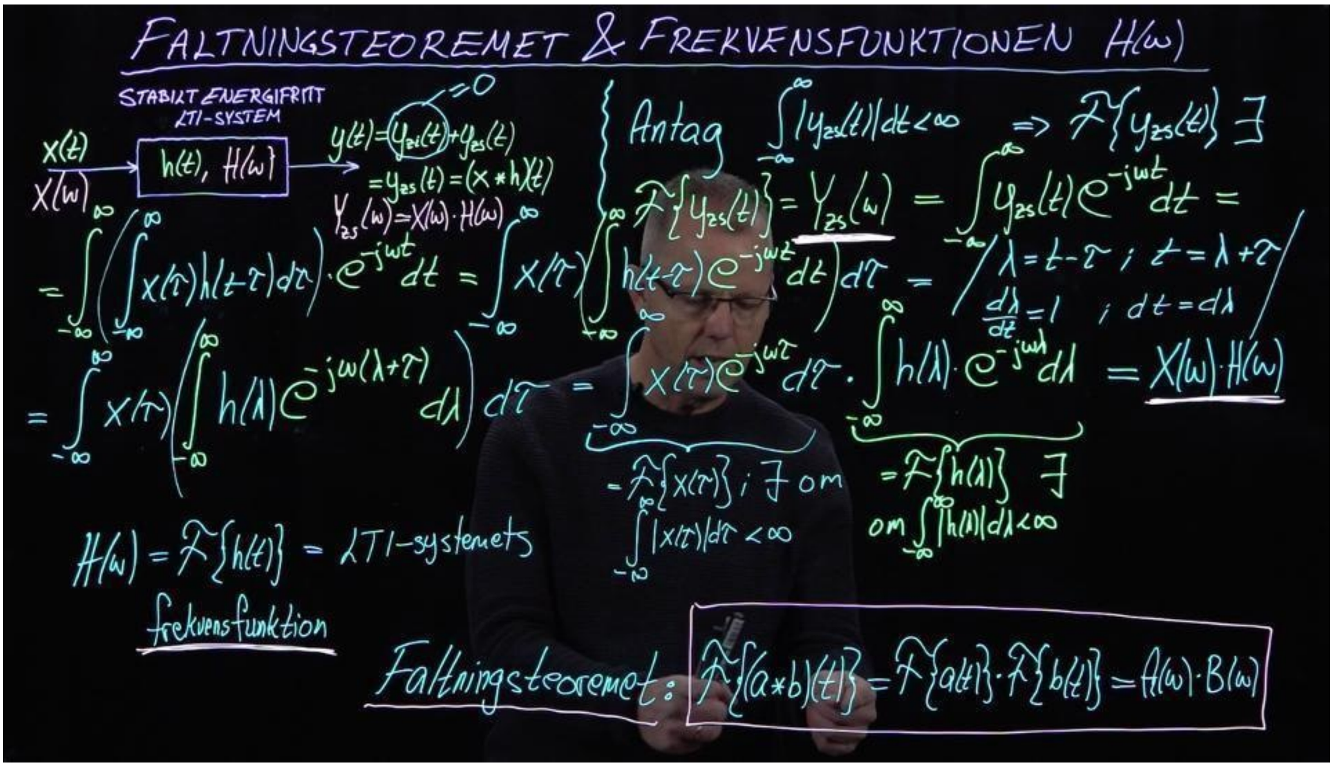
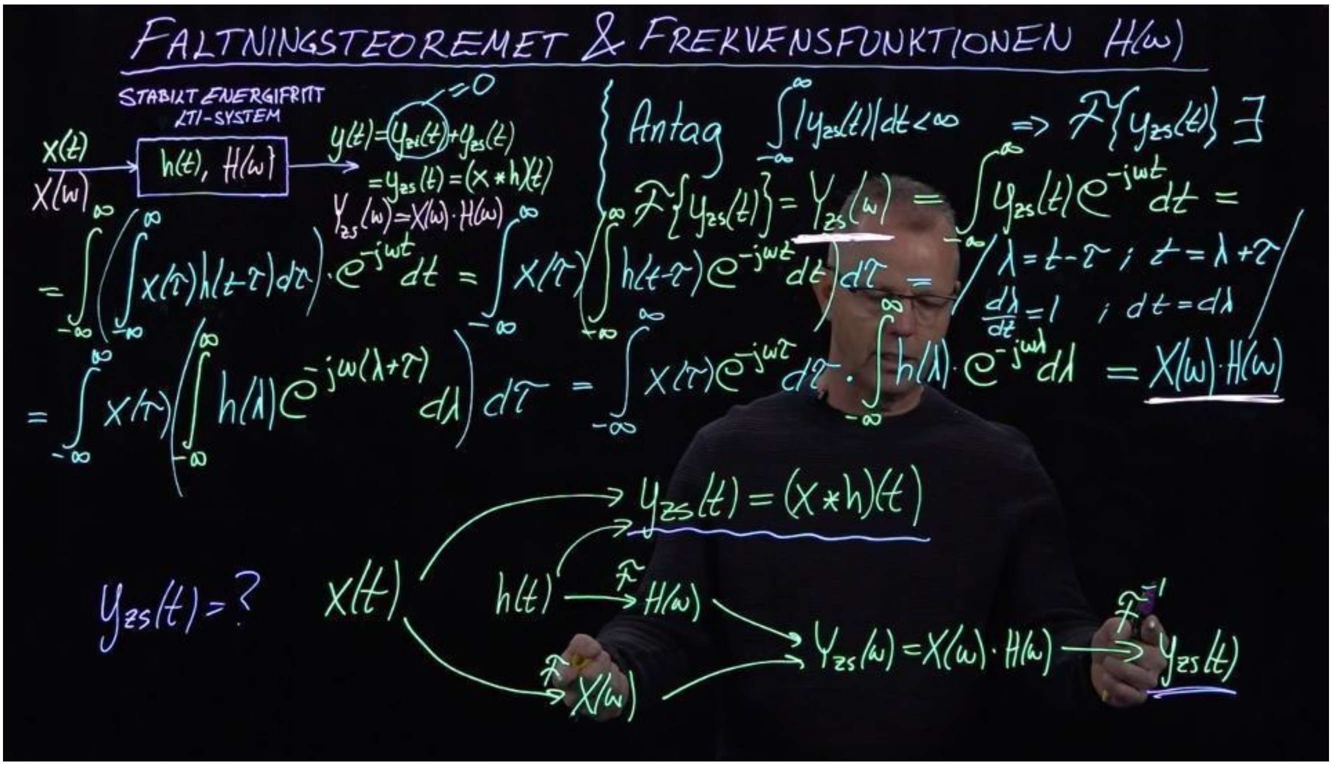
- Video 1: Faltningsteoremet och frekvensfunktionen
- Video 2: Amplitudkaraktäristik och faskaraktäristik för LTI-system
- Video 3: Fouriertransformanalys av ett LTI-system
  som beskrivs av en differentialekvation (räkneexempel)
- Kretsberäkningar med fouriertransformen
- Större räkneexempel – fouriertransformanalys av ett (annat) LTI-system

