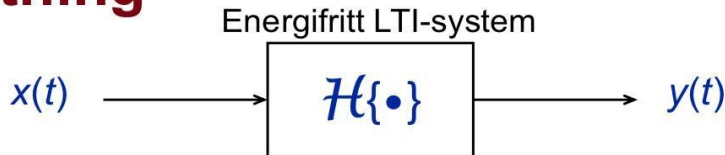
Allmän signalsbeskrivning: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$
 Linjärt system $\Rightarrow y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} d\tau$
 Låt $h(t) := \mathcal{L}\{\delta(t)\}$; systemets impulssvar
 Tidsinvariant system $\Rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} = h(t - \tau)$

Faltungsintegralen: $y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$
 $y_{zs}(t) = (x * h)(t) = x(t) * h(t)$

Viktiga egenskaper: $*$ är kommutativ; $y_{zs}(t) = (x * h)(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau$
 $\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) b(t - \tau) d\tau = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \dots & ; a(\tau) = 0; \tau > 0 \\ \int_{-\infty}^t \dots & ; b(\tau) = 0; \tau > 0 \end{cases}$

Faltning

VIDEO 4.1



\mathcal{H} = systemoperatorn; $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$

♦ Från def. av $\delta(t)$ följer: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

\Rightarrow $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ = $\mathcal{H}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}$ = /Linjärt/

= $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{H}\{\delta(t-\tau)\}d\tau$ = /Tidsinvariant/ = $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

Copyright © Lasse Alfredsson, LiTH

Faltningintegralerna konvergerar garanterat om

$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$ och $|h(t)| < \infty$ eller $|x(t)| < \infty$ och $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$

TS&S06

VIDEO 4.2

$x(t) \rightarrow$ **LTI** $\rightarrow y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$
 $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$
 $a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ /Linjärt/ $a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$

$\delta(t) \rightarrow h(t)$
 $\delta(t-\tau)$ /Tidsinvariant/ $h(t-\tau)$

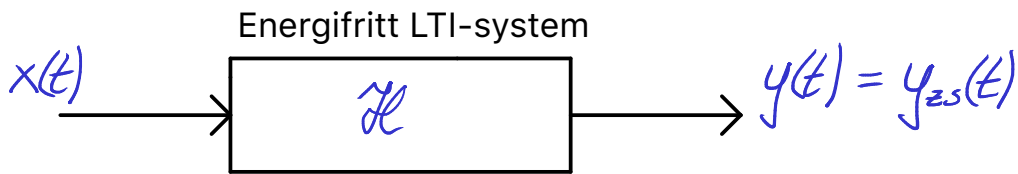
$x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \rightarrow x(\tau)h(t-\tau)$

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ /LTI/ $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = (x * h)(t)$

Copyright © Lasse Alfredsson, LiTH

Slutsats efter video 3 & 4 ovan:

Utsignalens zero-statekomponent (den tvingade svängningen):



där

$$y_{zs}(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Eller $x(t) * h(t)$

Faltningintegralen/-erna

där $h(t) = \mathcal{H}\{\delta(t)\}$ är LTI-systemets impulssvar

Räkneexempel – faltning

Ett visst energifritt LTI-system har impulssvaret $h(t) = 6e^{-2t}u(t)$.

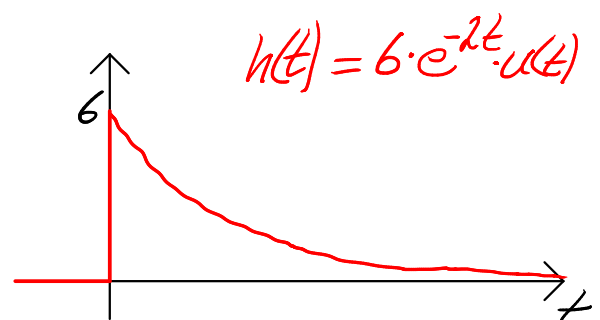
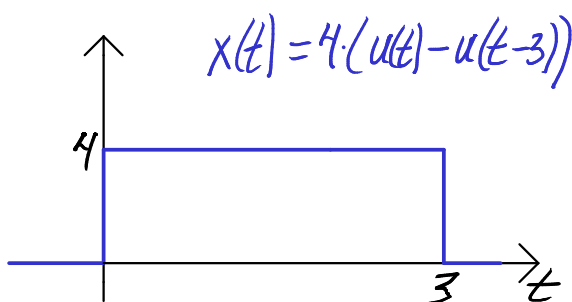
a) Beräkna systemets utsignal $y(t)$ då dess insignal är

