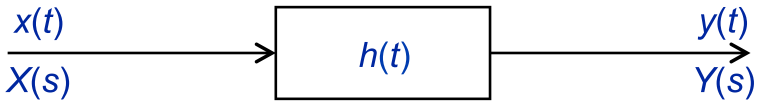
SYSTEMANALYS

Kausalt energifritt LTI-system, ordning N



De flesta intressanta/praktiska LTI-system kan beskrivas med en differentialekvation:

$$\boxed{a_0 y(t) + \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = b_0 x(t) + \sum_{j=1}^{M} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}}$$

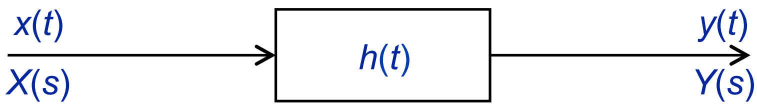
(*från ca Fö 9–10*)

Antag $x(t<0) = 0$ (Kausalt system ger då $y(t<0) = 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$ kan användas)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{I}}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = sY(s) - y(0-) \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{I}}\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0-) - s^{n-2} y'(0-) - \cdots - \frac{d^{n-1} y(0-)}{dt^{n-1}}$$

SYSTEMANALYS

Kausalt energifritt LTI-system, ordning N



Vi har:

$$\begin{cases} x(t<0) = 0 & \Rightarrow \quad x(0-) = 0, \; x'(0-) = 0, \; \ldots \quad \text{osv.} \\ \text{Energifritt system} & \Rightarrow \quad y(0-) = 0, \; y'(0-) = 0, \; \ldots \quad \text{osv.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; Y(s) \cdot \sum_{i=0}^{N} a_i s^i = X(s) \cdot \sum_{j=0}^{M} b_j s^j$$

$\Rightarrow$ **Systemfunktionen**:

Alt. "Överföringsfunktionen"

$$\boxed{H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i}}$$

Systemfunktion, forts

Dvs. för energifria **LTI-system** (då $y_{zi}(t) = 0 \implies y(t) = y_{zs}(t)$) gäller följande:

$$\boxed{Y(s) = X(s)H(s)}$$

Om *stabilt* system

$$\boxed{Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)} \iff \boxed{y(t) = (x * h)(t)}$$

$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$

Systemegenskap	**$\mathcal{L}$-transformtyp**
Kausalt	Enkelsidig, $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$
Icke-kausalt	Dubbelsidig, $\mathcal{L}_{\mathrm{II}}$

- Om systemet **ej** är energifritt:
  $y(t) = (x * h)(t) + y_{zi}(t)$
- OBS: $y_{zi}(t)$ kan bara erhållas från diff.ekv. m.h.a. $\mathcal{L}_{\mathrm{I}}$, inte $\mathcal{L}_{\mathrm{II}}$

Pol-Nollställediagram (*grafisk repr. av $\mathcal{L}$*)

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{N} a_i s^i} = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^{M} (s - n_j)}{\prod_{i=1}^{N} (s - p_i)}$$

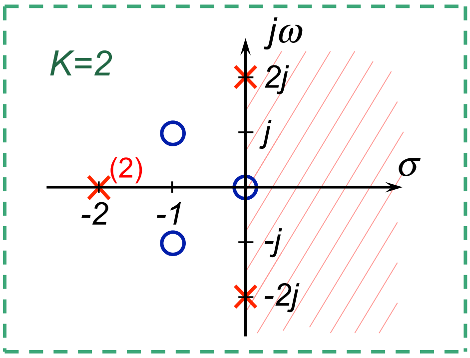
$K = \dfrac{b_m}{a_n}$: **Nivåkonstanten**

n_j : **Nollställen** till $H(s)$ ≡ *täljar*polynomets nollställen

p_i : **Poler** till $H(s)$ ≡ *nämnar*polynomets nollställen

Pol-Nollställediagram, forts

Exempel: $H(s) = \dfrac{2s^3+4s^2+4s}{s^4+4s^3+8s^2+16s+16} = 2\cdot\dfrac{s(s+1+j)(s+1-j)}{(s+2)^2(s+2j)(s-2j)}$



Nollställen:

$n_0 = 0$ $\quad n_1 = -1-j$ $\quad n_1 = -1+j$

Poler:

$p_1 = p_2 = -2$ $\quad p_3 = -2j$ $\quad p_4 = 2j$

Konvergensområde för $H(s)$

om *kausalt* system: $\text{Re}\{s\} > 0$

Poler, nollställen och tidsfunktion

- Laplacetransformens poler anger, tillsammans med deras respektive positioner, vilka typer av termer (dvs. signaltermer eller impulssvarstermer) som ingår i motsvarande tidsuttryck.

