

- Video 1: Faltningssteoremet och frekvensfunktionen
- Video 2: Amplitudkaraktäristik och faskarakteristik för LTI-system
- Video 3: Fouriertransformanalys av ett LTI-system  
som beskrivs av en differentialekvation (räkneexempel)
- Kretsberäkningar med fouriertransformen
- Större räkneexempel – fouriertransformanalys av ett (annat) LTI-system

FALTNINGSTEOREMET & FREKVENSFUNKTIONEN  $H(\omega)$

**STABILT ENERGIFRITT LTI-SYSTEM**

$$\begin{aligned}
 X(t) &\xrightarrow{\quad h(t), H(\omega) \quad} Y(t) = Y_{\text{sp}}(t) + Y_{\text{es}}(t) \\
 &= Y_{\text{sp}}(t) = (X * h)(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) h(t-\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega(\lambda+\tau)} d\lambda \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda = X(\omega) \cdot H(\omega)
 \end{aligned}$$

Antag  $\int_{-\infty}^{\infty} |Y_{\text{sp}}(t)| dt < \infty \Rightarrow \mathcal{F}\{Y_{\text{sp}}(t)\} \exists$   
 $\mathcal{F}\{Y_{\text{sp}}(t)\} = Y_{\text{sp}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{\text{sp}}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} Y_{\text{sp}}(t) e^{-j\omega t} dt / \lambda = t - \tilde{\tau}; t = \lambda + \tilde{\tau}$   
 $d\lambda = 1; dt = d\lambda$   
 $\mathcal{F}\{X(\tau)\}; \text{ om } \int_{-\infty}^{\infty} |X(\tau)| d\tau < \infty$   
 $\mathcal{F}\{h(\lambda)\}; \text{ om } \int_{-\infty}^{\infty} |h(\lambda)| d\lambda < \infty$

$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$  = LTI-systemets  
frekvensfunktion

Faltningssteoremet:  $\mathcal{F}\{(a * b)(t)\} = \mathcal{F}\{a(t)\} \cdot \mathcal{F}\{b(t)\} = A(\omega) \cdot B(\omega)$

VIDEO 1.1

# FALTNINGSTEOREMET & FREKVENSFUNKTIONEN $H(\omega)$

STABILT ENERGIFRITT LTI-SYSTEM

$$\begin{aligned}
 X(t) &\xrightarrow{h(t), H(\omega)} y(t) = y_{zs}(t) + y_{ns}(t) \\
 &= y_{zs}(t) = X(t) \cdot H(\omega) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) h(t-\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega \lambda} d\lambda = X(\omega) \cdot H(\omega)
 \end{aligned}$$

$\tilde{Y}_{zs}(\omega) = Y_{zs}(t) = (X * h)(t)$

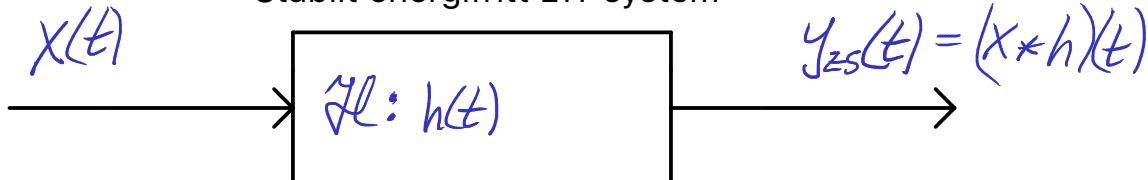
$\tilde{Y}_{zs}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y_{zs}(t)$

\* Härledning av faltningsteoremet.

