Linjära System – Föreläsning 17:
Laplacetransformanalys av LTI-system

Förberedande video:

- Relationen mellan fouriertransformen och laplacetransformen
  - $X(\omega) = X(s=j\omega)$ om $j\omega$–axeln ligger i konvergensområdet för $X(s)$
  - Flera exempel på signaler – deras fouriertransform respektive laplacetransform

---

Laplacetransformanalys av LTI-system:

- Systemfunktionen $H(s)$ för LTI-system
- Pol-nollställediagram – en grafisk representation av laplacetransformer
- Relationen mellan polernas placering hos en laplacetransform och motsvarande tidsfunktion
- Egenskaper hos $H(s)$ för stabila och kausala LTI-system
- Överlagrade pol-nollställediagram

Fouriertransformanalys av tidsdiskreta signaler

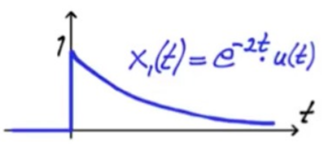
Fouriertransformen vs. laplacetransformen

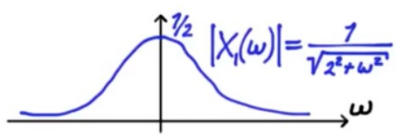
Videon

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-st}\,dt$$

$$\Rightarrow X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega} = X(j\omega)$$

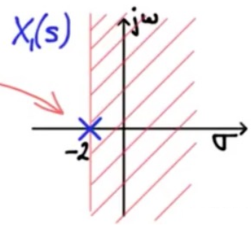




Exempel:

$$\mathcal{F}\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{2+j\omega}$$

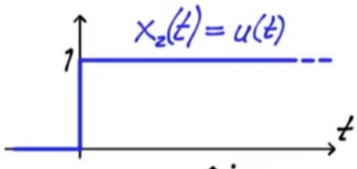
$$\mathcal{L}\{e^{-2t}u(t)\} = \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

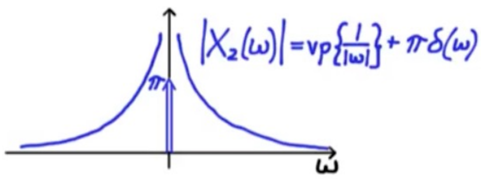


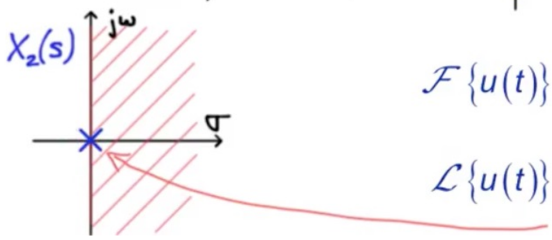
Fouriertransformen vs. laplacetransformen

Videon

$$
\left.\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x(t)\} &= X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\
\mathcal{L}\{x(t)\} &= X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega} = X(j\omega)}}
$$







$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \text{vp}\left\{\frac{1}{j\omega}\right\} + \pi\delta(\omega)$$

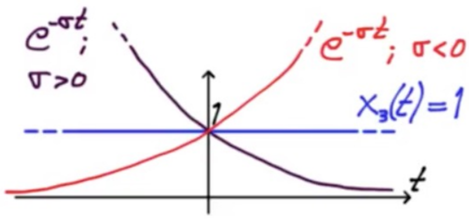
$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

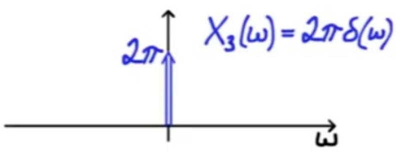
Exempel, $X(\omega)$ & $X(s)$ för frekvenssignaler

Videon

$\cos(0 \cdot t) = 1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$\mathcal{L}\{1\} \nexists$



