

Förberedande videor:

1. Laplacetransformen av en derivata (som inledning till Video 2)
2. Lösning av en differentialekvation med hjälp av laplacetransformen
3. Stabilitetsrelationer för LTI-system

Laplacetransformanalys av LTI-system:

- Räkneexempel – från PPT-bild 18: "Överlagrade pol-nollställediagram"
- Att erhålla $|H(\omega)|$ och $\arg H(\omega)$ från pol-nollställevektorer för $H(s)$
- Kretsberäkningar med hjälp av laplacetransformen
- Räkneexempel – jämförelse mellan fouriertransformanalys och laplacetransformanalys
- Stabilisering av instabila LTI-system genom återkoppling

(Samt några avslutande tips och råd för projektarbetet – genomgång i separat video)

ENKELSIDIG LAPLACETRANSFORM AV EN DERIVATA

$Y(s) = \mathcal{L}_I\{y(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} y(t) e^{-st} dt$; $\text{Re}\{s\} = \sigma > \sigma_0$ (där är $|Y(s)| < \infty$) $\Rightarrow$

$Y(s) = \mathcal{F}\{y(t)e^{\sigma t}\} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)e^{\sigma t}| dt < \infty$

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)e^{-st} = 0$

$\mathcal{L}_I\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} \underbrace{\frac{d}{dt} \left[\frac{y(t)}{e^{-st}} \right]}_{\frac{d}{dt} \left[\frac{y(t)}{e^{-st}} \right]} dt = \left[\frac{y(t)}{e^{-st}} \right]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} \underbrace{\frac{d}{dt} e^{-st}}_{-s e^{-st}} y(t) dt$

$= \left[y(t) e^{-st} \right]_{0^-}^{\infty} - \int_{0^-}^{\infty} y(t) \cdot (-s) e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) e^{-st} - y(0^-) \cdot \underbrace{e^0}_{=1} + s \int_{0^-}^{\infty} y(t) e^{-st} dt$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t)}{e^{\sigma t}} \cdot \underbrace{e^{-j\omega t}}_{| \cdot | = 1} = 0 \Rightarrow s \cdot Y(s) - y(0^-)$

$\mathcal{L}_I\{y(t)\} = s \cdot Y(s)$

Video 1.1

ENKELSIDIG LAPLACETRANSFORM AV EN DERIVATA

$$Y(s) = \mathcal{L}_I\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t)e^{-st} dt; \operatorname{Re}\{s\} = \sigma > \sigma_0 \text{ (där är } |Y(s)| < \infty) \Rightarrow$$

$$Y(s) = \mathcal{F}\{y(t)e^{-\sigma t}\} \Rightarrow \int_0^\infty |y(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)e^{-\sigma t} = 0$$

$$\mathcal{L}_I\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = s \cdot Y(s) - y(0-) = W(s)$$

$$\mathcal{L}_I\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} = ? \quad \mathcal{L}_I\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = ?$$

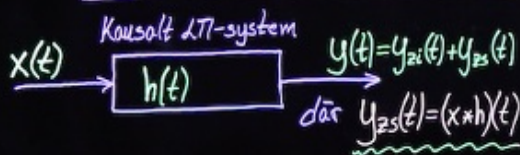
$$\mathcal{L}_I\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} = \mathcal{L}_I\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)\right\} = s \cdot W(s) - w(0-) = s(sY(s) - y(0-)) - y'(0-)$$

$$= s^2 Y(s) - s \cdot y(0-) - y'(0-)$$

$$\mathcal{L}_I\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1} y(0-) - s^{n-2} y'(0-) - \dots - \frac{d^{n-1} y(0-)}{dt^{n-1}}$$

Video 1.2

LÖSNING AV DIFFERENTIALEKVATION M.H.A. LAPLACETRANSFORMEN



$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$y(0-) = 2, y'(0-) = 1, x(t) = e^{-t} u(t) \quad \boxed{y(t) = ?}$$

$$\mathcal{L}_I\{V_2\} = \mathcal{L}_I\{H_2\} \Rightarrow \mathcal{L}_I\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} + 5 \mathcal{L}_I\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 6 \mathcal{L}_I\{y(t)\} = \mathcal{L}_I\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + \mathcal{L}_I\{x(t)\}$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - \underbrace{s y(0-)}_{=2} - \underbrace{y'(0-)}_{=1} + 5 \left(s Y(s) - \underbrace{y(0-)}_{=2} \right) + 6 Y(s) = s X(s) - \underbrace{X(0-)}_{=0} + X(s)$$

$$\Rightarrow (s^2 + 5s + 6) Y(s) - (2s + 1 + 2s) = X(s)(s + 1)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2s + 11}{s^2 + 5s + 6} + X(s) \cdot \frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6} = H(s) := \frac{Y_{2s}(s)}{X(s)}$$