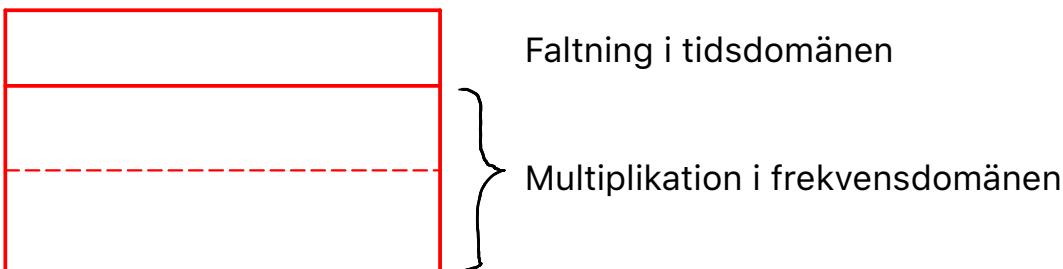
\* Definition av frekvensfunktionen  $H(\omega)$ .

\* Lösningsvägar för beräkning av utsignalen, i tidsdomänen eller via frekvensdomänen.

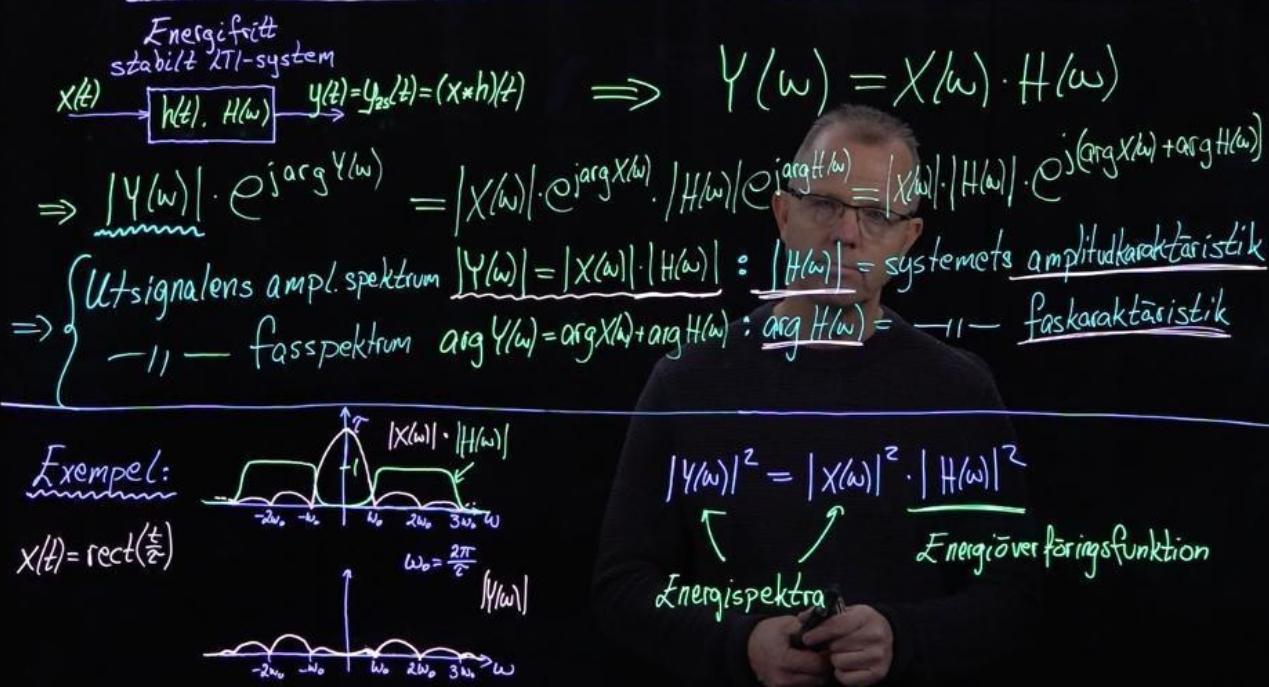
Stabilt energifritt LTI-system



Jämför:



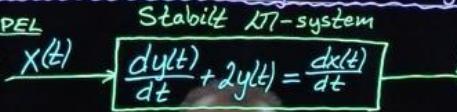
# AMPLITUDKARAKTÄRISTIK & FASKARAKTÄRISTIK FÖR LTI-SYSTEM



- \* Amplitudkaraktäristiken  $|H(\omega)|$  och faskaraktäristiken  $\arg H(\omega)$  för LTI-system.
- \* Energispektrum för en signal & energiöverföringsfunktionen för LTI-system.