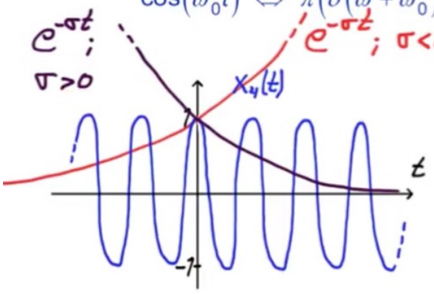


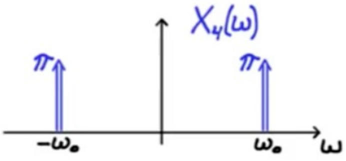
Exempel, $X(\omega)$ & $X(s)$ för frekvenssignaler

Videon

$$\cos(0\cdot t)=1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \qquad \mathcal{L}\{1\}\ \nexists$$

$$\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi\left(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right) \qquad \mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\}\ \nexists$$





Exempel, $X(\omega)$ & $X(s)$ för frekvenssignaler

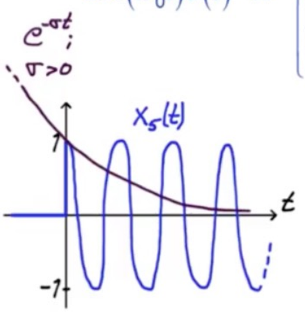
Videon

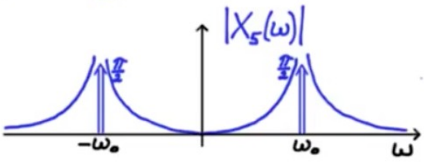
$$\cos(0\cdot t)=1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \qquad \mathcal{L}\{1\}\ \nexists$$

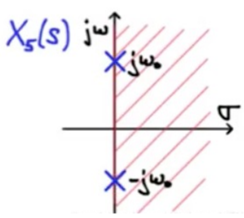
$$\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi\left(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right) \qquad \mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\}\ \nexists$$

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2};\quad \mathrm{Re}\{s\}>0 \\ \mathrm{vp}\left\{\dfrac{j\omega}{-\omega^2+\omega_0^2}\right\}+\dfrac{\pi}{2}\left(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right) \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} s^2+\omega_0^2=0 \\ \Rightarrow\ s=\pm j\omega_0 \end{array}\right)$$

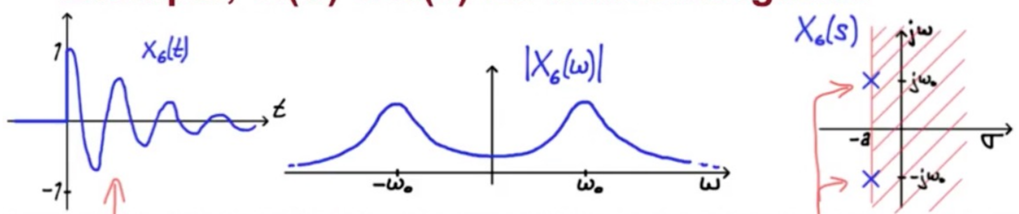






Videon

Exempel, $X(\omega)$ & $X(s)$ för frekvenssignaler



$$\cos(\omega_0 t)u(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{s}{s^2+\omega_0^2}; \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0 \\ \mathrm{vp}\left\{\dfrac{j\omega}{-\omega^2+\omega_0^2}\right\} + \dfrac{\pi}{2}\big(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\big) \end{cases}$$

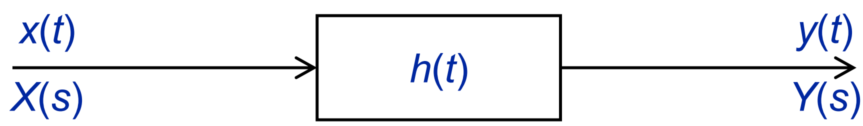
$$\begin{pmatrix} s^2+\omega_0^2 = 0 \\ \Rightarrow \; s = \pm j\omega_0 \end{pmatrix}$$

$$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}; \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a \\ \dfrac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2+\omega_0^2}; \quad a > 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (s+a)^2+\omega_0^2 = 0 \\ \Rightarrow \; s = -a \pm j\omega_0 \end{pmatrix}$$

SYSTEMANALYS

Kausalt energifritt LTI-system, ordning N



De flesta intressanta/praktiska LTI-system kan beskrivas med en differentialekvation:

$$\boxed{a_0 y(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = b_0 x(t) + \sum_{j=1}^{M} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}}$$