Video 2.1

LÖSNING AV DIFFERENTIALKVATION M.H.A. LAPLACETRANSFORMEN

Kausalt LTI-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s) \rightarrow y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

där $y_{zs}(t) = (x * h)(t)$

$H(s)$

$y(0^-) = 2, y'(0^-) = 1, x(t) = e^{-4t} u(t)$

$y(t) = ?$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{2s+11}{s^2+5s+6}}_{Y_{zi}(s)} + \underbrace{X(s) \cdot \frac{s+1}{s^2+5s+6}}_{Y_{zs}(s)} = \frac{2s+11}{(s+2)(s+3)} + \frac{1}{s+4} \cdot \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

$$= 7 \cdot \frac{1}{s+2} - 5 \cdot \frac{1}{s+3} + \frac{1}{2} \left(-3 \frac{1}{s+4} - \frac{1}{s+2} + 4 \frac{1}{s+3} \right)$$

$\text{Re}\{s\} > -2 \quad \text{Re}\{s\} > -3 \quad \text{Re}\{s\} > -4 \quad \text{Re}\{s\} > -2 \quad \text{Re}\{s\} > -3$

$\Rightarrow y(t) = \underbrace{(7e^{-2t} - 5e^{-3t}) u(t)}_{h(t)\text{-termen}} + \underbrace{\frac{1}{2}(-3e^{-4t} - e^{-2t} + 4e^{-3t}) u(t)}_{x(t)\text{-termen}} = \underbrace{\left(\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t}\right) u(t)}_{y_h(t)} - \underbrace{\frac{3}{2}e^{-4t} u(t)}_{y_p(t)}$

STABILITETSRELATIONER

Stabilit energifritt LTI-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(\omega) \rightarrow y(t) (=y_{zs}(t))$

$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$

$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

$H(s) = \frac{T(s)}{N(s)}$

STABIL LTI-SYSTEM

$|x(t)| < \infty \Rightarrow |y(t)| < \infty$

$\text{grad } N(s) \geq \text{grad } T(s)$

$\# \text{poler} \geq \# \text{nollst. hos } H(s)$

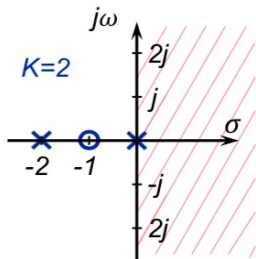
$j\omega\text{-axeln ingår i konvergensområdet för } H(s)$

Överlagrade pol-nollställediagram

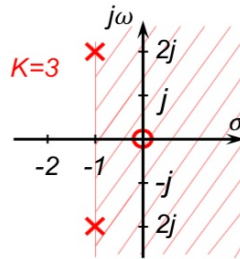
Exempel: $x(t) = (1 + e^{-2t})u(t)$ $\xrightarrow{\text{Kausalt LTI-system}}$ $\boxed{h(t)}$ $\rightarrow y(t)$ (Antag energifritt system $\Rightarrow y(t) = y_{zs}(t) = (x * h(t))$)

$$X_I(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}$$

$$= \frac{2(s+1)}{s(s+2)}$$

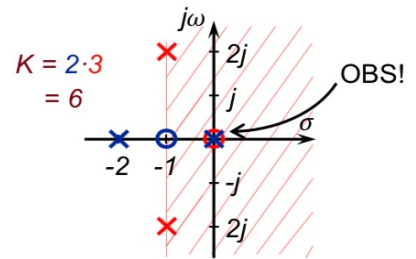


$$H_I(s) = \frac{3s}{(s+1)^2 + 2^2}$$



$$Y_I(s) = X_I(s) \cdot H_I(s)$$

$$= \frac{2(s+1)}{\cancel{s}(s+2)} \cdot \frac{3\cancel{s}}{(s+1)^2 + 2^2}$$



Copyright © Lasse Alfredsson, LITH

a) Beräkna impulssvaret $h(t)$

b) Beräkna utsignalen $y(t)$

$|H(\omega)|$ & $\arg H(\omega)$ från $H(s)$

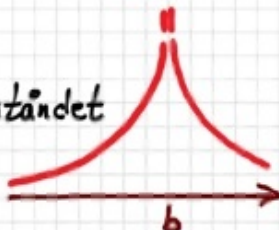
$|H(s)|$ är $\begin{cases} = 0 & \text{i nollställen} \\ \text{Liten nära nollställen \& växer linjärt m. avståndet} \end{cases}$