---

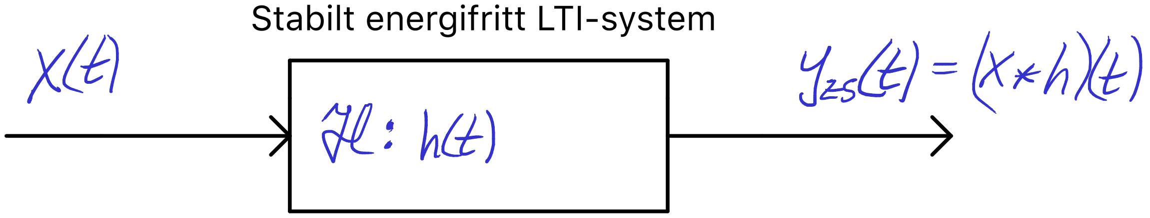


VIDEO 1.1

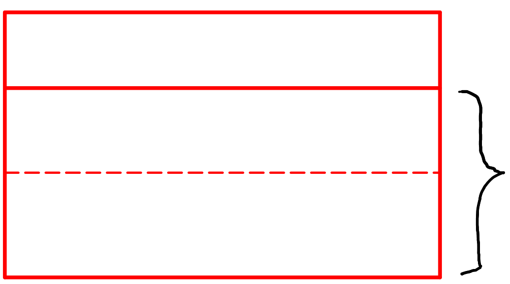
VIDEO 1.2



* Härledning av faltningsteoremet. * Definition av frekvensfunktionen H(w).
* Lösningsvägar för beräkning av utsignalen, i tidsdomänen eller via frekvensdomänen.

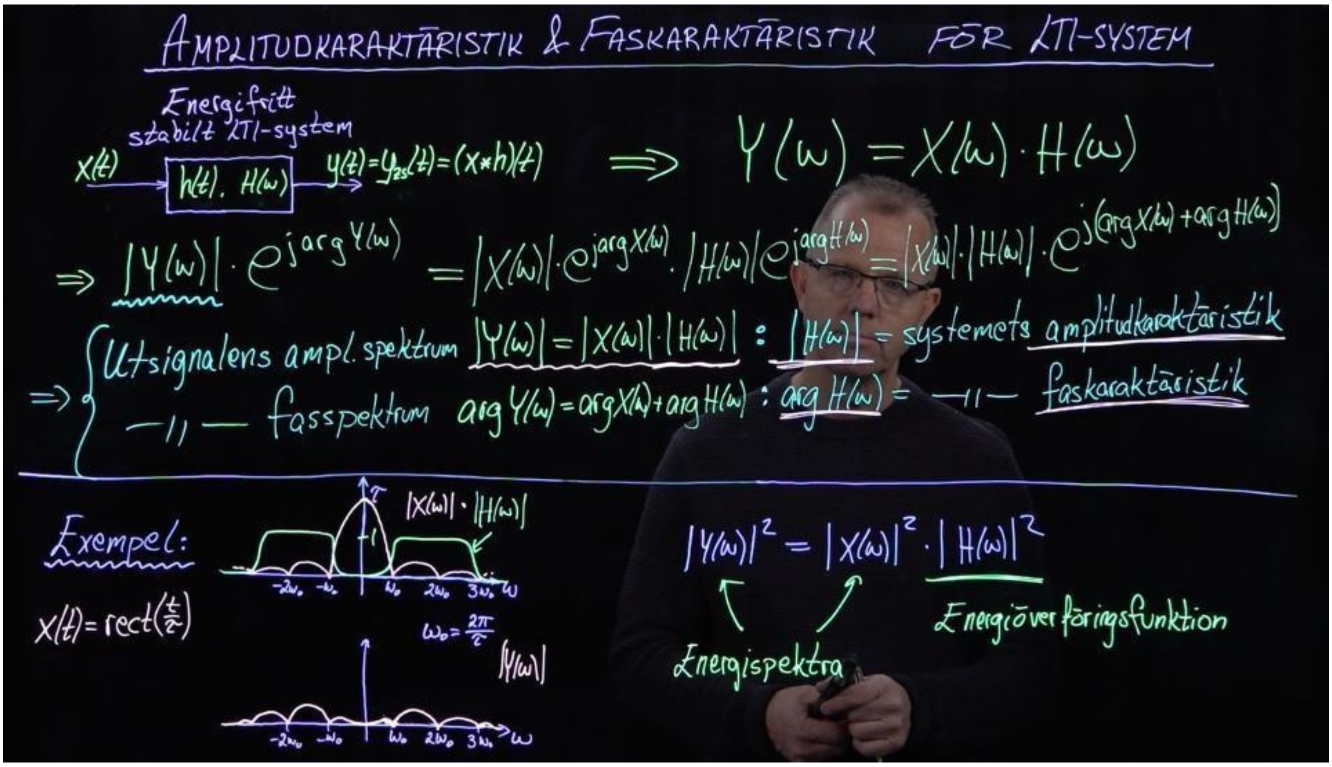


Jämför:



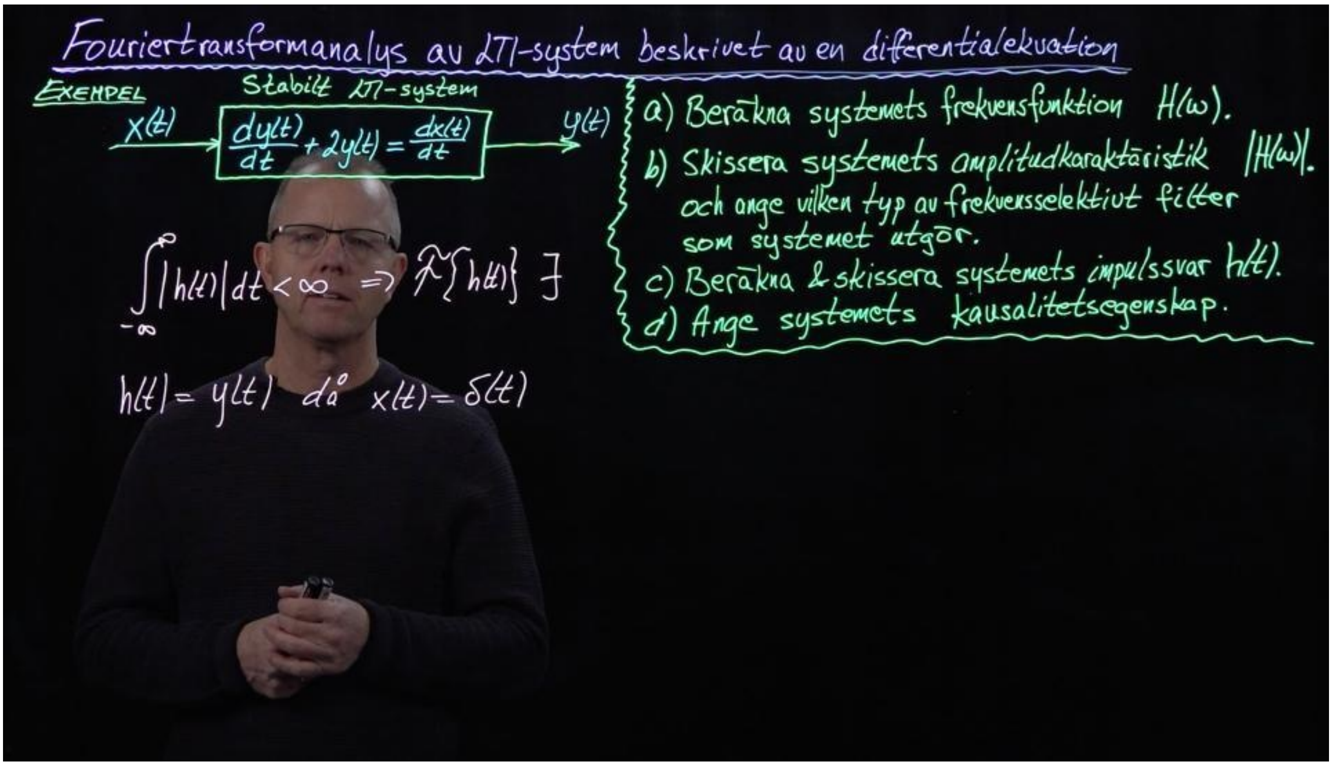
Faltning i tidsdomänen

Multiplikation i frekvensdomänen



VIDEO 2

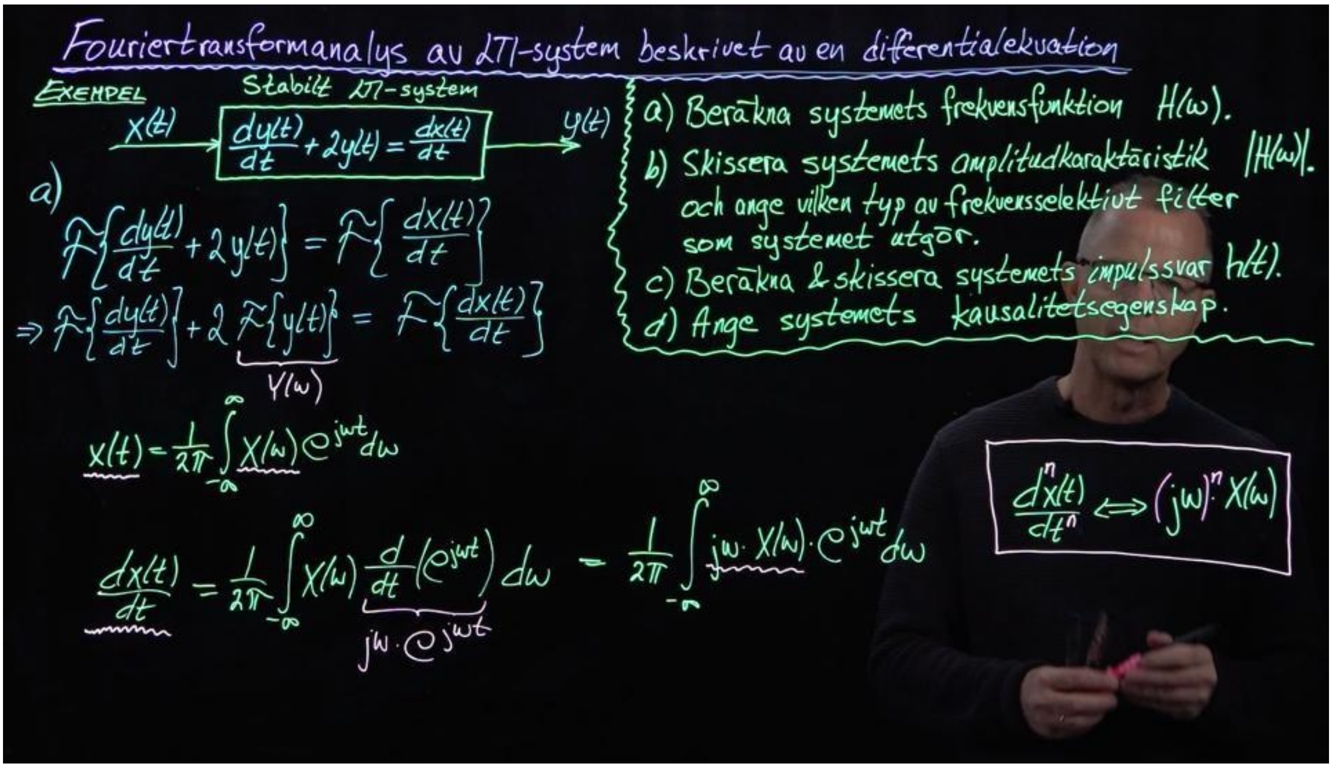
* Amplitudkaraktäristiken |H(w)| och faskaraktäristiken arg H(w) för LTI-system.
* Energispektrum för en signal & energiöverföringsfunktionen för LTI-system.



