

Allmänna passiva filter och frekvensselektiva filter

Från förra föreläsningen:

- Stabilisering av instabila LTI-system genom återkoppling.
-

Förberedande videor:

1. Passiva filter: Hur systemfunktionens poler och nollställen påverkar insignalen
 2. Frekvensselektiva filter
 - Filterterminologi
 - Filtertyper (LP, HP, BP, BS, AP samt ideal och approximerande filter)
-

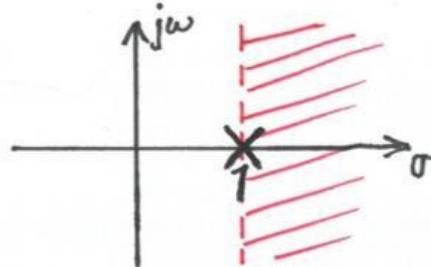
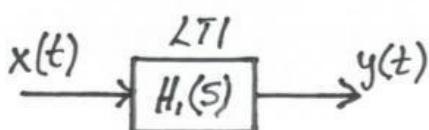
Frekvensselektiva filter

- Idealt LP-filter
- Butterworthfilter (LP)
- Chebyshev I-filter (LP)
- (Chebyshev II-filter och cauerfilter)
- Klassiska högpassfilter och bandpassfilter

Stabilisering av instabila system

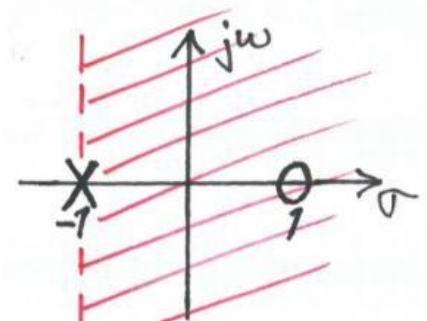
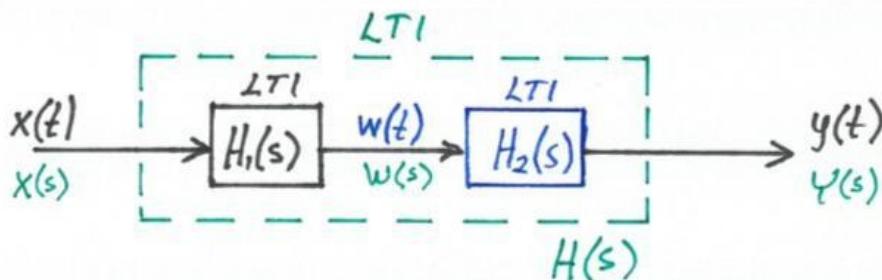
(LTI-system!)

Givet: Ett **kausalt & instabilt** fysikaliskt system med systemfunktion $H_1(s) = \frac{1}{s-1}$; $\operatorname{Re}\{s\} > 1$.



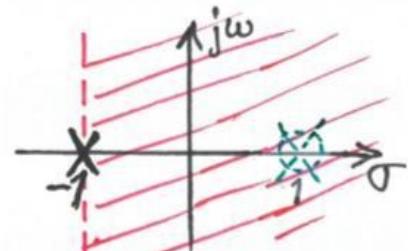
1. Stabilisering genom kaskadkoppling

$$H_2(s) = \frac{s-1}{s+1}; \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1$$



$$Y(s) = W(s)H_2(s) = (X(s)H_1(s)) \cdot H_2(s) = X(s) \underbrace{H_1(s)H_2(s)}_{=H(s)}$$

$$\Rightarrow H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}; \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1 \quad \Rightarrow$$



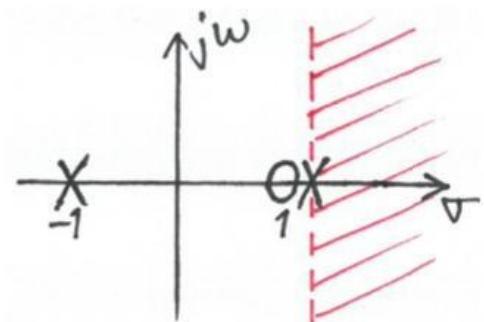
Imaginära axeln ligger i konvergensområdet för $H(s) \Rightarrow$ Det totala (kausala) systemet är **stabil**!

Dock: Vid minsta förändring av polen i $H_1(s)$ (dvs. en förändring i någon systemparameter hos det fysikaliska systemet) så blir det kaskadkopplade systemet också **instabilt**.

Exempel: Om polen i $s = 1$ hos $H_1(s)$ ändras +10% till $s = 1.1$

$$\Rightarrow H_1(s) = \frac{1}{s-1.1}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{s-1}{(s-1.1)(s+1)}; \quad \operatorname{Re}\{s\} > 1.1$$

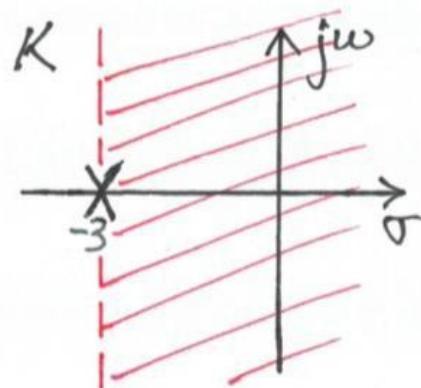
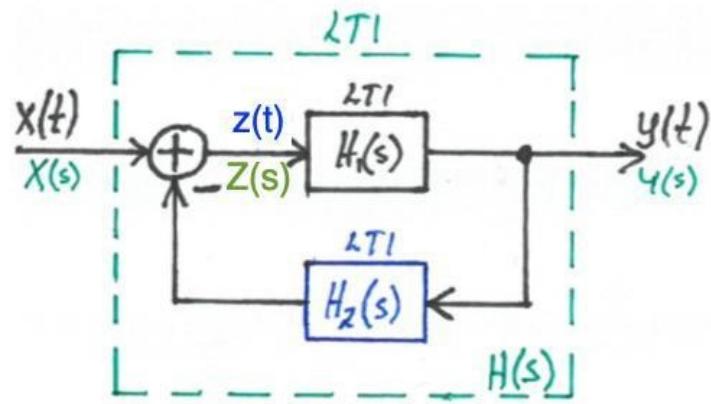


Stabilisering genom **kaskadkoppling** är därför, i praktiken, **inte lämpligt/bara**!