$$H(s) = \frac{s-a}{s-b}$$



$|H(s)|$ är $\begin{cases} = \infty & \text{i poler} \\ \text{stor nära poler \& avtar som } \frac{1}{|s|} \text{ med avståndet} \end{cases}$

$$H(s) = \frac{s-a}{s-b}$$



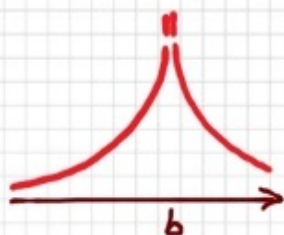
$\Rightarrow$ Nollställenas & polernas "samverkan" ger $|H(s)|$ & $\arg H(s)$ i varje punkt i s -planet, bl.a. längs $j\omega$ -axeln.

$|H(\omega)|$ & $\arg H(\omega)$ från $H(s)$

Nivåkurvor:

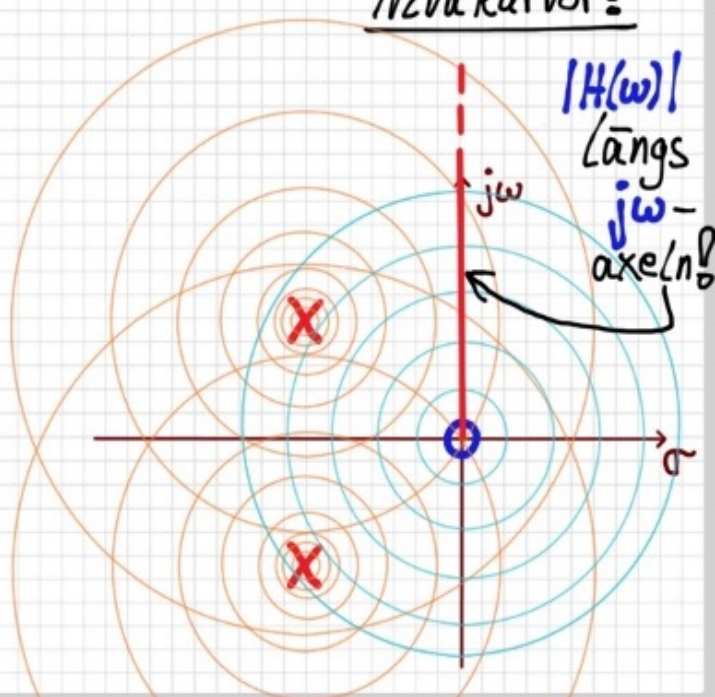
Poler:

$$H(s) = \frac{s-a}{s-b}$$



Nollställen:

$$H(s) = \frac{s-a}{s-b}$$



$|H(\omega)|$ & $\arg H(\omega)$ från pol-nollställevektorer

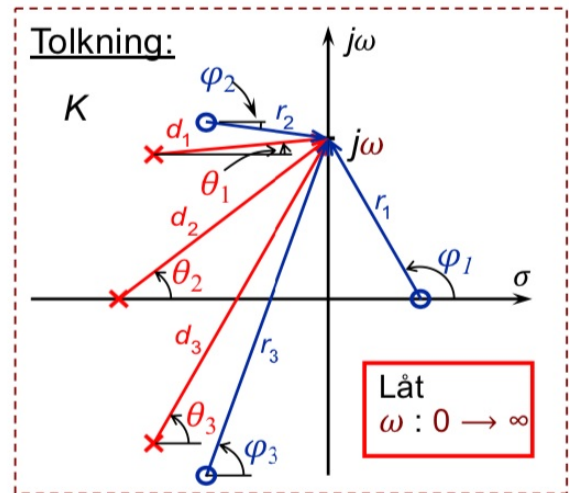
Stabilt LTI-system
 $\Downarrow$
 $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \left\{ \begin{array}{l} K \cdot \frac{(j\omega - n_1)(j\omega - n_2) \cdots (j\omega - n_M)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_N)} = K \cdot \frac{r_1 e^{j\phi_1} \cdot r_2 e^{j\phi_2} \cdots r_M e^{j\phi_M}}{d_1 e^{j\theta_1} \cdot d_2 e^{j\theta_2} \cdots d_N e^{j\theta_N}} \\ |H(\omega)| e^{j \arg H(\omega)} \end{array} \right.$