(från Fö 9 i VT1)

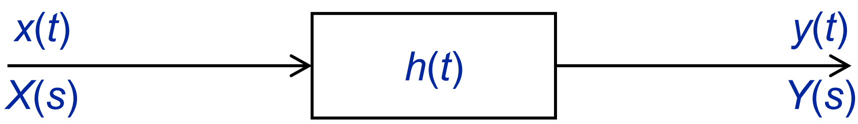
Antag $x(t<0) = 0$ (Kausalt system ger då $y(t<0) = 0$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ kan användas)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s) - y(0-)$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1}y(0-) - s^{n-2}y'(0-) - \cdots - \frac{d^{n-1}y(0-)}{dt^{n-1}}$$

SYSTEMANALYS

Kausalt energifritt LTI-system, ordning N



Vi har: $\begin{cases} x(t<0)=0 & \Rightarrow\ x(0-)=0,\ x'(0-)=0,\ \ldots \text{ osv.} \\ \text{Energifritt system} & \Rightarrow\ y(0-)=0,\ y'(0-)=0,\ \ldots \text{ osv.} \end{cases}$

$$\Rightarrow Y(s)\cdot\sum_{i=0}^{N} a_i s^i = X(s)\cdot\sum_{j=0}^{M} b_j s^j$$

$\Rightarrow$ **Systemfunktionen:**

Alt. "Överföringsfunktionen"

$$\boxed{H(s)=\frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}=\frac{\sum_{j=0}^{M} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}}$$

Systemfunktion, forts

Dvs. för energifria **LTI-system** (då $y_{zi}(t)=0 \Rightarrow y(t)=y_{zs}(t)$) gäller följande:

$$\boxed{Y(s)=X(s)H(s)}$$

Om *stabilt* system

$\Leftarrow\text{----}\ H(s)=\mathcal{L}\{h(t)\}$

$$\boxed{Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{y(t)=(x*h)(t)}$$

Systemegenskap	**$\mathcal{L}$-transformtyp**
Kausalt	Enkelsidig, $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$
Icke-kausalt	Dubbelsidig, $\mathcal{L}_{\mathrm{II}}$

- Om systemet **ej** är energifritt:

$$y(t)=(x*h)(t)+y_{zi}(t)$$

- OBS: $y_{zi}(t)$ kan bara erhållas från diff.ekv. m.h.a. $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$, inte $\mathcal{L}_{\mathrm{II}}$

Pol-Nollställediagram (grafisk repr. av $\mathcal{L}$)

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^{M}(s-n_j)}{\prod_{i=1}^{N}(s-p_i)}$$

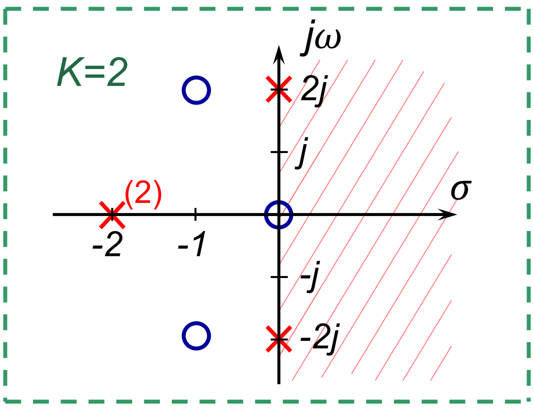
$K = \frac{b_m}{a_n}$: **Nivåkonstanten**

n_j : **Nollställen** till $H(s)$ ≡ *täljar*polynomets nollställen

p_i : **Poler** till $H(s)$ ≡ *nämnar*polynomets nollställen

Pol-Nollställediagram, forts

Exempel: $H(s) = \frac{2s^3+4s^2+10s}{s^4+4s^3+8s^2+16s+16} = 2 \cdot \frac{s \cdot \left((s+1)^2+2^2\right)}{(s+2)^2(s+2j)(s-2j)}$



Nollställen:

$n_0 = 0$ $n_1 = -1-2j$ $n_2 = -1+2j$

Poler:

$p_1 = p_2 = -2$ $p_3 = -2j$ $p_4 = 2j$

Konvergensområde för $H(s)$

om *kausalt* system: $\mathrm{Re}\{s\} > 0$

Poler, nollställen och tidsfunktion

- Laplacetransformens poler anger, tillsammans med deras respektive positioner, vilka typer av termer (dvs. signaltermer eller impulssvarstermer) som ingår i motsvarande tidsuttryck.