VIDEO 3.1

## Fouriertransformanalys av LTI-system beskrivet av en differentialekvation

EXEMPEL

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \Rightarrow \mathcal{F}\{h(t)\}$$

$$h(t) = y(t) \text{ da } x(t) = \delta(t)$$

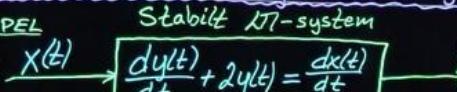
- a) Beräkna systemets frekvensfunktion  $H(\omega)$ .
- b) Skissa systemets amplitudkaraktäristik  $|H(\omega)|$  och ange vilken typ av frekvensselektivt filter som systemet utgör.
- c) Beräkna & skissa systemets impulsvar  $h(t)$ .
- d) Ange systemets kausalitetsegenskap.

Ett räkneexempel: För ett LTI-system, där förhållandet mellan utsignalen och insignalen beskrivs av en differentialekvation, så visas följande för LTI-systemet.

- a) Beräkna systemets frekvensfunktionen  $H(\omega)$ .

VIDEO 3.2

## Fouriertransformanalys av LTI-system beskrivet av en differentialekvation

EXEMPEL

$$\begin{aligned} a) \quad & \mathcal{F}\left\{ \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) \right\} = \mathcal{F}\left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} \\ & \Rightarrow \mathcal{F}\left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} + 2 \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} \end{aligned}$$

$$X(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \underbrace{\frac{d}{dt}(e^{j\omega t})}_{j\omega \cdot e^{j\omega t}} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- a) Beräkna systemets frekvensfunktion  $H(\omega)$ .
- b) Skissa systemets amplitudkaraktäristik  $|H(\omega)|$  och ange vilken typ av frekvensselektivt filter som systemet utgör.
- c) Beräkna & skissa systemets impulsvar  $h(t)$ .
- d) Ange systemets kausalitetsegenskap.

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$$

VIDEO 3.3

## Fouriertransformanalys av DTI-system beskrivet av en differentialekvation

EXEMPEL

Stabiltt DTI-system

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

a)

$$\mathcal{F}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{F}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\}}_{jw \cdot Y(w)} + 2 \underbrace{\mathcal{F}\{y(t)\}}_{Y(w)} = \underbrace{\mathcal{F}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}}_{jw \cdot X(w)}$$

$$\Rightarrow (jw + 2)Y(w) = jw \cdot X(w)$$

$$\Rightarrow H(w) = \frac{jw}{2 + jw}$$

b)

$$|H(w)| = \left| \frac{jw}{2 + jw} \right| = \frac{|w|}{\sqrt{2^2 + w^2}}$$

c)

$$H(0) = \frac{j0}{2 + j0} = 0$$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} |H(w)| = \lim_{w \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\frac{2}{w} + 1} \right| = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

d)

$$Y_{zs}(t) = (x * h)(t) \Rightarrow h(t) = Y_{zs}(t) \text{ därför } x(t) = \delta(t)$$

$$Y_{zs}(w) = X(w) \cdot H(w) \Rightarrow H(w) = Y_{zs}(w) \text{ därför } X(w) = 1$$

## Fouriertransformanalys av DTI-system beskrivet av en differentialekvation

VIDEO 3.4

EXEMPEL

Stabiltt DTI-system

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

a)

$$H(w) = \frac{jw}{2 + jw}$$

b)

$$|H(w)| = \left| \frac{jw}{2 + jw} \right| = \frac{|w|}{\sqrt{2^2 + w^2}}$$

c)

$$H(0) = \frac{j0}{2 + j0} = 0$$

$$\lim_{w \rightarrow \infty} |H(w)| = \lim_{w \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\frac{2}{w} + 1} \right| = \frac{1}{0 + 1} = 1$$

d)

Tumregel: ordn. = 1 :  $w$ ;  $\text{re} = \text{im}$  i nämnaren  
 $\Rightarrow w = 2 \text{ rad/s}$

$$|H(w)| = \frac{|w|}{\sqrt{2^2 + w^2}}$$

$$H(2) = \frac{|2|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{4+4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

HP-filtret

b) Skissa systemets amplitudkaraktäristik  $|H(w)|$  och ange filtertyp.