2. Stabilisering genom återkoppling

Det kausala instabila systemet $H_1(s)$, med systemfunktion $H_1(s)$, återkopplas enligt nedan

med ett kausalt stabilt system $H_2(s)$, med systemfunktion $H_2(s) = \frac{K}{s+3}$; $\operatorname{Re}\{s\} > -3$:



$$\begin{cases} Y(s) = Z(s)H_1(s) \\ Z(s) = X(s) - Y(s)H_2(s) \end{cases} \Rightarrow H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = \frac{s+3}{(s+3)(s-1)+K}$$

H_1 och H_2 är kausala \Rightarrow totala systemet är kausalt \Rightarrow

Stabilt system om alla poler hos $H(s)$ ligger i vänster halvplan

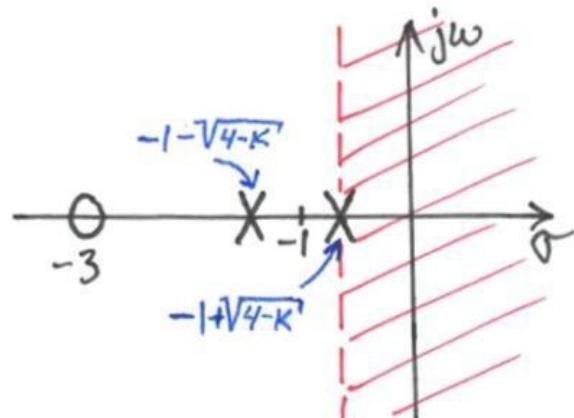
(för då ligger den imaginära axeln i konvergensområdet för $H(s)$)!

Polerna finns där $(s+3)(s-1)+K=0 \Rightarrow$

- **Reellvärda poler** $s = -1 \pm \sqrt{4-K}$ då $K \leq 4$

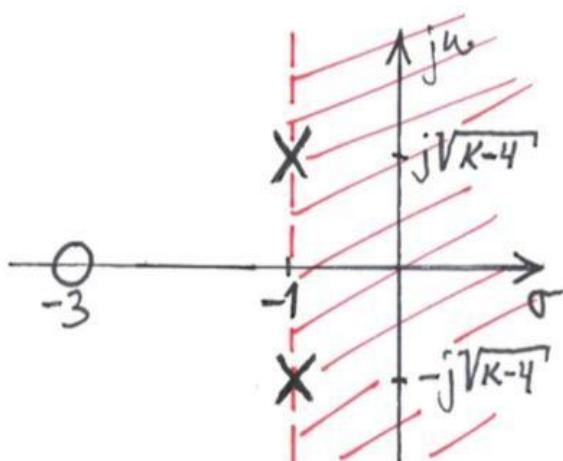
\Rightarrow Stabilt system om $K > 3$
(då ligger båda polerna i vänster halvplan)

(Marginellt stabilt system då $K = 3$.
 \Rightarrow poler i $s = -2$ & $s = 0$)



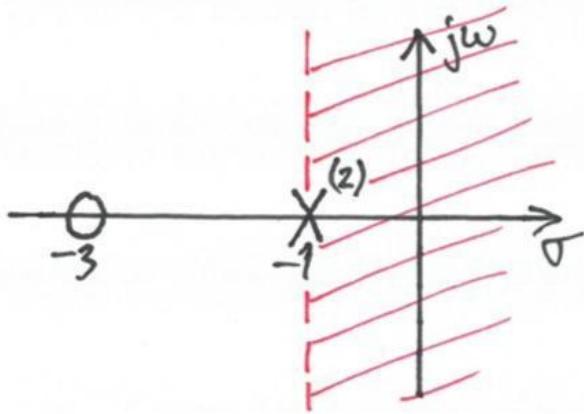
- **Komplexvärda poler** $s = -1 \pm j\sqrt{K-4}$ då $K > 4$

\Rightarrow Stabilt system för alla $K > 4$.
(båda polernas realdel = -1 för alla $K > 4$)



Det återkopplade systemet är alltså stabilt för alla $K > 3$.

Låt t.ex. $K = 4 \Rightarrow H(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2}$; $\operatorname{Re}\{s\} > -1$:



Låt återigen polen i $s = 1$ hos $H_1(s)$ ändras +10% till $s = 1.1$ (dvs. $H_1(s) = \frac{1}{s-1.1}$)

$$\Rightarrow H(s) = \frac{s+3}{(s+1.4)(s+0.45)}; \quad \operatorname{Re}\{s\} > -0.45, \text{ dvs. polerna hos } H(s) \text{ hamnar i } s = -1.4 \text{ & } s = -0.45.$$

Om polen i $s = 1$ hos $H_1(s)$ i stället ändras -10% till $s = 0.9$ (dvs. $H_1(s) = \frac{1}{s-0.9}$)