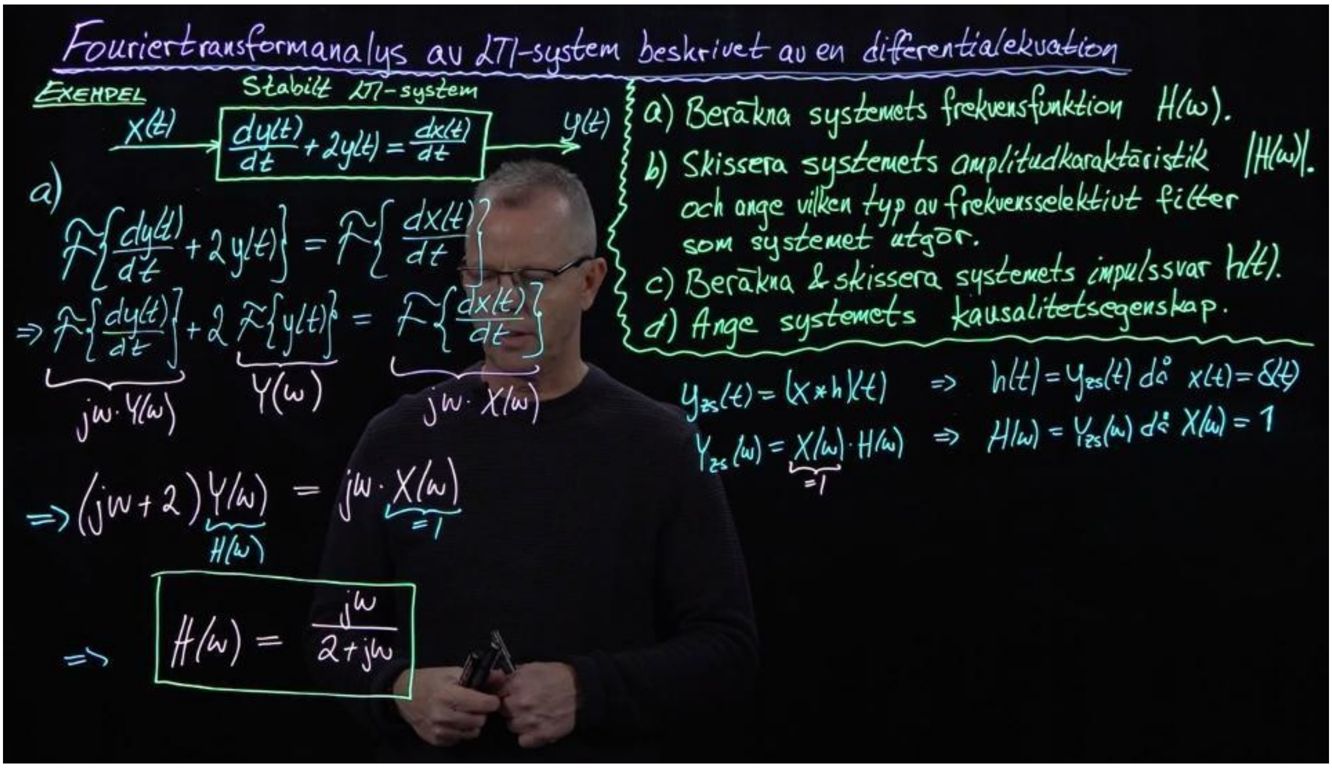
VIDEO 3.1

Ett räkneexempel: För ett LTI-system, där förhållandet mellan utsignalen och insignalen beskrivs av en differentialekvation, så visas följande för LTI-systemet.