Enkelpol (reell):
($s = -\alpha,\ \text{Re}\{s\} > -\alpha$)

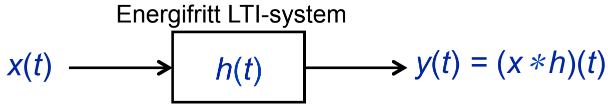
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\alpha}\right\} = e^{-\alpha t}\cdot u(t)$$

Enkla komplexkonj. polpar:
($s = -\alpha \pm j\omega_0,\ \text{Re}\{s\} > -\alpha$)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}\right\} = e^{-\alpha t}\cdot \sin(\omega_0 t)\cdot u(t)$$

- Laplacetransformens nollställen inverkar främst på den relativa styrkan av de olika termerna.

STABILITET



Vi vet: Systemet är stabilt omm $|x(t)| < \infty \;\rightarrow\; |y(t)| < \infty \quad \forall\; t$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) \quad \exists$$

Dvs. $j\omega$-axeln ligger i konvergensområdet för $H(s)$

Dvs. för ett **stabilt LTI-system** gäller $\boxed{H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}}$

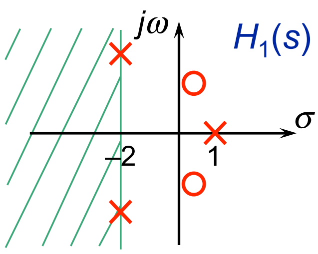
Marginellt stabilt LTI-system $\Leftrightarrow$ $j\omega$-axeln utgör en *rand* till konvergensområdet för $H(s)$ och alla dess poler på $j\omega$-axeln är *enkla*.

OBS: För $H(s)$ till stabila LTI-system gäller att antal poler ≥ antal nollställen

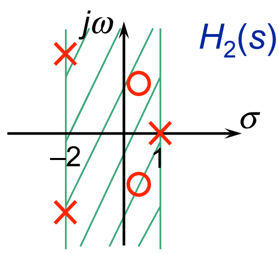
KAUSALITET & konvergensområde för $H(s)$

De tre typerna av sammanhängande konvergensområde för systemfunktionen $H(s)$ motsvarar tre olika kausalitetsfall:

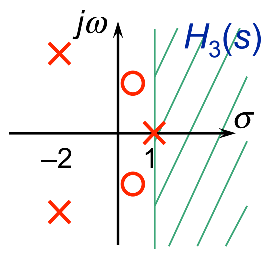
Antikausalt system	Allmänt icke-kausalt system	Kausalt system
$h_1(t \geq 0) = 0$	$h_2(t < 0,\; t \geq 0) \neq 0$	$h_3(t < 0) = 0$



$\mathrm{Re}\{s\} < -2$



$-2 < \mathrm{Re}\{s\} < 1$



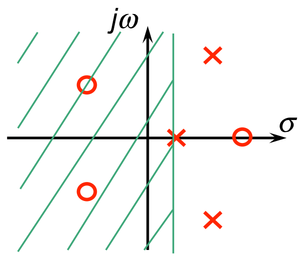
$\mathrm{Re}\{s\} > 1$

Stabilitet & Kausalitet (sammanfattning)

Polplaceringar hos $H(s)$ för **stabila LTI-system** (dvs. $j\omega$-axeln ligger i konvergensområdet för $H(s)$) beroende på systemets **kausalitetsegenskap**:

1) Stabilt & Antikausalt

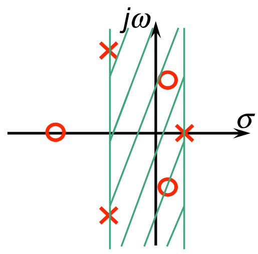
$\Longrightarrow$ Alla poler i HHP



(VHP/HHP = Vänster/Höger HalvPlan)

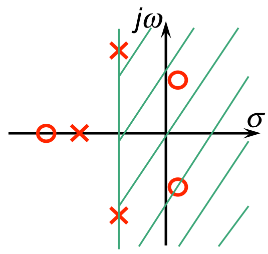
2) Stabilt & Allmänt icke-kausalt

$\Longrightarrow$ Poler i VHP & HHP



3) Stabilt & Kausalt

$\Longrightarrow$ Alla poler i VHP

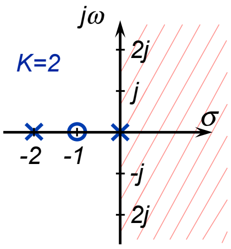


Överlagrade pol-nollställediagram

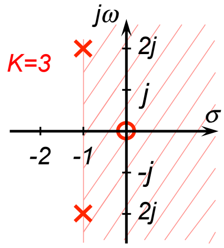
Exempel: $x(t) = \left(1 + e^{-2t}\right)u(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$ (Kausalt LTI-system)

(Antag energifritt system $\Rightarrow y(t) = y_{zs}(t) = (x * h(t))$)

$$X_{\mathrm{I}}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} = \frac{2(s+1)}{s(s+2)}$$



$$H_{\mathrm{I}}(s) = \frac{3s}{(s+1)^2 + 2^2}$$



$$Y_{\mathrm{I}}(s) = X_{\mathrm{I}}(s) \cdot H_{\mathrm{I}}(s) = \frac{2(s+1)}{\cancel{s}(s+2)} \cdot \frac{3\cancel{s}}{(s+1)^2 + 2^2}$$