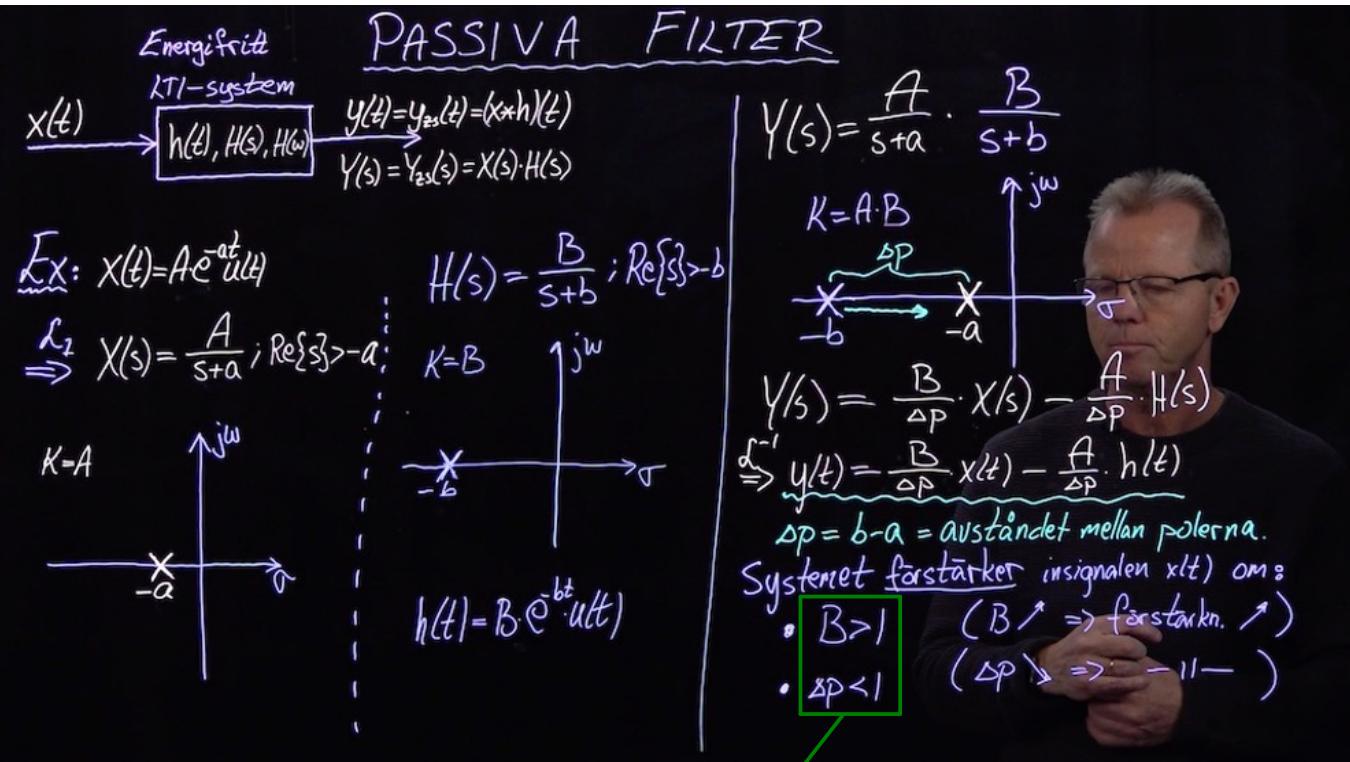
$$\Rightarrow H(s) = \frac{s+3}{(s+1.05)^2 + 0.44^2}; \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1.05, \text{ dvs. polerna hos } H(s) \text{ hamnar i } s = -1.05 \pm j0.44.$$

Slutsats:

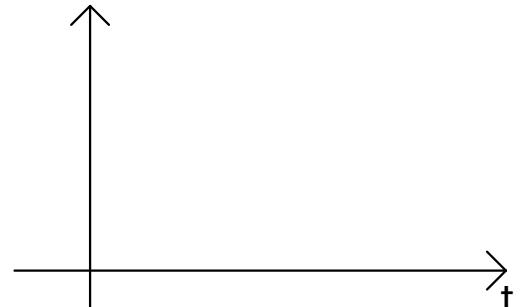
Stabilisering m.h.a. återkoppling är mycket "störtålig" mot polvariationer hos $H_1(s)$ (dvs. parametervariationer hos H_1 .)

Återkoppling är mycket centralt inom reglerteknik!