Amplitudkaraktärstiken:

$$|H(\omega)| = |K| \cdot \frac{r_1 \cdot r_2 \cdots r_M}{d_1 \cdot d_2 \cdots d_N}$$

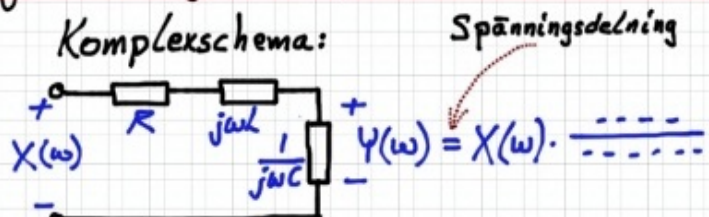
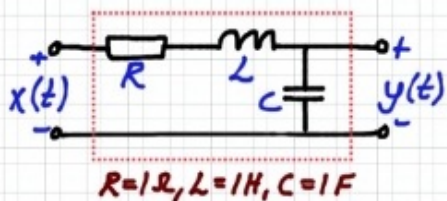
Faskaraktärstiken:

$$\arg H(\omega) = \arg K + (\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_M) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N)$$



En större demonstration / animering i Matlab av hur $|H(\omega)|$ och $\arg H(\omega)$ kan erhållas från pol-nollställevektorer för $H(s)$

Fö 14-15: Räkneexempel – Systemanalys med fouriertransformen



$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 - \omega^2 + j\omega}$$

Skissera $|H(\omega)|$:

Beräkna exakt

- 1) $H(0) = 1$
- 2) $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(\omega)| = 0$
- 3) Tumregel, systemordning 2: Välj det ω för vilket $\operatorname{Re}\{\text{nämnaren i } H(\omega)\} = 0$
 $\Rightarrow \omega = \pm 1 \text{ rad/s} : |H(\pm 1)| = 1$



Kretsberäkningar, linjära **RLMC**-nät

(passiva kretselement, laplacetransformerbara källor)

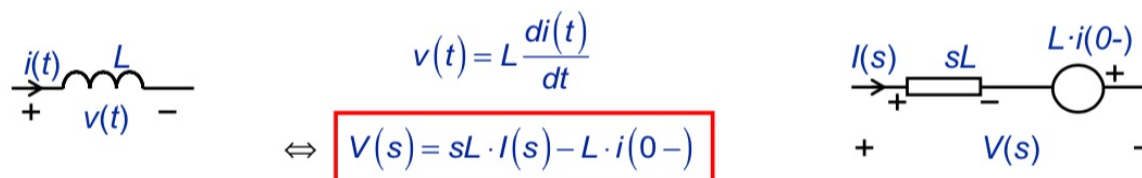
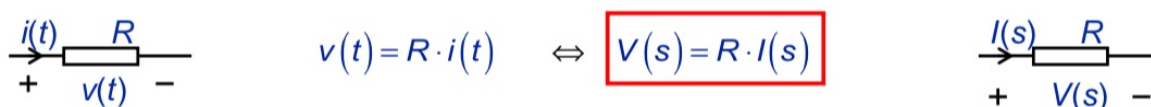
METODIK, beräkna godtycklig nätspänning / -ström:



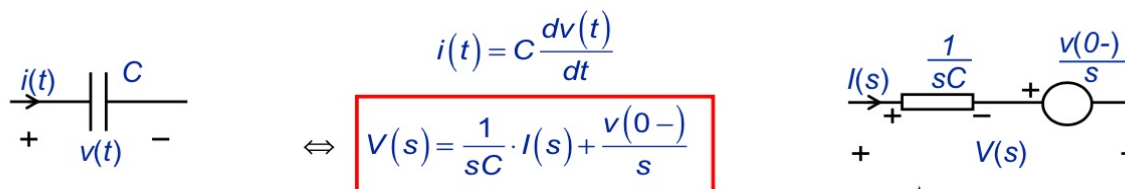
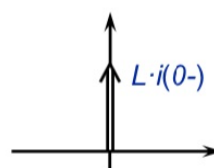
Om nätförändringar sker vid $t = t_0$ (här antas $t_0 = 0$) $\Rightarrow$ Betrakta alla källor som inkopplade vid $t = t_0 \Rightarrow \mathcal{L}\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = X(s)e^{-st_0}$



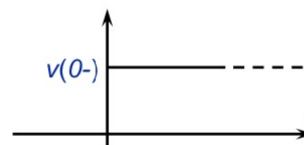
3) Ersätt passiva nätelement med **operatorscheman**:



$L \cdot i(0-)$ motsvarar en impulsformad spänning med styrkan $L \cdot i(0-)$ i tidsplanet ($\mathcal{L}^{-1}\{K\} = K \cdot \delta(t)$):



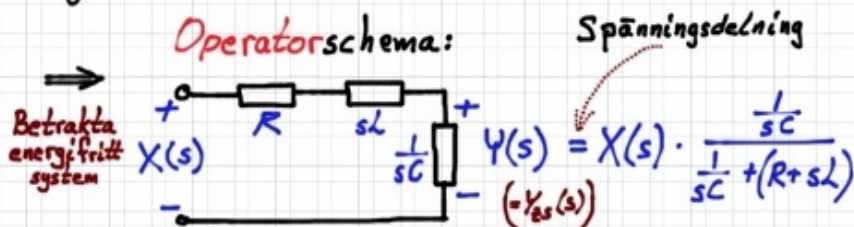
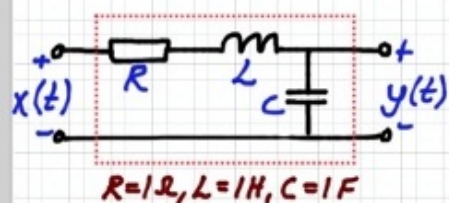
$v(0-)/s$ motsvarar en stegformad spänning med höjden $v(0-)$ i tidsplanet ($\mathcal{L}^{-1}\{K/s\} = K \cdot u(t)$):



4) Likströmsteori $\Rightarrow$ Sökt storhets laplacetransform ($Y(s)$)

5) Inverstransformera $\Rightarrow$ Sökt storhets tidsuttryck ($y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$)

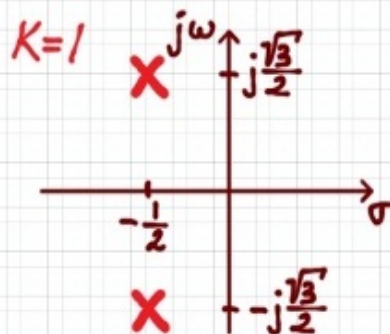
Räkneexempel – Systemanalys med Laplace transformen



$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1} = \frac{1}{(s + \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \Rightarrow \text{Poler i } s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pol-nollställediagram för $H(s)$:

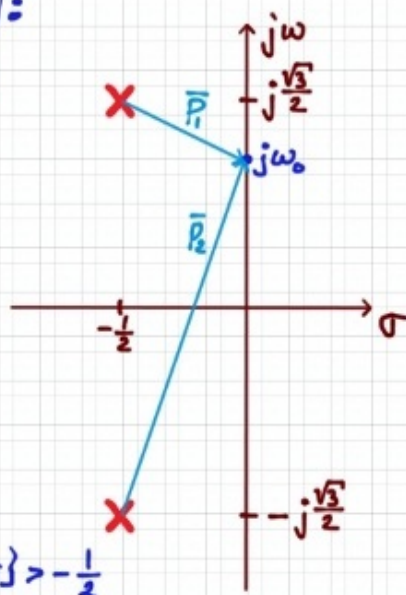
- Kausalt system (ty fysikaliskt)
 $\Rightarrow$ Konv.omr. $\text{Re}\{s\} > -\frac{1}{2}$
- $j\omega$ -axeln ligger i konv.området för $H(s)$
 $\Rightarrow$ systemet är stabilt



Skissera $|H(\omega)|$ utgående från pol- och nollställevektorer i pol-nollställediagrammet för $H(s)$

$H(s) =$

$K=1$



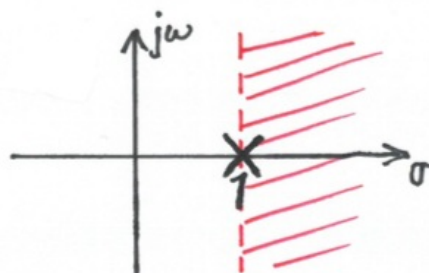
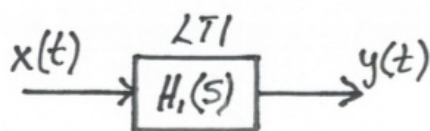
$$|H(\omega_0)| = |K| \cdot \frac{1}{|P_1| \cdot |P_2|}$$