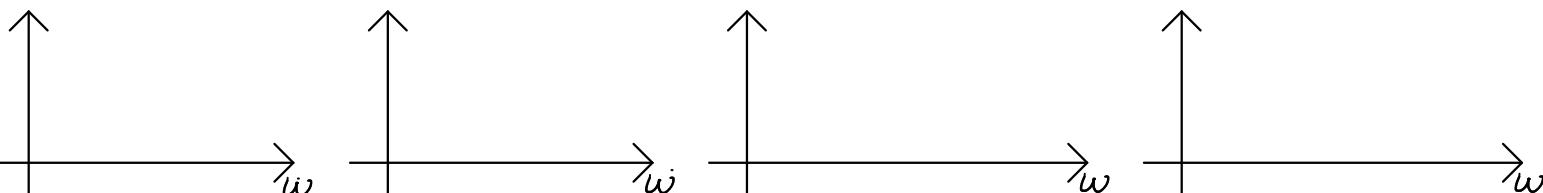
Filtertyper:

Lågpassfilter

Högpassfilter

Bandpassfilter

Bandspärrfilter



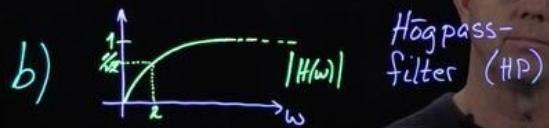
## Fouriertransformanalys av DTI-system beskrivet av en differentialekvation

**EXEMPEL**

$$\xrightarrow{X(t)} \boxed{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}} \xrightarrow{Y(t)}$$

Stabilt DTI-system

a)  $H(\omega) = \frac{j\omega}{2+j\omega}$



c)  $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$

$$H(\omega) = j\omega \cdot \frac{1}{2+j\omega} \Rightarrow$$

d)  $h(t) = 0; t < 0$

$\Rightarrow$  Systemet är kausalt

$$h(t) = \frac{d}{dt} \left( e^{-2t} u(t) \right) = \underbrace{e^{-2t} \delta(t)}_{\mathcal{C}^{-2t} \delta(t) = \delta(t)} + (-2) e^{-2t} u(t) = \delta(t) - 2 e^{-2t} u(t)$$

$$H(\omega) = \frac{2+j\omega-2}{2+j\omega} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2+j\omega} \Rightarrow h(t) = \delta(t) - 2 e^{-2t} u(t)$$



c) Beräkna och skissa systemets impulssvar  $h(t)$ .

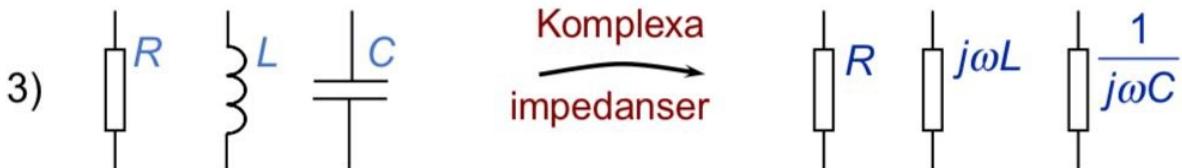
d) Ange systemets kausalitetsegenskap.