Enkelpol (reell):
($s = -a$, $\mathrm{Re}\{s\} > -a$) $\longrightarrow$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = e^{-at}\cdot u(t)$$

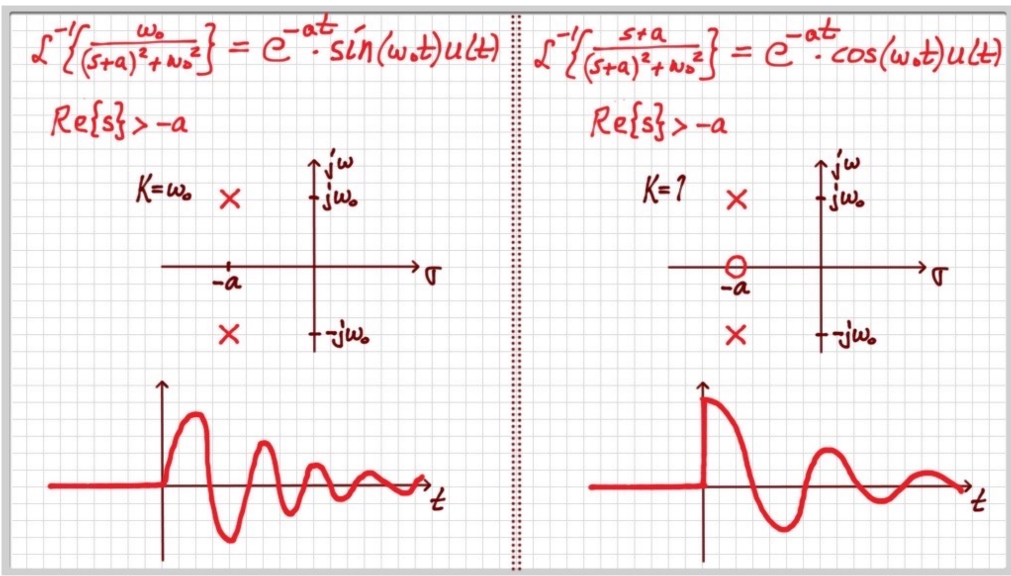
Enkla komplexkonj. polpar:
($s = -a \pm j\omega_0$, $\mathrm{Re}\{s\} > -a$) $\longrightarrow$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}\right\} = e^{-at}\cdot \sin(\omega_0 t)\cdot u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}\right\} = e^{-at}\cdot \cos(\omega_0 t)\cdot u(t)$$

Laplacetransformens nollställen inverkar främst på den relativa styrkan av de olika termerna.

Konsekvens, utan resp. med nollställe vid komplexkonjugerat polpar:



STABILITET

Energifritt LTI-system

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = (x * h)(t)$$

Vi vet: Systemet är stabilt omm $|x(t)| < \infty \;\rightarrow\; |y(t)| < \infty \quad \forall\; t$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) \quad \exists$$

Dvs. $j\omega$ -axeln ligger i konvergensområdet för $H(s)$

Dvs. för ett **stabilt LTI-system** gäller $\boxed{H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}}$

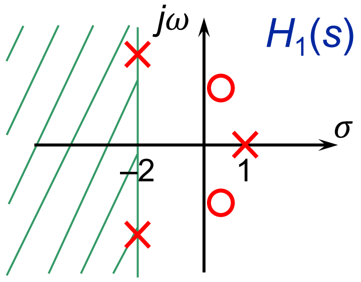
Marginellt stabilt LTI-system $\Leftrightarrow$ $j\omega$-axeln utgör en *rand* till konvergensområdet för $H(s)$ och alla dess poler på $j\omega$-axeln är *enkla*.