- $\omega_0 = 0 \Rightarrow |P_1| = |P_2| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1 \Rightarrow |H(0)| = 1$
- $\omega_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |P_1| = \frac{1}{2}, |P_2| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$
 $\Rightarrow |H(\frac{\sqrt{3}}{2})| = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{13}} \approx 1.1$
- $\omega_0 \rightarrow \infty \Rightarrow |P_1| \rightarrow \infty, |P_2| \rightarrow \infty \Rightarrow |H(\omega_0)| \rightarrow 0$



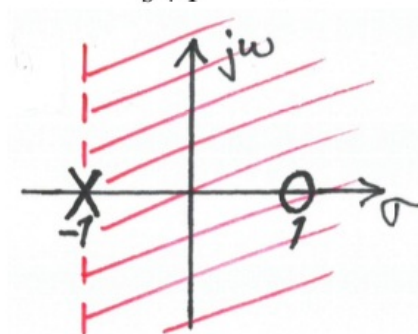
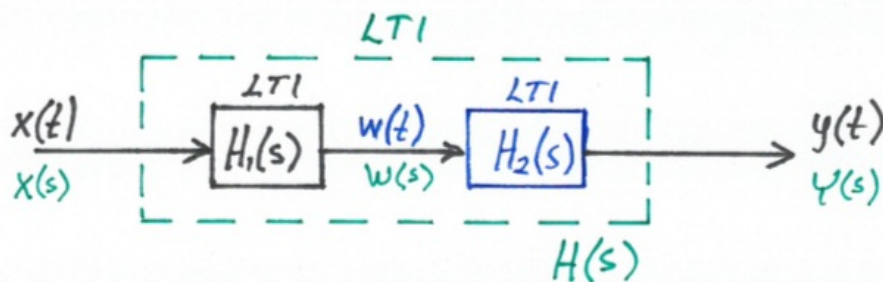
Stabilisering av instabila system (LTI-system!)

Givet: Ett **kausalt & instabilt** fysikaliskt system med systemfunktion $H_1(s) = \frac{1}{s-1}$; $\text{Re}\{s\} > 1$.



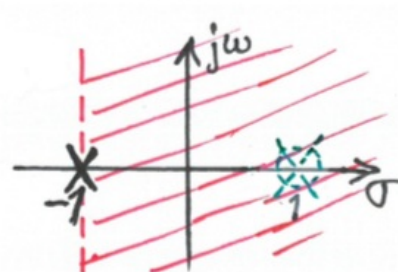
1. Stabilisering genom kaskadkoppling

$$H_2(s) = \frac{s-1}{s+1}; \quad \text{Re}\{s\} > -1$$



$$Y(s) = W(s) H_2(s) = (X(s) H_1(s)) \cdot H_2(s) = X(s) \cdot \underbrace{H_1(s) H_2(s)}_{=H(s)}$$

$$\Rightarrow H(s) = H_1(s) H_2(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}; \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad \Rightarrow$$



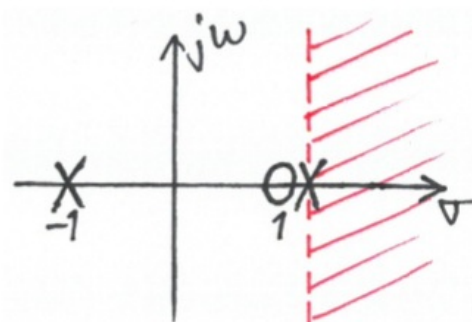
Imaginära axeln ligger i konvergensområdet för $H(s) \Rightarrow$ Det totala (kausala) systemet är **stabilt**!

Dock: Vid minsta förändring av polen i $H_1(s)$ (dvs. en förändring i någon systemparameter hos det fysikaliska systemet) så blir det kaskadkopplade systemet också **instabilt**.