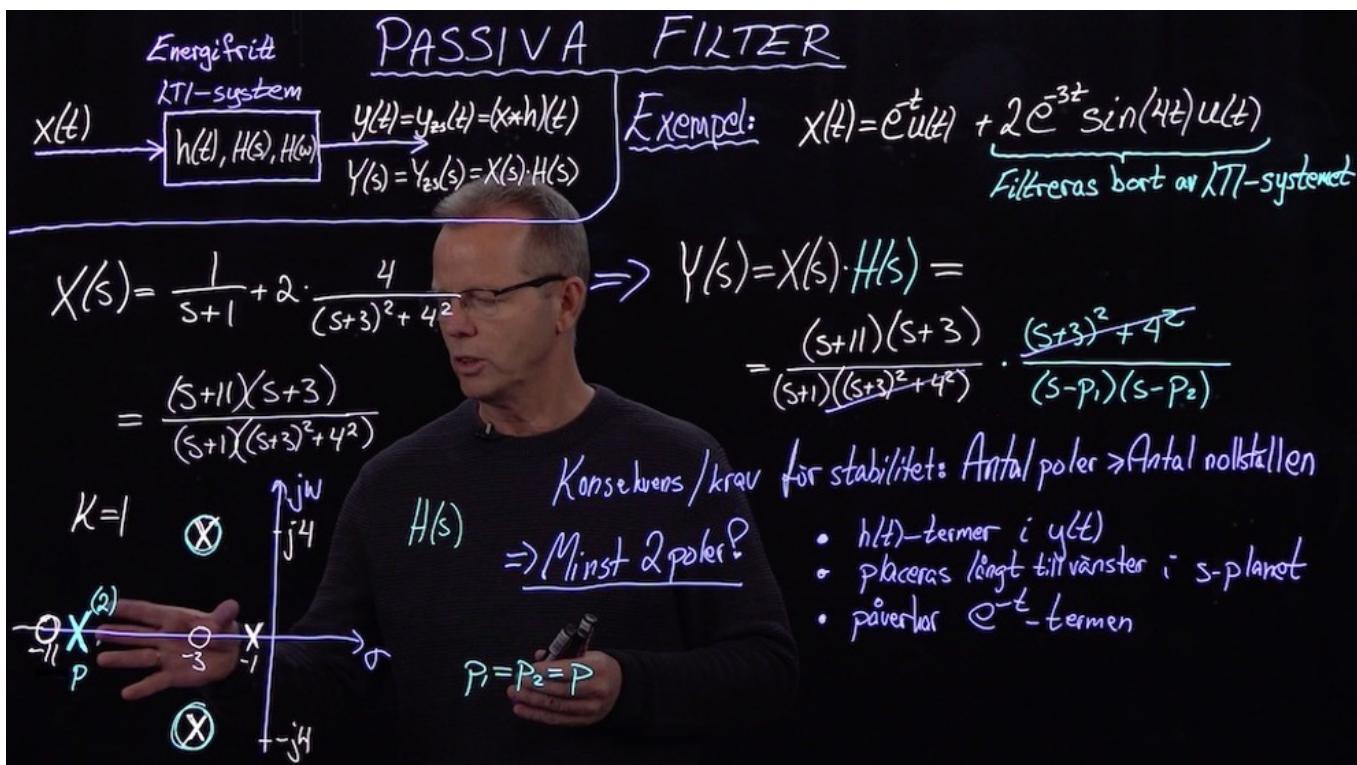
Video 1.1



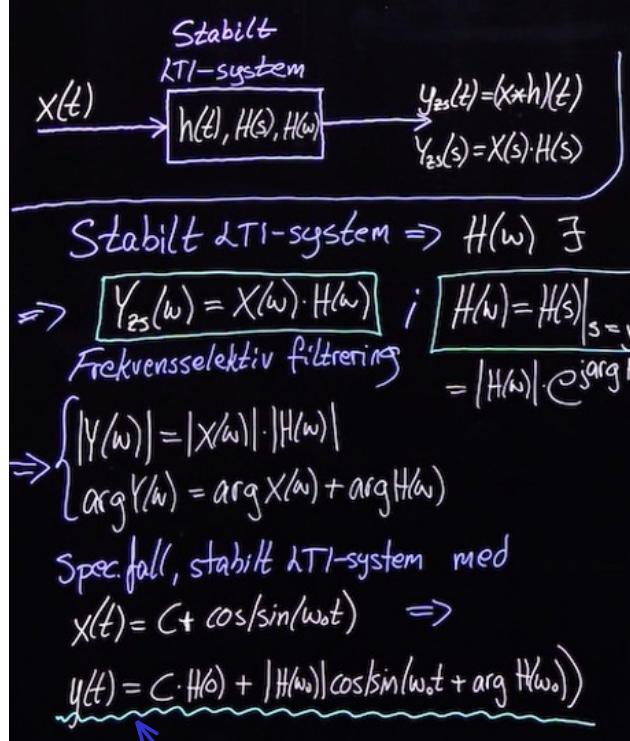
Bättre – mer korrekt:

Förstärkning erhålls om $|\frac{B}{\Delta P}| > 1$, dvs. om $|\Delta P| < |B|$ 

Video 1.2

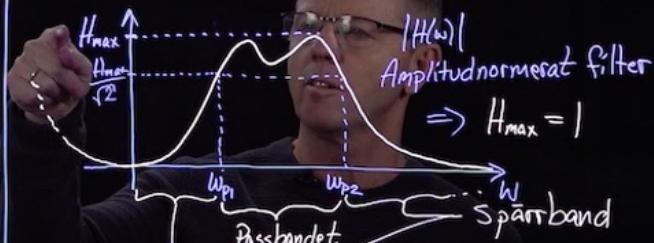


Video 2.1



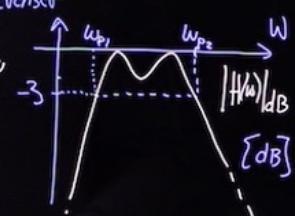
FREKVENNSELEKTIVA PASSIVA FILTER

Exempel, amplitudkar. $|H(\omega)|$:

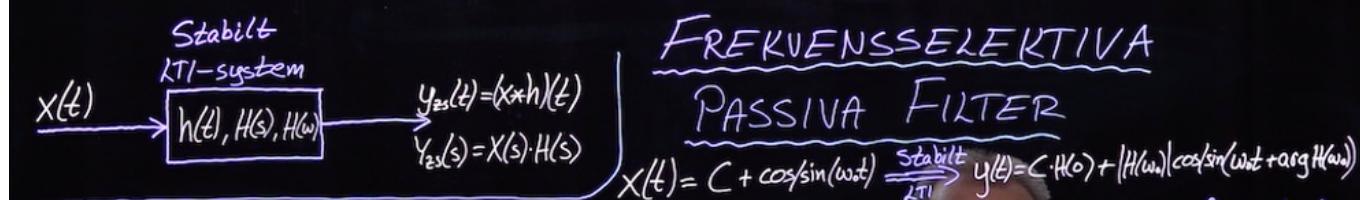


- w_{p_1}, w_{p_2} = gränsvinkel/frekvenser

- Bandbredden $W = w_p$
- $\left| H(\omega) \right|_{dB} = 20 \cdot \log \left(|H(\omega)| \right)$