OBS: För $H(s)$ till stabila LTI-system gäller att antal poler ≥ antal nollställen

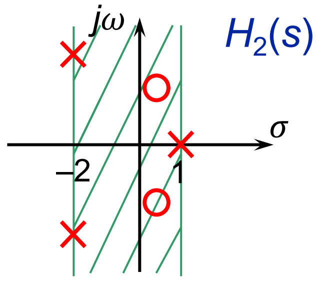
KAUSALITET & konvergensområde för $H(s)$

De tre typerna av sammanhängande konvergensområde för systemfunktionen $H(s)$ motsvarar tre olika kausalitetsfall:

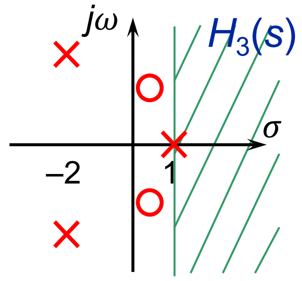
Antikausalt system	Allmänt icke-kausalt system	Kausalt system
$h_1(t \geq 0) = 0$	$h_2(t < 0,\, t \geq 0) \neq 0$	$h_3(t < 0) = 0$



$\mathrm{Re}\{s\} < -2$



$-2 < \mathrm{Re}\{s\} < 1$

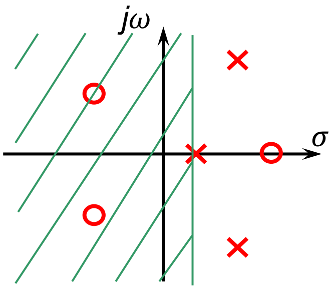


$\mathrm{Re}\{s\} > 1$

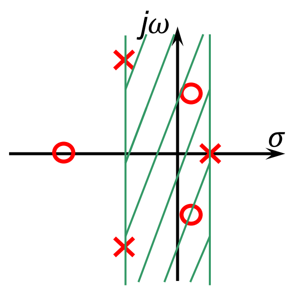
Stabilitet & Kausalitet (sammanfattning)

Polplaceringar hos $H(s)$ för **stabila LTI-system** (dvs. $j\omega$ -axeln ligger i konvergensområdet för $H(s)$) beroende på systemets **kausalitetsegenskap**:

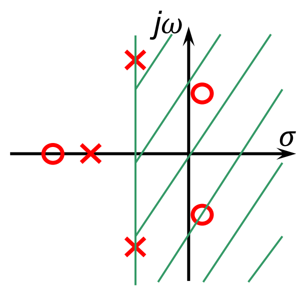
1) Stabilt & Antikausalt
$\Longrightarrow$ Alla poler i HHP



2) Stabilt & Allmänt icke-kausalt
$\Longrightarrow$ Poler i VHP & HHP



3) Stabilt & Kausalt
$\Longrightarrow$ Alla poler i VHP



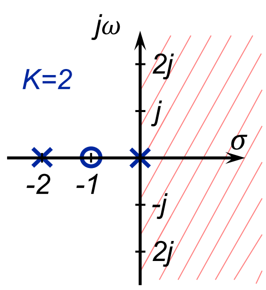
(*VHP/HHP = Vänster/Höger HalvPlan*)

Överlagrade pol-nollställediagram

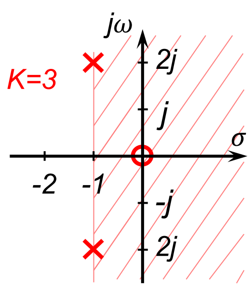
Exempel: $x(t) = \left(1 + e^{-2t}\right)u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$ (Kausalt LTI-system)

(Antag energifritt system $\Rightarrow y(t) = y_{zs}(t) = (x * h(t))$)

$$X_I(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} = \frac{2(s+1)}{s(s+2)}$$



$$H_I(s) = \frac{3s}{(s+1)^2 + 2^2}$$



$$Y_I(s) = X_I(s) \cdot H_I(s) = \frac{2(s+1)}{\cancel{s}(s+2)} \cdot \frac{3\cancel{s}}{(s+1)^2 + 2^2}$$