Exempel: Om polen i $s=1$ hos $H_1(s)$ ändras +10% till $s=1.1$

$$\Rightarrow H_1(s) = \frac{1}{s-1.1}$$

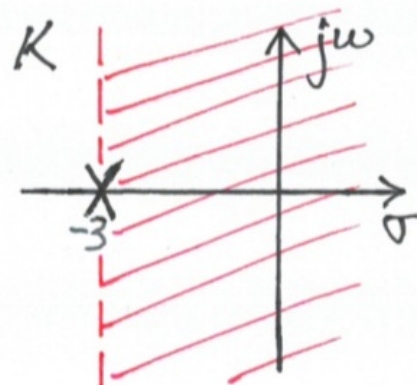
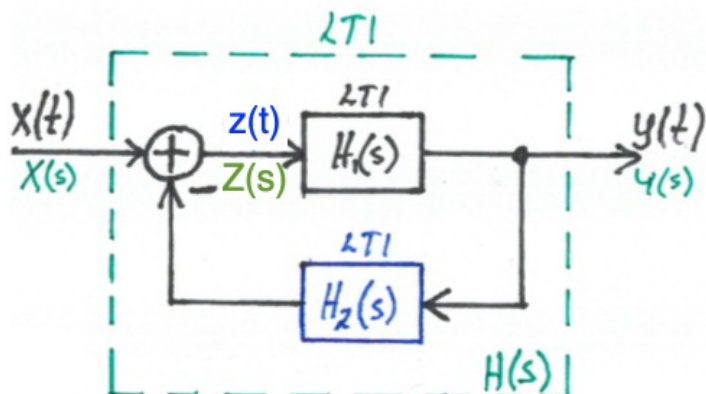
$$\Rightarrow H(s) = \frac{s-1}{(s-1.1)(s+1)}; \quad \text{Re}\{s\} > 1.1$$



Stabilisering genom **kaskadkoppling** är därför, i praktiken, **inte** lämpligt/bra!

2. Stabilisering genom återkoppling

Det kausala instabila systemet H_1 , med systemfunktion $H_1(s)$, återkopplas enligt nedan med ett kausalt stabilt system H_2 , med systemfunktion $H_2(s) = \frac{K}{s+3}$; $\text{Re}\{s\} > -3$:



$$\begin{cases} Y(s) = Z(s) H_1(s) \\ Z(s) = X(s) - Y(s) H_2(s) \end{cases} \Rightarrow H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) H_2(s)} = \frac{s+3}{(s+3)(s-1) + K}$$

H_1 och H_2 är kausala $\Rightarrow$ totala systemet är kausalt $\Rightarrow$

Stabilt system om alla poler hos $H(s)$ ligger i vänster halvplan

(för då ligger den imaginära axeln i konvergensområdet för $H(s)$)!

Polerna finns där $(s+3)(s-1) + K = 0 \Rightarrow$

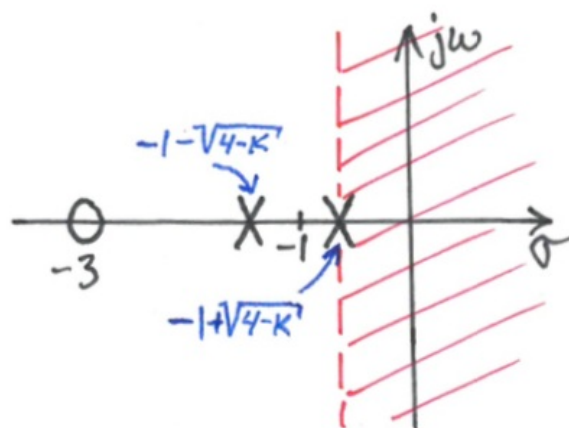
- **Reellvärda poler** $\underline{s = -1 \pm \sqrt{4-K}}$ då $K \leq 4$

$\Rightarrow$ Stabilt system om $K > 3$

(då ligger båda polerna i vänster halvplan)

(Marginellt stabilt system då $K = 3$.

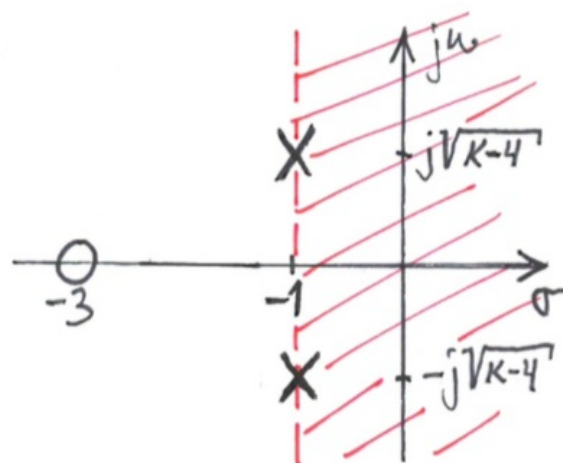
$\Rightarrow$ poler i $s = -2$ & $s = 0$)



- **Komplexvärda poler** $\underline{s = -1 \pm j\sqrt{K-4}}$ då $K > 4$

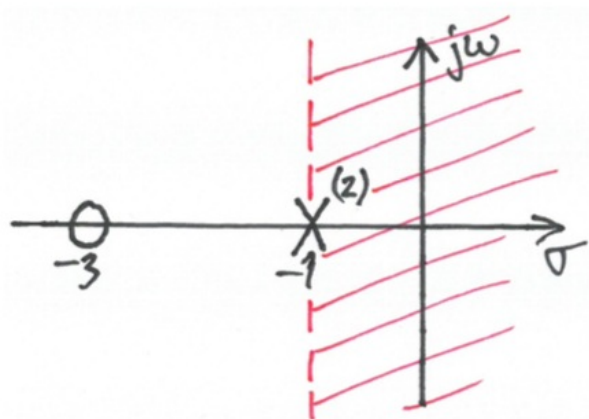
$\Rightarrow$ Stabilt system för alla $K > 4$.