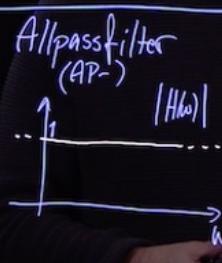
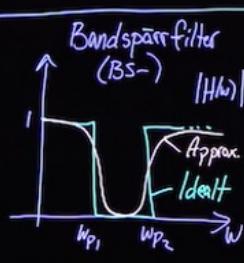
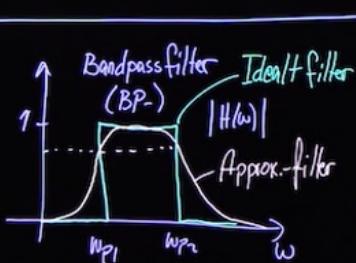
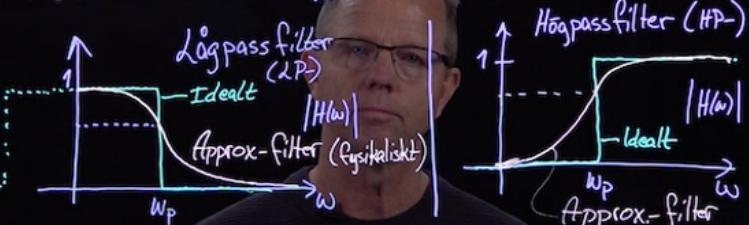


$$= y_{part}(t)$$



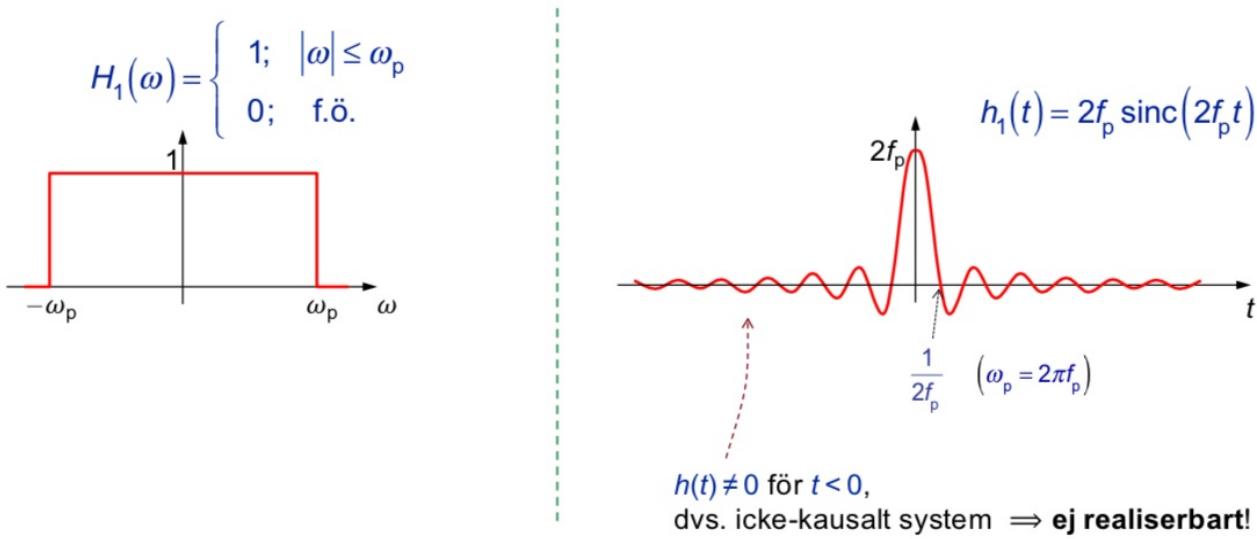
FREKVENSELEKTIVA PASSIVA FILTER

Olika amplitudnormerade frekvensselektiva filtertyper

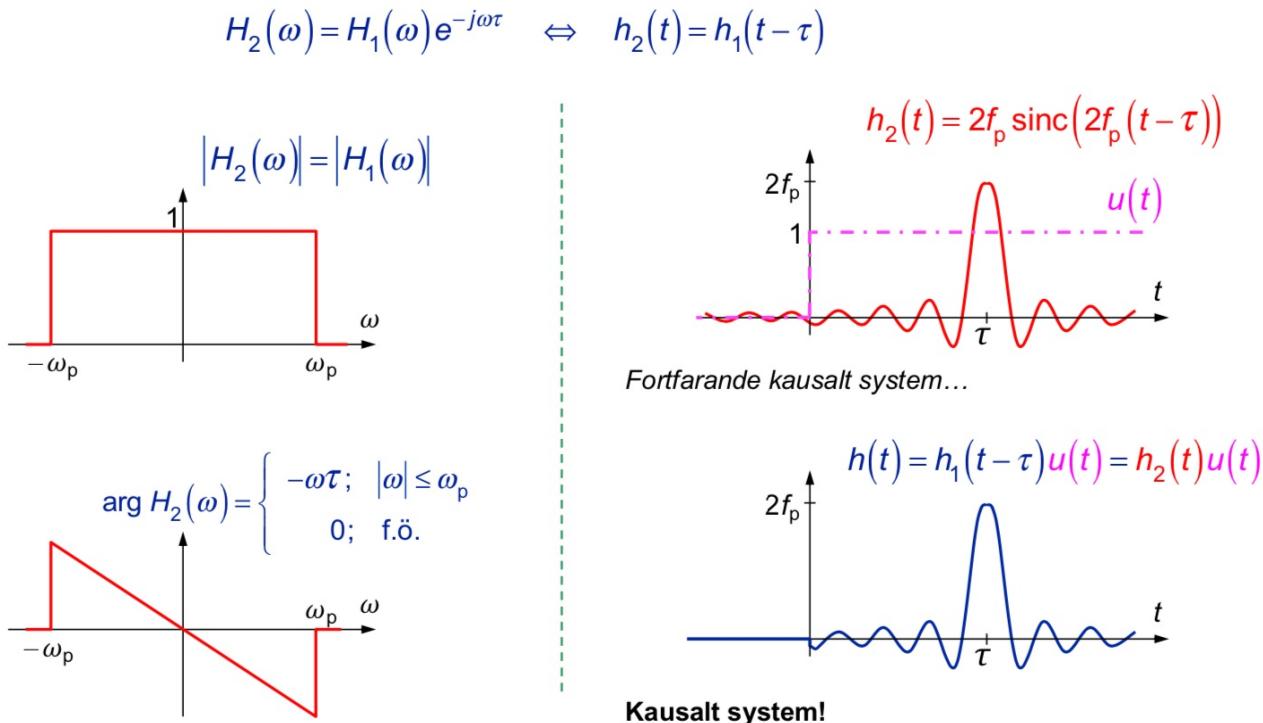


$$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$

Exempel – Idealt LP-Filter



Blir det bättre om man tidsförskjuter sincen och multiplicerar med $u(t)$?