# Kretsberäkningar, linjära RLC-nät

(för passiva kretselement och fouriertransformerbara källor)

**Metodik:** Använd  **$j\omega$ -metoden** för beräkning av godtycklig spänning/ström  $y(t)$   
 (begynnelsevillkor  $\neq 0$ , dvs. ev. lagrad energi i  $L$  &  $C$ , kan *inte* hanteras)

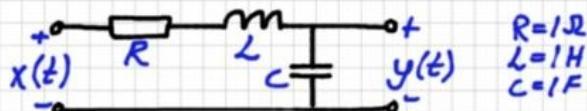
Steg 1–3 = Gör om nätet till ekivalent **komplexschema**



4) Likströmsteori  $\Rightarrow$  Sökt storhets fouriertransform ( $Y(\omega)$ )

5) Inverstransformera  $\Rightarrow$  Sökt storhets tidsuttryck  
 $(y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\})$

## (Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



$$R = 1 \Omega$$

$$L = 1 H$$

$$C = 1 F$$

a) Beräkna/bestäm LTI-systemets

- frekvensfunktion  $H(\omega)$
- impulssvar  $h(t)$ , samt skissa detta
- kausalitetsegenskap & stabilitetsegenskap
- systembeskrivande differentialekvation
- ordning
- amplitudkaraktäristik  $|H(\omega)|$

b) Skissa amplitudkaraktäristiken och ange/motivera vilken typ av frekvensselektivt filter (LP, BP, HP osv.) det elektriske systemet utgör.

c) Beräkna utsignalen  $y_1(t)$

då insignalen är

$$x_1(t) = 3 \cdot e^{-2t} u(t) [V]$$

och systemet är energifritt.

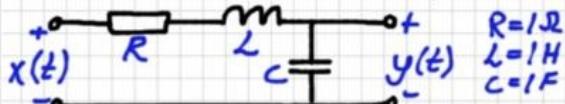
d) Beräkna utsignalen  $y_2(t)$

då insignalen är

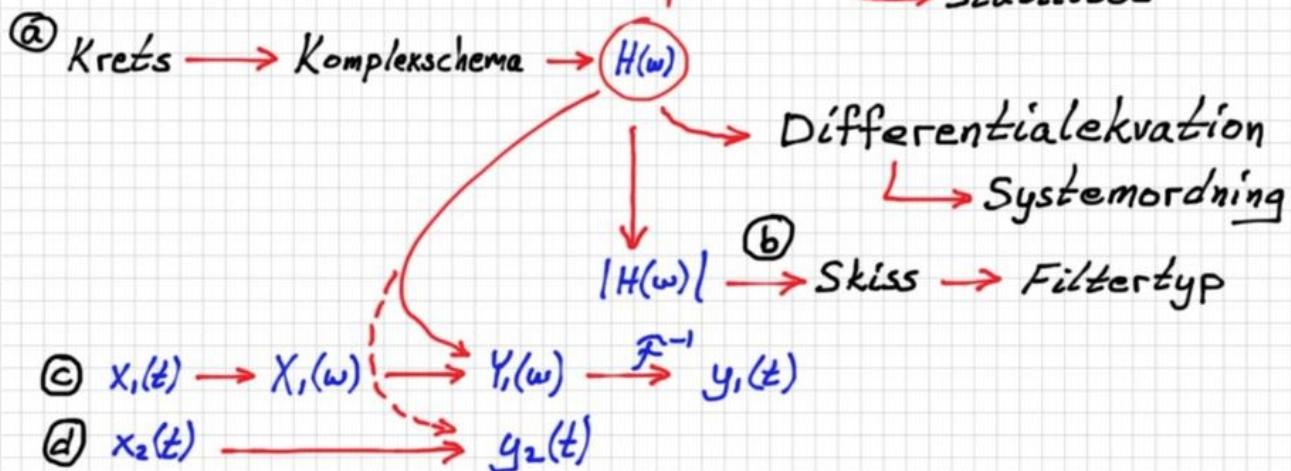
$$x_2(t) = 4 + 3 \cos(2t + \frac{3\pi}{4}) [V]$$

Lösningen stegas fram och går igenom steg för steg i en särskild app. Vi bör hinna med åtminstone halva deluppgift a) under denna föreläsning – resten av a) samt b), c) & d) går igenom under nästa föreläsning.