$$x(t) = 4(u(t) - u(t-3))$$

b) Beräkna systemets stegsvar $g(t)$

c) Bestäm systemets kausalitetsegenskap

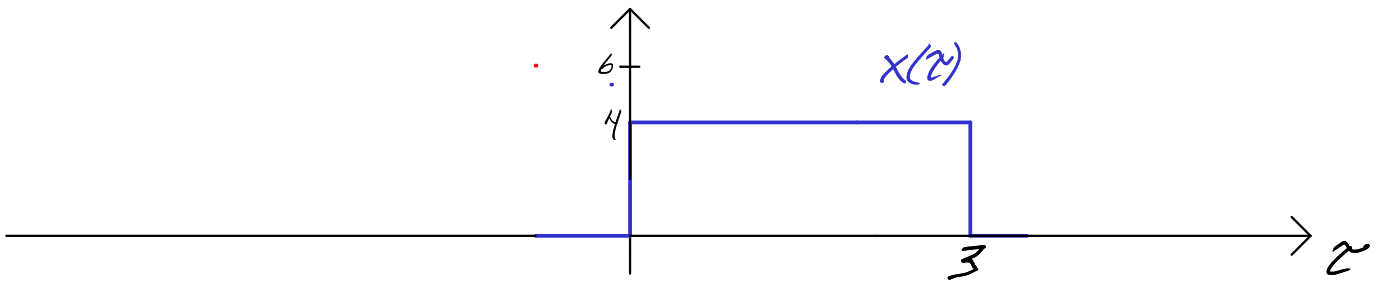
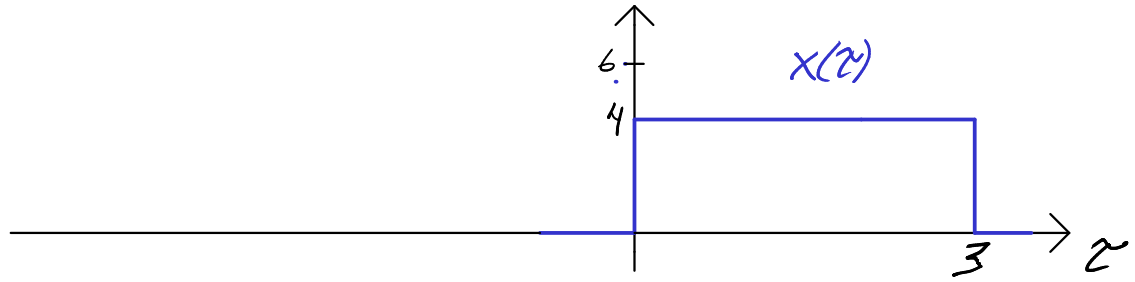
d) Bestäm systemets stabilitetsegenskap