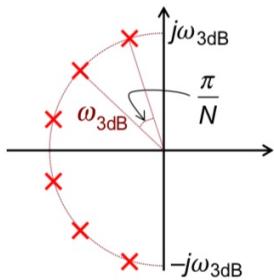


Demonstration i Matlab av:

- 1) De ideala LP-filtren ovan
- 2) Placering av poler och nollställen för approximationsfilter (LP)
(inför fortsättningen med butterworthfilter på nästa sida)

Butterworthfilter – (Amplitudnormerat LP-filter)

N poler hos $H(s)$ längs en halvcirkel (n i kursboken):

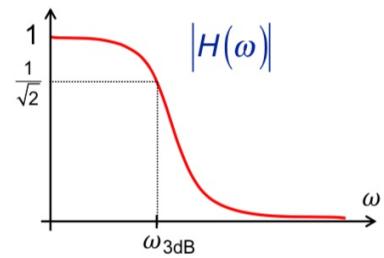


Poler:

$$p_k = \omega_{3\text{dB}} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2N}\pi + k \cdot \frac{\pi}{N}\right)} = \omega_{3\text{dB}} \cdot e^{j\left(\frac{2k+N-1}{2N}\right)\pi}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N$$

$\omega_{3\text{dB}}$ = 3 dB-gränsvinkelfrekvensen
(ω_p i formelsamlingen)



$$H(s) = \frac{(\omega_{3\text{dB}})^N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s + (\omega_{3\text{dB}})^N}$$

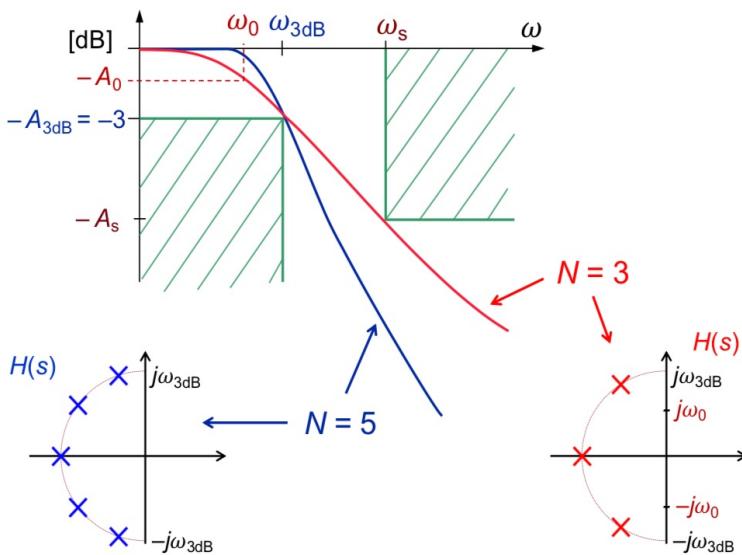
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{3\text{dB}}}\right)^{2N}}}$$

a_i erhålls vanligen från tabell eller genom utveckling av $(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_N)$

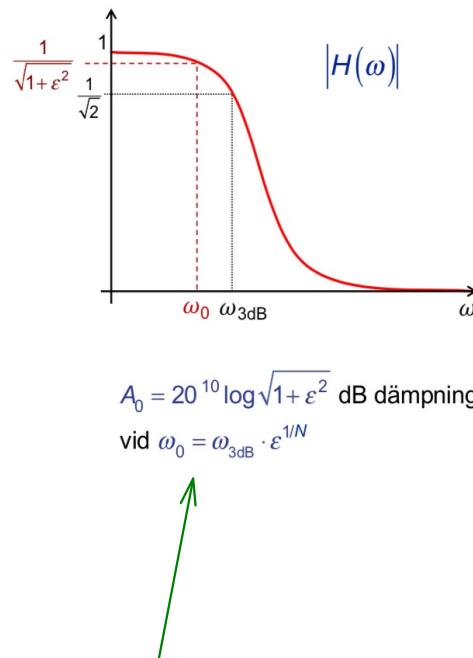
$$\begin{cases} \text{Formelsamlingen: } p_k = \omega_p \cdot e^{j\left(\frac{1+k}{N}\right)\pi}, & k = 1, 3, 5, \dots, 2N-1 \\ \text{Olika sätt att beskriva och numrera polpositionerna.} \end{cases}$$

Amplitudkarakteristiken i dB-skala

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot 10 \log |H(\omega)|$$



Butterworthfilter ger bästa möjliga passbands-approximation



$$A_0 = 20 \cdot 10 \log \sqrt{1+\epsilon^2} \text{ dB dämpning}$$

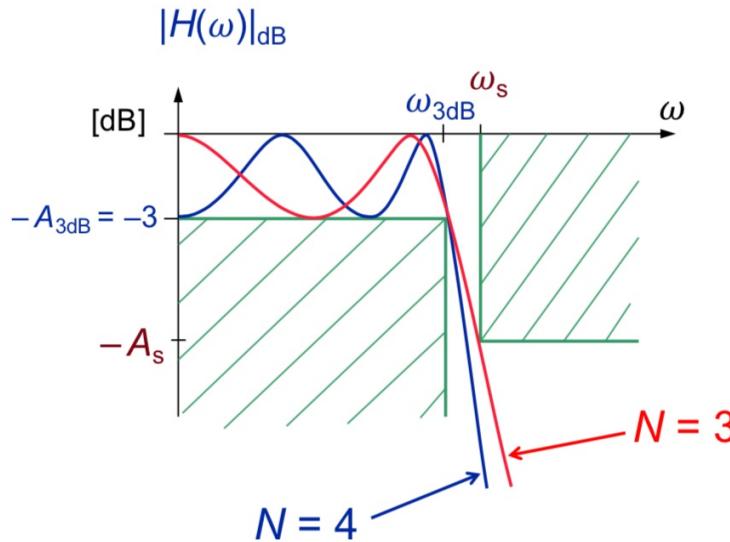
$$\text{vid } \omega_0 = \omega_{3\text{dB}} \cdot \epsilon^{1/N}$$

Kursboken: Gränsvinkelfrekvensen = ω_0 oavsett dämpning där.