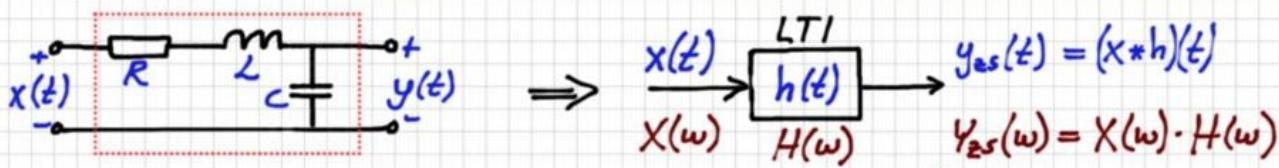
## (Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



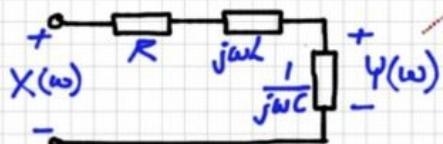
Lösningsgång:



## (Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



a) Komplexschema:



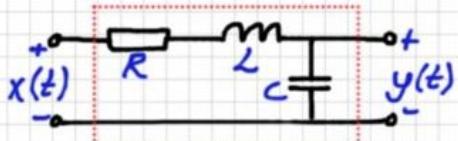
Spanningsdelening  $\Rightarrow$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + (R + j\omega L)}$$

$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC + j^2 \omega^2 LC} = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega}$$

$$R=1\Omega, L=1H, C=1F$$

## (Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



$$a) H(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega}$$

$$h(t) = ? \quad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{Svår att beräkna här!}$$

Sök i stället transformpar i formelsamlingen!

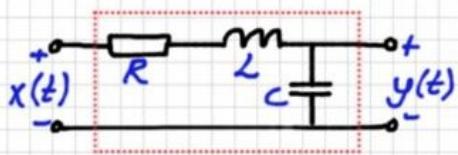
$$\text{Nämnaren i } H(\omega): (j\omega)^2 + j\omega + 1 = (j\omega + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2$$

$$\text{Formels. Tab. 3:11} \Rightarrow e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$$

$$\text{Här: } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ \omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/s} \end{cases}$$

$$\text{Dvs. } H(\omega) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{(j\omega + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \Rightarrow h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t)$$

## (Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



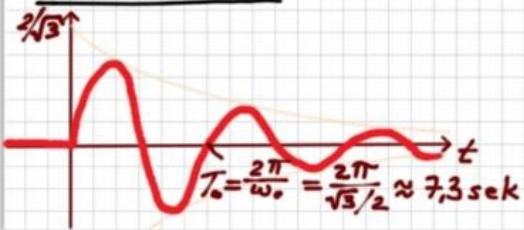
$$a) H(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega}$$

Formels. Tab. 3: II  $\Rightarrow e^{-at} \sin(\omega_0 t) u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$

$$\text{Här: } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ \omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ rad/s} \end{cases}$$

$$\text{Dvs. } H(\omega) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{(j\omega + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \Rightarrow h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t)$$

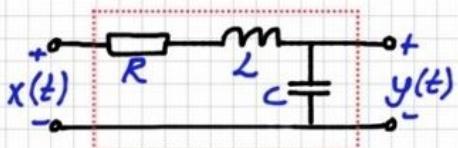
Skissa  $h(t)$ :



•  $h(t) = 0$  för  $t < 0 \Rightarrow$  Systemet är kausal

$$\bullet \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \left( = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1/2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \right) < \infty \Rightarrow \text{Systemet är } \underline{\text{stabil}}$$

## (Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



$$a) H(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega}$$

$$h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t)$$

Kausal &  
stabil  
LT-system

Differentialekvationsbeskrivning?