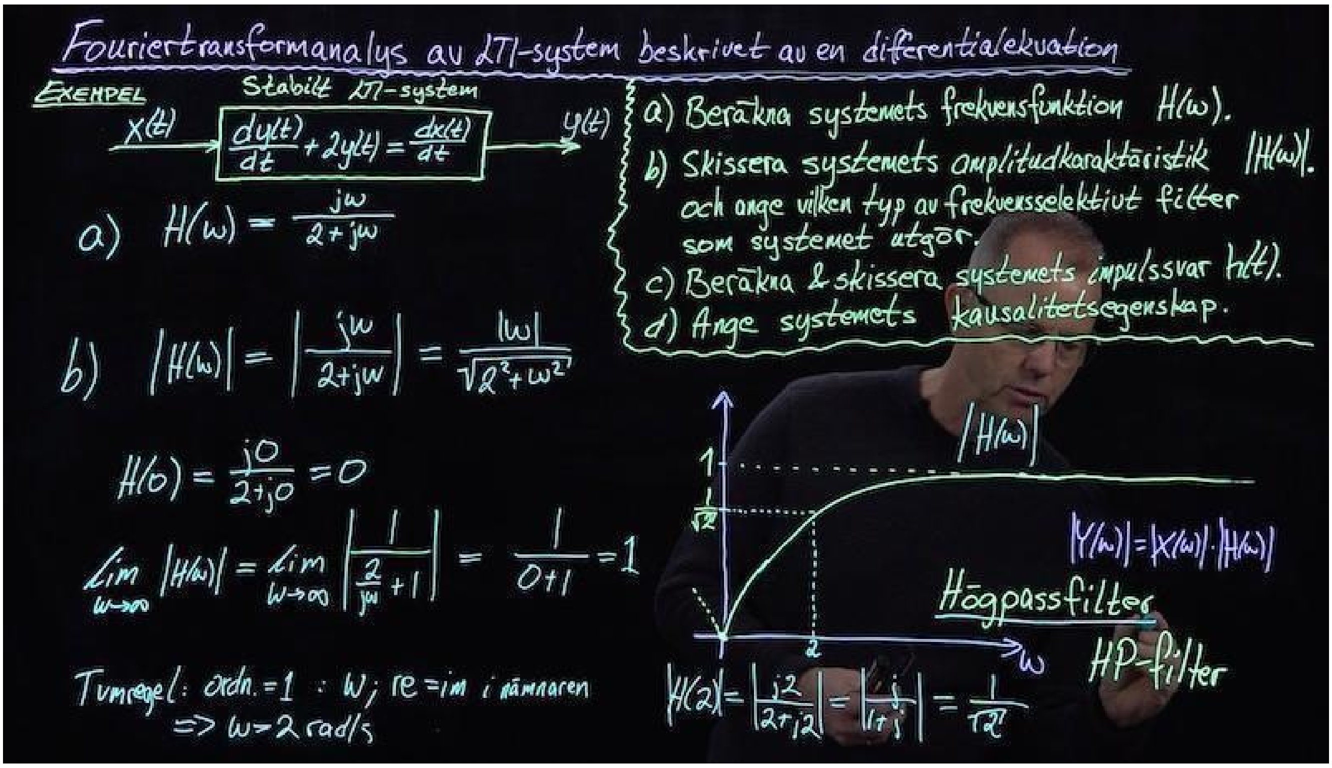
a) Beräkna systemets frekvensfunktionen H(w).



VIDEO 3.2



VIDEO 3.3



VIDEO 3.4

b) Skissera systemets amplitudkaraktäristik |H(w)| och ange filtertyp.

Filtertyper:

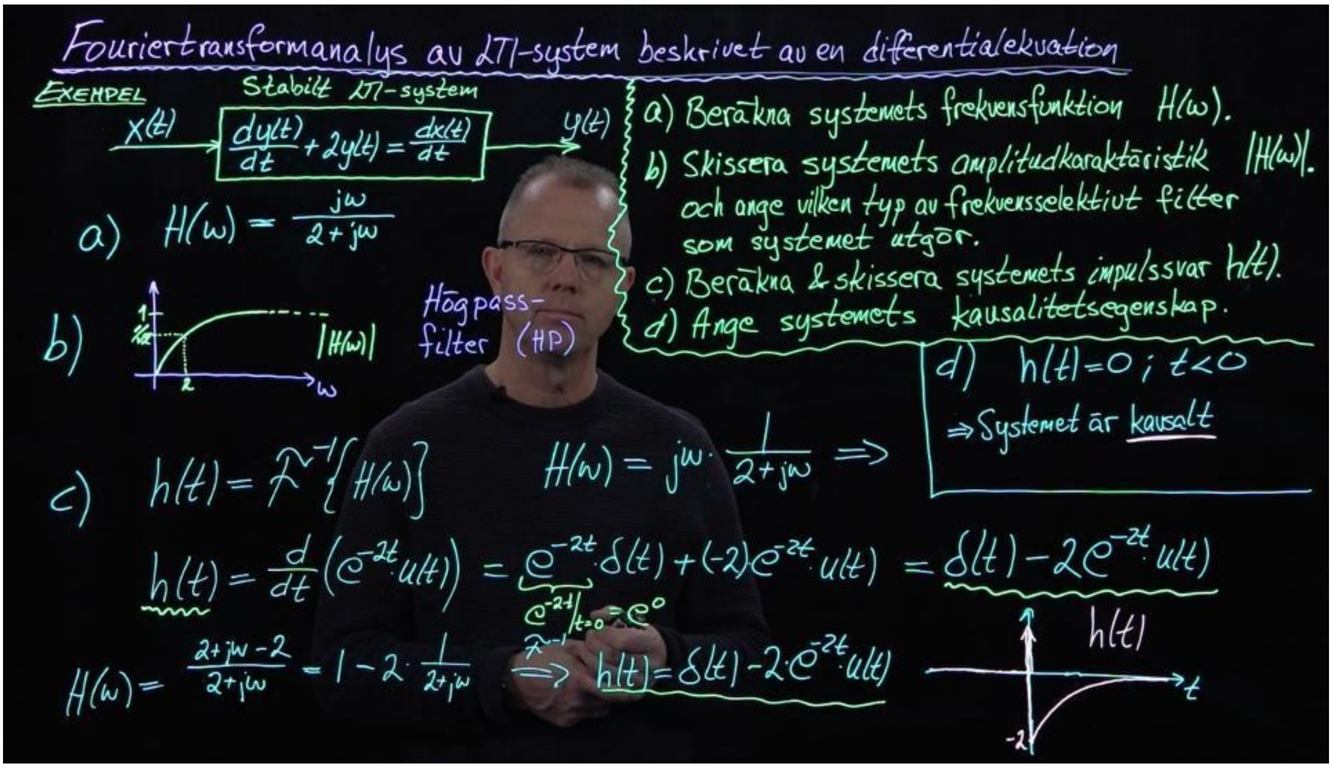
Lågpassfilter

Högpassfilter

Bandpassfilter

Bandspärrfilter

VIDEO 3.5



c) Beräkna och skissera systemets impulssvar h(t).
d) Ange systemets kausalitetsegenskap.