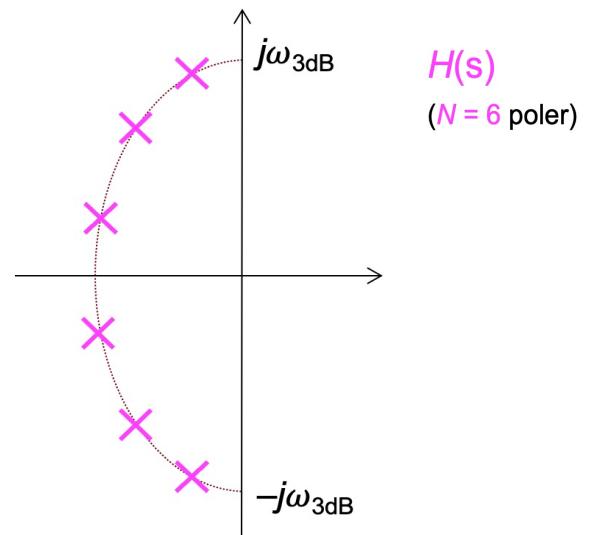
Här gör jag det samma, men det är tydligare att använda $\omega_{3\text{dB}}$ eftersom vi i kursen bara fokuserar på 3 dB-gränsvinkelfrekvens för alla filter.

(Notera igen att $\omega_{3\text{dB}}$ betecknas ω_p i formelsamlingen)

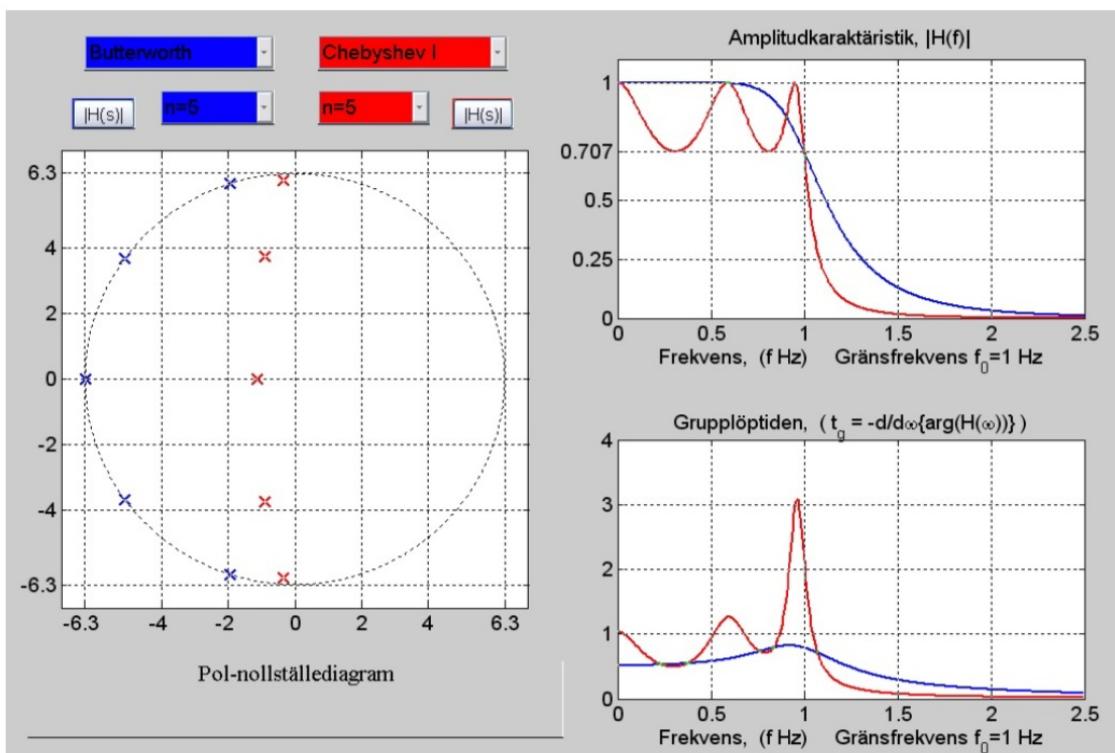
Chebyshev I-filter



- Rippel ($A_{3\text{dB}}$ dB) i passbandet!
- Optimalt m.a.p. branthenet i övergångsbandet $\omega_{3\text{dB}} \rightarrow \omega_s$
- Polerna hos $H(s)$ ligger längs en halv-ellips i VHP

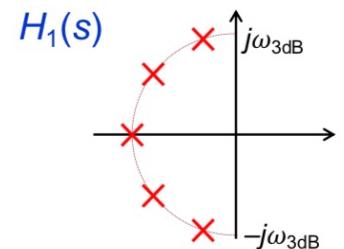
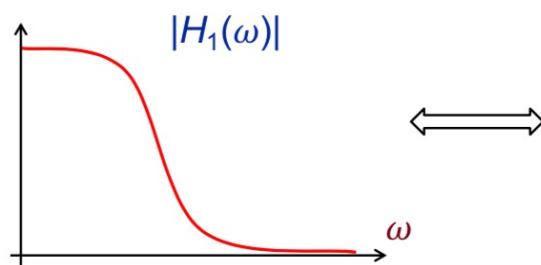