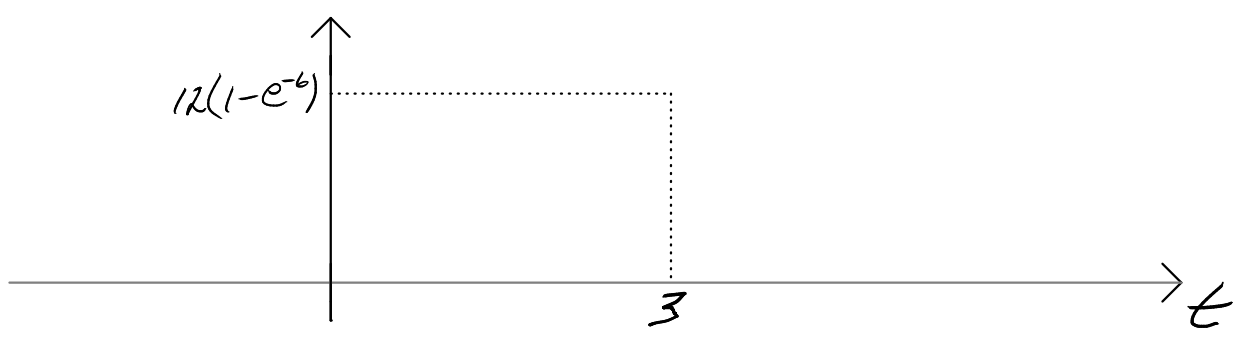
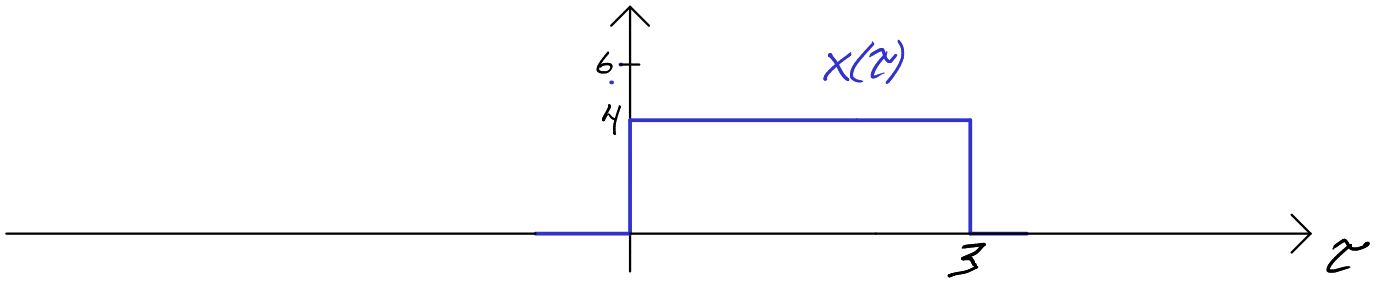
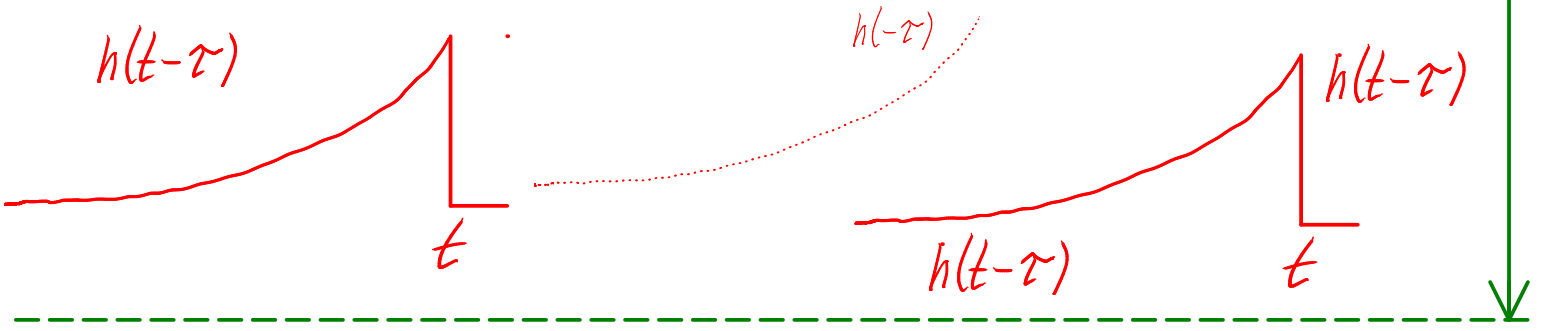
a) Beräkna systemets utsignal $y(t)$

$$y_{zs}(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

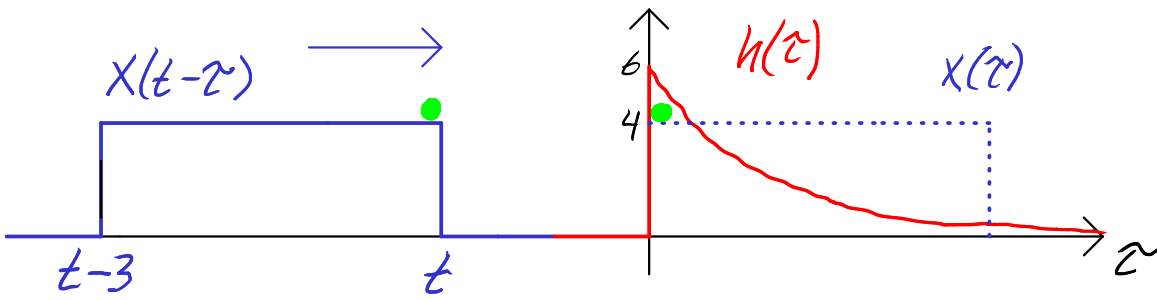
"Grafisk faltning":



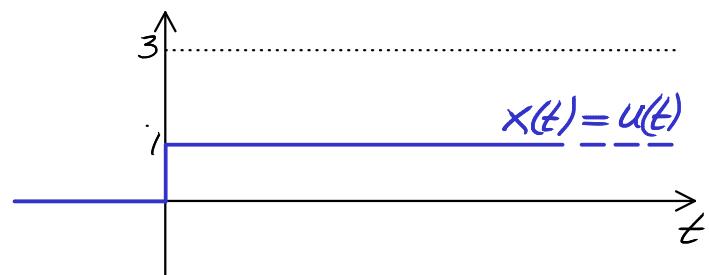
Lasses demo-material under föreläsningen – ingår ej i studentmaterialet:



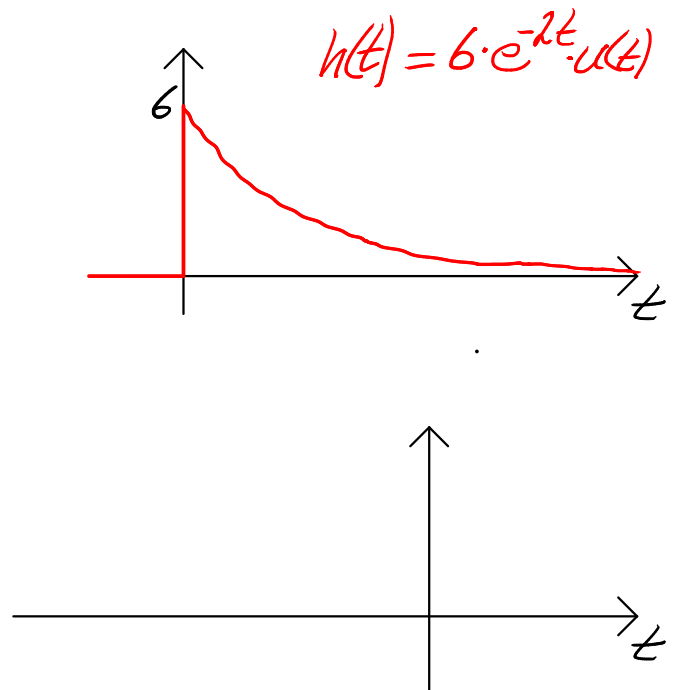
Testa själv att beräkna $y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$!



b) Beräkna systemets stegsvar $g(t)$



c) Bestäm systemets kausalitetsegenskap



d) Bestäm systemets stabilitetsegenskap

Stabilitet – för LTI-system

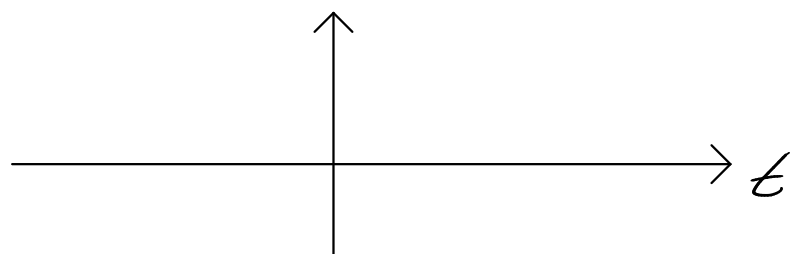
Stabilt system:

Varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal.

\Leftrightarrow

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Exempel på impulssvar $h(t)$ för stabilt system:

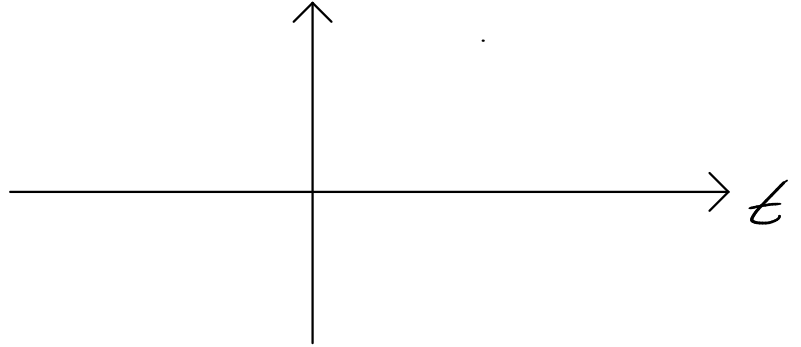


Marginellt stabilt system:

De flesta begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{cases}$$

Exempel på impulssvar $h(t)$ för marginellt stabilt system:

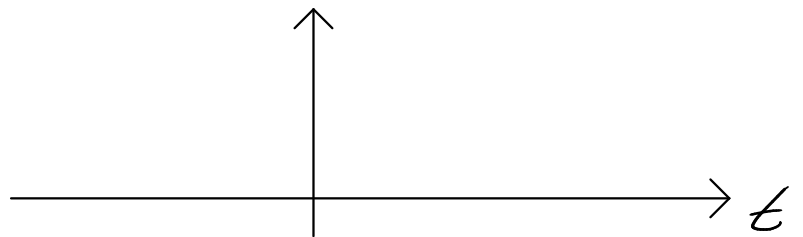


Instabilt system:

Ingen begränsad nollskild insignal kan ge upphov till en begränsad utsignal.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{cases}$$

Exempel på impulssvar $h(t)$ för instabilt system:



d) Stabilitetsegenskap för LTI-systemet i räkneuppgiften?