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + j\omega + 1} \Rightarrow (j\omega)^2 Y(\omega) + j\omega Y(\omega) + Y(\omega) = X(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{Y\} = \mathcal{F}\{H\}, \text{ med } \frac{d^n Y(t)}{dt^n} \Leftrightarrow (j\omega)^n Y(\omega) \Rightarrow$$

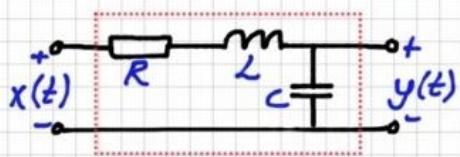
$$\boxed{\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)}$$

Systemets ordning =

differentialekvationens ordning = 2

(= antalet reaktiva nät element, L & C)

## (Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



a)

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega}$$

$$h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Kausal &  
stabil  
 $LTI$ -system  
Ordning = 2

Beräkna systemets amplitudkaraktäristik  $|H(\omega)|$

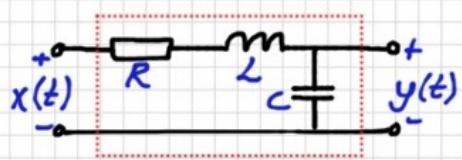
$$|H(\omega)| = \left| \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}}$$

Lösning av deluppgifterna ~~b)~~, c) & d) kommer under nästa föreläsning!

Ändrat efter föreläsningen:

Vi hann även med uppgift b) under föreläsningen – se nästa sida!

## (Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2}}$$

$$a) H(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega}$$

$$h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Kausal &  
stabil  
 $LTI$ -system

Ordnning = 2

b) Skissa  $|H(\omega)|$  och ange filtertyp.

Beräkna exakt

- 1) För  $\omega = 0$
- 2) Då  $\omega \rightarrow \infty$
- 3) För minst ett annat intressant/  
lämpligt  $\omega$ .

Tumregel, systemordning 2:

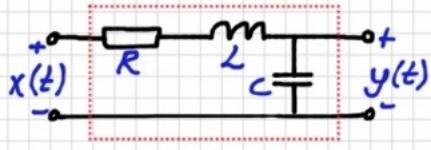
Väg' det  $\omega$  för vilket  $\text{Re}\{nämaren i H}(\omega)\} = 0 \Rightarrow 1 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{1} \text{ rad/s}$

$$1) H(0) = \frac{1}{1 - 0^2 + j0} = 1$$

$$2) \underset{\omega \rightarrow \infty}{\lim} |H(\omega)| = \underset{\omega \rightarrow \infty}{\lim} \left| \frac{\frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2} - 1 + j\frac{1}{\omega}} \right| = \frac{0}{1} = 0$$

$$3) |H(1)| = \left| \frac{1}{1 + j1} \right| = 1$$

## (Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2}}$$

$$a) H(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega}$$

$$h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Kausal &  
stabil  
 $LTI$ -system

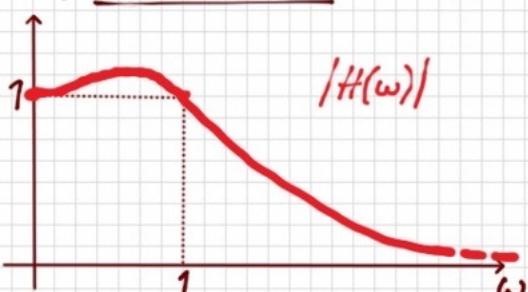
Ordnning = 2

b) Skissa  $|H(\omega)|$  och ange filtertyp.

$$1) H(0) = \frac{1}{1 - 0^2 + j0} = 1$$

$$2) \underset{\omega \rightarrow \infty}{\lim} |H(\omega)| = \underset{\omega \rightarrow \infty}{\lim} \left| \frac{\frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2} - 1 + j\frac{1}{\omega}} \right| = \frac{0}{1} = 0$$

$$3) |H(1)| = \left| \frac{1}{1 + j1} \right| = 1$$



LP-filter! (Examinatorn  
motiverar muntligen)