Matlabdemo, Butterworth- & Chebyshev I-filter:

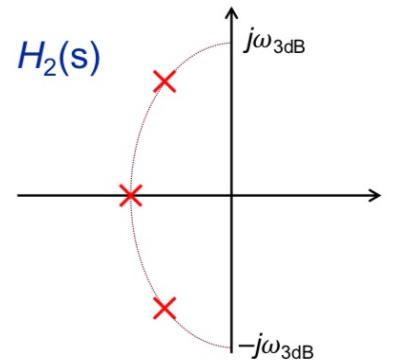
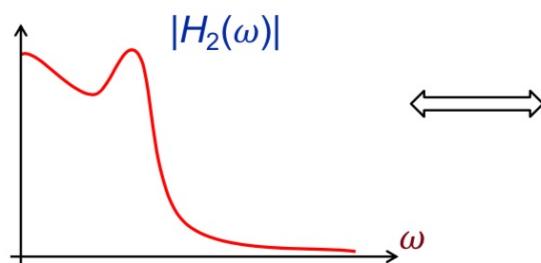


Klassiska idealala LP-approximationer

Butterworthfilter

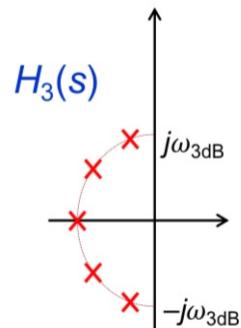
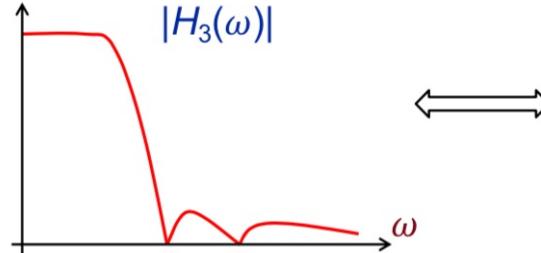


Chebyshev I-filter

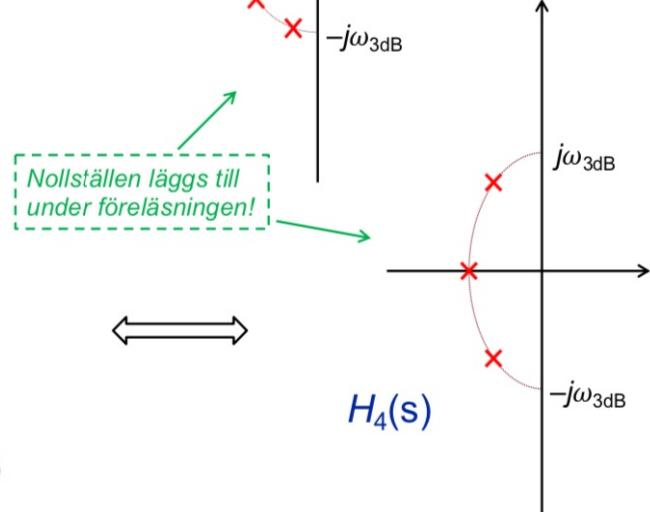
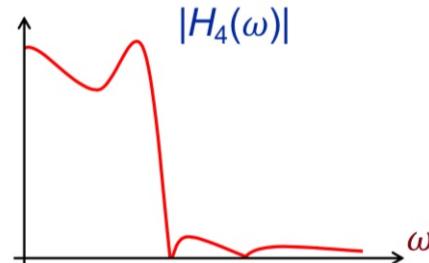


Följande två filtertyper examineras inte i kursen:

Chebyshev II-filter

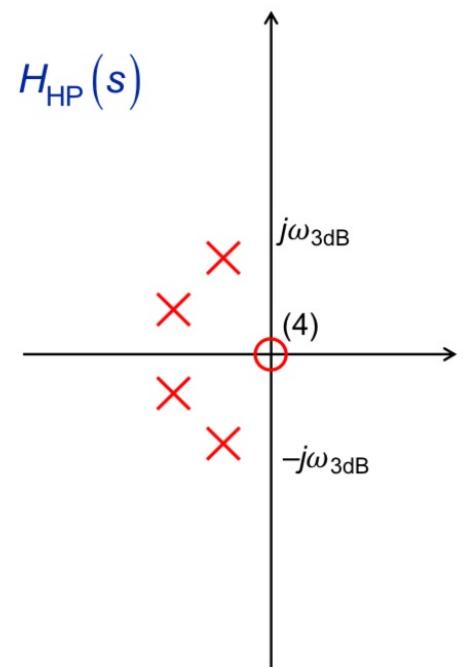
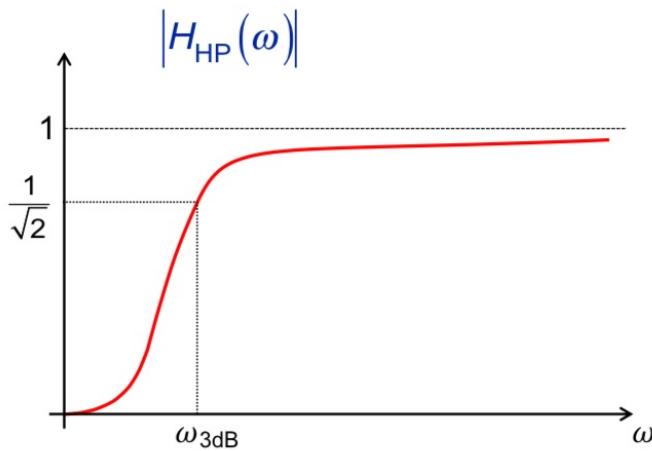


Cauerfilter
(elliptiskt filter)



Kuggfråga: Vad är orimligt i $|H_4(\omega)|$ -grafen?

Klassiskt högpassfilter



Klassiskt bandpassfilter