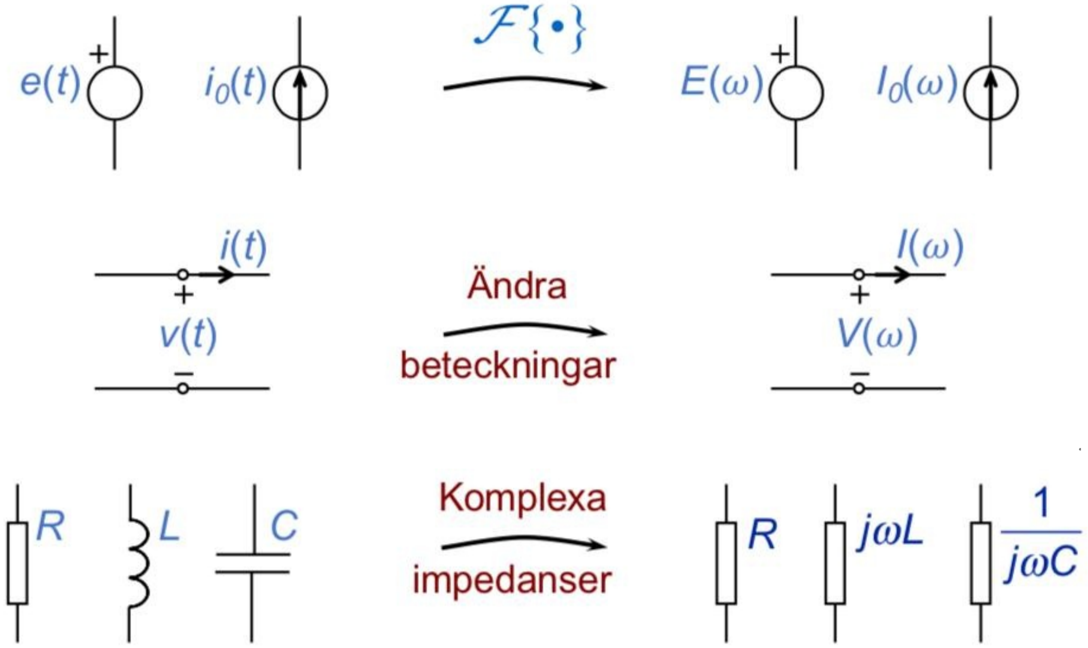
Kretsberäkningar, linjära *RLC*-nät

(för *passiva kretselement och fouriertransformerbara källor*)

Metodik: Använd ***jω*-metoden** för beräkning av godtycklig spänning/ström $y(t)$
(begynnelsevillkor ≠ 0, dvs. ev. lagrad energi i L & C, kan *inte* hanteras)

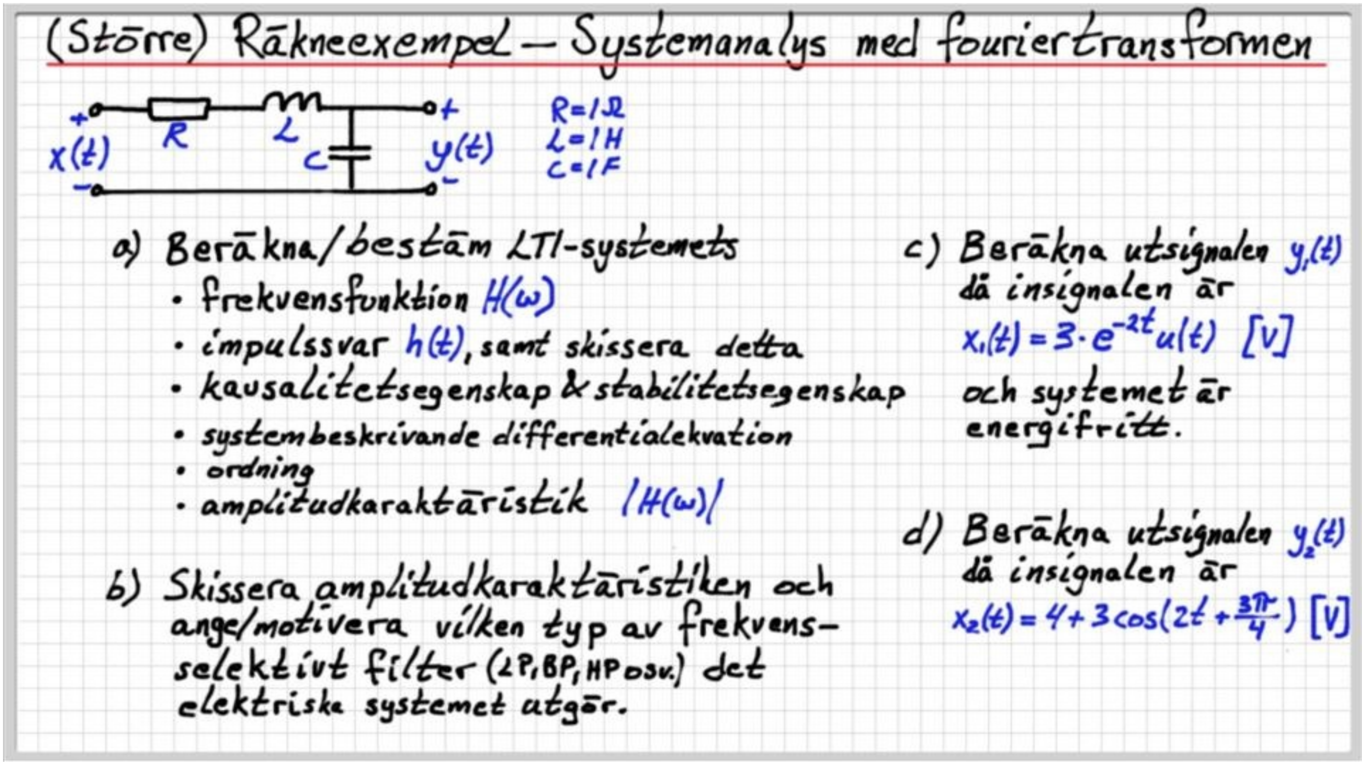
Steg 1–3 = Gör om nätet till ekvivalent **komplexschema**