(båda polernas realdel = -1 för alla $K > 4$)



Det återkopplade systemet är alltså stabilt för alla $K > 3$.

Låt t.ex. $K = 4 \Rightarrow H(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2}$; $\text{Re}\{s\} > -1$:



Låt återigen polen i $s = 1$ hos $H_1(s)$ ändras +10% till $s = 1.1$ (dvs. $H_1(s) = \frac{1}{s-1.1}$)

$\Rightarrow H(s) = \frac{s+3}{(s+1.4)(s+0.45)}$; $\text{Re}\{s\} > -0.45$, dvs. polerna hos $H(s)$ hamnar i $s = -1.4$ & $s = -0.45$.

Om polen i $s = 1$ hos $H_1(s)$ i stället ändras -10% till $s = 0.9$ (dvs. $H_1(s) = \frac{1}{s-0.9}$)

$\Rightarrow H(s) = \frac{s+3}{(s+1.05)^2 + 0.44^2}$; $\text{Re}\{s\} > -1.05$, dvs. polerna hos $H(s)$ hamnar i $s = -1.05 \pm j0.44$.

Slutsats:

Stabilisering m.h.a. återkoppling är mycket "störtålig" mot polvariationer hos $H_1(s)$ (dvs. parametervariationer hos H_1 .)

Återkoppling är mycket centralt inom reglerteknik!

Lite förtydligande hjälp/råd för ert projektarbete, när ni

- **Väljer** massan m
- **Beräknar** fjäderkonstanten k
- **Väljer eller beräknar** dämpningskonstanten c

för att erhålla ert huvudsystem/referenssystem H_A ,
som är en linjär modell av ert fysikaliska system.
samt de två alternativa systemen H_B och H_C .

(Baserat på texten på projektwebbsidan – där finns all nödvändig info!)

Bilderna nedan är skärmdumpar från filmen "Tips och råd för projektarbetet.mp4",
som du hittar under "Kursdokument" i kursrummet i Lisam!

Bestäm först lämpligt värde på m , k respektive c som resulterar i ett **referenssystem/huvudsystem** med önskvärda svängnings- och dämpningsegenskaper (fall 1, 2 eller 3 i föregående stycke). Här nedan kallas detta system för **H_A** . Genom att ändra på systemparametrarna (en i taget) ska ni sedan ta fram två alternativa system **H_B** respektive **H_C** , som är ekvivalenta med de två andra systemtyperna.

Diff. ekr. $\xrightarrow{\mathcal{L}}$

$$H(s) = \frac{---}{ms^2 + cs + k}$$

Pol-nollställediagram för $H_A(s)$, $H_B(s)$ & $H_C(s)$, där projektgrupperna har olika $H(s)$

Instruktion för val av systemparametrarna m , k och c :

- För ert system väljer ni först en, för ert system, lämplig massa m .
- Utgående från något lämpligt statiskt läge för ert system (ofta viloläget) kan ni sedan enkelt *erhålla* fjäderkonstanten k .

ROTORT

för systemfunktionens poler,
 $ms^2 + cs + k = 0$

Välj lämpligt c för ert huvudsystem samt lämpliga c -värden så ni erhåller de andra två systemen?

För att *bestämma* ett lämpligt värde på dämpningskonstanten c , så behöver ni *testa er fram* till önskat systemuppförande (t.ex. hos stegsvaret eller amplitudkaraktärstiken) för ert önskade huvudsystem **H_A** . Studera gärna (om möjligt) ert verkliga fysikaliska system för att se vilken dämpningsegenskap det har, eller bestäm själv hur svag eller stark dämpning ni önskar ha för ert huvudsystem. Testa olika värden på c i era beräkningar och skisserande av t.ex. stegsvaret och/eller amplitudkaraktärstiken tills ni erhåller ett önskat uppförande för huvudsystemet.

Tips vid val av c : Ni kan lätt beräkna för vilket värde på c som systemfunktionen får en *dubbelpol* samt när polerna blir helt *imaginära*.