1)
2)
3)

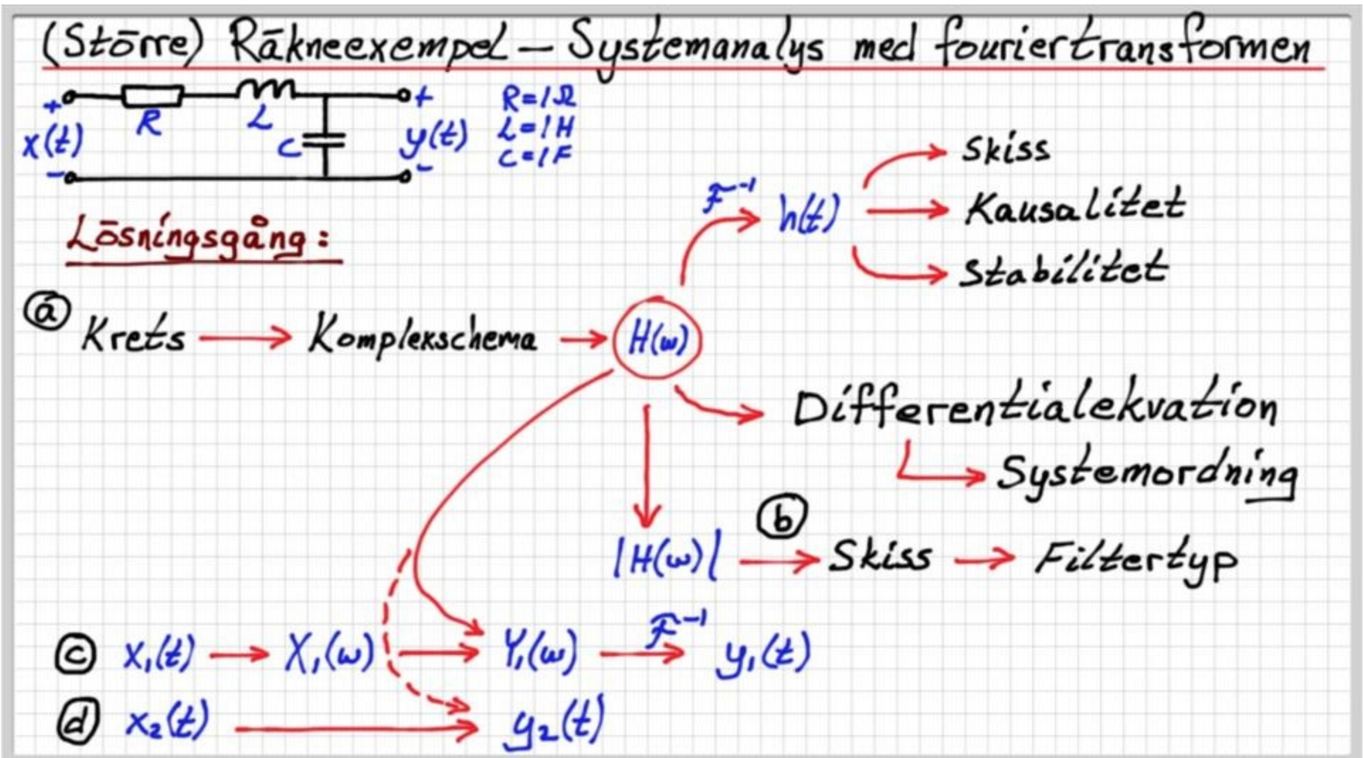


4) Likströmsteori $\Longrightarrow$ Sökt storhets fouriertransform ($Y(\omega)$)

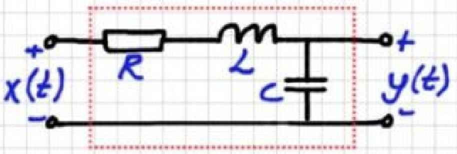
5) Inverstransformera $\Longrightarrow$ Sökt storhets tidsuttryck ($y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\}$)



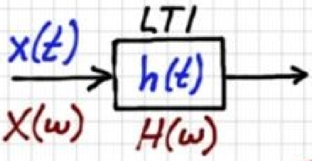
Lösningen stegas fram och och gås igenom steg för steg i en särskild app.
Vi bör hinna med åtminstone halva deluppgift a) under denna föreläsning – resten av a) samt b), c) & d) gås igenom under nästa föreläsning.



(Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



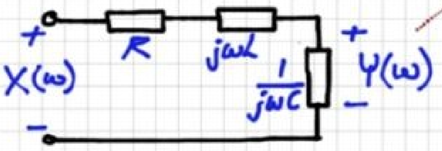
$\Rightarrow$



$y_{zs}(t) = (x * h)(t)$

$Y_{zs}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$

a) Komplexschema:



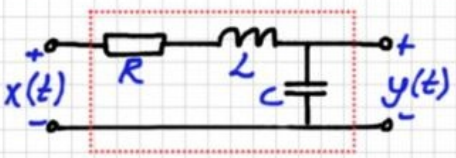
Spänningsdelning $\Rightarrow$

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + (R + j\omega L)}$$

$$\Rightarrow \underline{H(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC + j^2\omega^2 LC} = \underline{\frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega}}$$

$R = 1\,\Omega,\ L = 1\,H,\ C = 1\,F$

(Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



a) $H(\omega) = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega}$

$h(t) = ?$ $\quad h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ Svår att beräkna här!

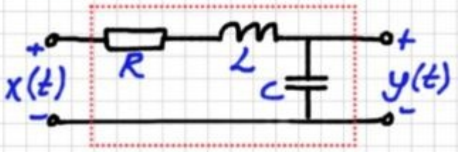
Sök istället transformpar i formelsamlingen!

Nämnaren i $H(\omega)$: $(j\omega)^2 + j\omega + 1 = \left(j\omega + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

Formels. Tab. 3:11 $\Rightarrow$ $e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t) \Longleftrightarrow \frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$ Här: $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ \omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{rad/s} \end{cases}$

Dvs. $H(\omega) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(j\omega + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \Rightarrow \underline{h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)}$

(Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



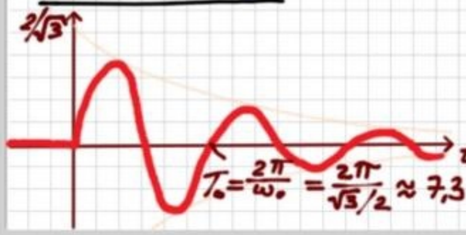
a) $H(\omega) = \frac{1}{1-\omega^2 + j\omega}$

Formels. Tab. 3:11 $\Rightarrow e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t) \Longleftrightarrow \frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2 + \omega_0^2}$

Här: $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ \omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{rad/s} \end{cases}$

Dvs. $H(\omega) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{(j\omega + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \Longrightarrow h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)u(t)$

Skissera $h(t)$:

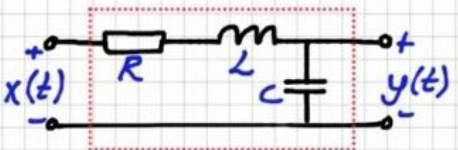


$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}/2} \approx 7{,}3$ sek

- $h(t) = 0$ för $t < 0 \Rightarrow$ Systemet är kausalt
- $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \; \left(= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1/2} = \frac{4}{\sqrt{3}}\right) < \infty$

$\Rightarrow$ Systemet är stabilt

(Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



a) $H(\omega) = \frac{1}{1-\omega^2 + j\omega}$

$h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)u(t)$

Kausalt & stabilt LTI-system

Differentialekvationsbeskrivning?

$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{(j\omega)^2 + j\omega + 1} \Longrightarrow (j\omega)^2 \cdot Y(\omega) + j\omega \cdot Y(\omega) + Y(\omega) = X(\omega)$

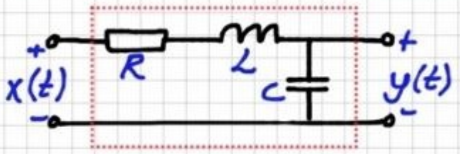
$\mathcal{F}^{-1}\{VL\} = \mathcal{F}^{-1}\{HL\}$, med $\frac{d^n y(t)}{dt^n} \Longleftrightarrow (j\omega)^n \cdot Y(\omega) \Longrightarrow$

$$\boxed{\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)}$$

Systemets ordning = differentialekvationens ordning = 2

(= antalet reaktiva nätelement, L & C)

(Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



a) $H(\omega) = \frac{1}{1-\omega^2+j\omega}$

$h(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t)$

$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

Kausalt & stabilt LTI-system

Ordning = 2

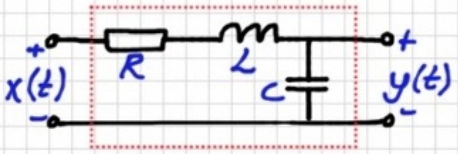
Beräkna systemets amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$

$$|H(\omega)| = \left|\frac{1}{1-\omega^2+j\omega}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}}$$

Lösning av deluppgifterna ~~b)~~, c) & d) kommer under nästa föreläsning!

Ändrat efter föreläsningen:
Vi hann även med uppgift b) under föreläsningen – se nästa sida!

(Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



a) $H(\omega)=\frac{1}{1-\omega^2+j\omega}$

$h(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$

$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$

Kausalt & stabilt LTI-system

Ordning = 2

$|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}}$

b) Skissera $|H(\omega)|$ och ange filtertyp.

Beräkna exakt

1) För $\omega=0$ 2) Då $\omega\to\infty$

3) För minst ett annat intressant/lämpligt ω.

Tumregel, systemordning 2:

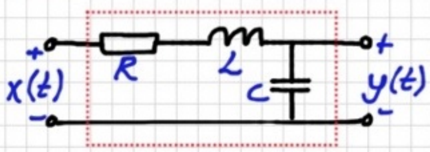
Välj det ω för vilket $\mathrm{Re}\{\text{nämnaren i } H(\omega)\}=0 \Rightarrow 1-\omega^2=0 \Rightarrow \omega=(\pm)\ 1$ rad/s

1) $H(0)=\frac{1}{1-0^2+j0}=1$

2) $\lim_{\omega\to\infty}|H(\omega)|=\lim_{\omega\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}-1+j\frac{1}{\omega}}\right|=\frac{0}{1}=0$

3) $|H(1)|=\left|\frac{1}{0+j}\right|=1$

(Större) Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



a) $H(\omega)=\frac{1}{1-\omega^2+j\omega}$

$h(t)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$

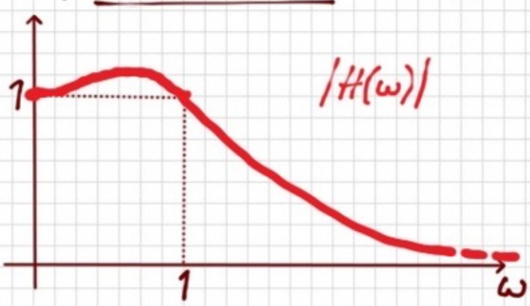
$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$

Kausalt & stabilt LTI-system

Ordning = 2

$|H(\omega)|=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)^2+\omega^2}}$

b) Skissera $|H(\omega)|$ och ange filtertyp.



1) $H(0)=\frac{1}{1-0^2+j0}=1$

2) $\lim_{\omega\to\infty}|H(\omega)|=\lim_{\omega\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2}-1+j\frac{1}{\omega}}\right|=\frac{0}{1}=0$

3) $|H(1)|=\left|\frac{1}{0+j}\right|=1$

LP-filter!

(Examinatorn motiverar muntligen)