

Allmänna passiva filter och frekvensselektiva filter

Från förra föreläsningen:

- **Stabilisering** av instabila LTI-system genom **återkoppling**.

Förberedande videor:

1. Passiva filter: Hur systemfunktionens poler och nollställen påverkar signalen
2. Frekvensselektiva filter
 - Filterterminologi
 - Filtertyper (LP, HP, BP, BS, AP samt ideala och approximerande filter)

Frekvensselektiva filter

- Idealt LP-filter
- Butterworthfilter (LP)
- Chebyshev I-filter (LP)
- (Chebyshev II-filter och cauerfilter)
- Klassiska högpasfilter och bandpassfilter

LTI-system $\Rightarrow H(s) / H(\omega)$

$\Rightarrow |H(\omega)|, \arg H(\omega)$

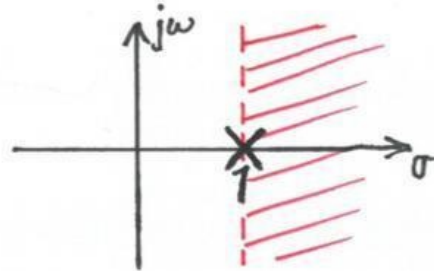
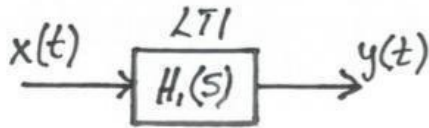
Önskad $|H(\omega)|$ (o ev $\arg H(\omega)$)

$\Rightarrow H(s) = ?$

dvs. var placerar vi
poler & nollställen hos $H(s)$?

Stabilisering av instabila system (LTI-system!)

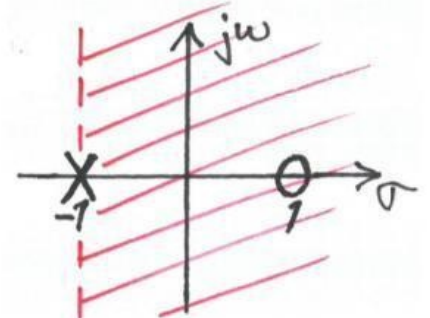
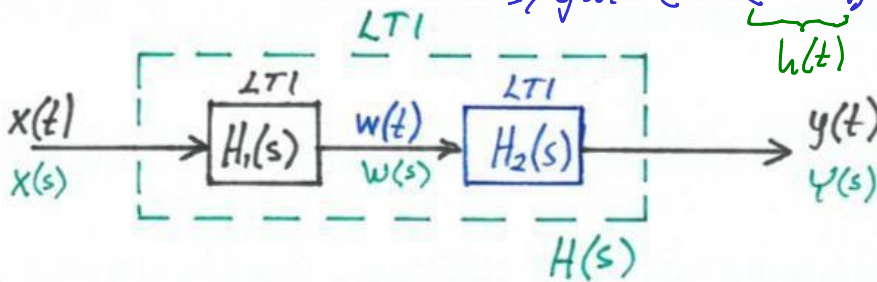
Givet: Ett **kausalt & instabilt** fysikaliskt system med systemfunktion $H_1(s) = \frac{1}{s-1}$; $\text{Re}\{s\} > 1$.



1. Stabilisering genom kaskadkoppling

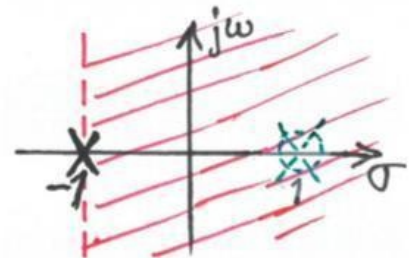
$$y(t) = (w * h_2)(t), \quad w(t) = (x * h_1)(t) \\ \Rightarrow y(t) = (x * (h_1 * h_2))(t)$$

$$H_2(s) = \frac{s-1}{s+1}; \quad \text{Re}\{s\} > -1$$



$$Y(s) = W(s) H_2(s) = (X(s) H_1(s)) \cdot H_2(s) = X(s) \cdot \underbrace{H_1(s) H_2(s)}_{=H(s)}$$

$$\Rightarrow H(s) = H_1(s) H_2(s) = \frac{1}{s-1} \cdot \frac{s-1}{s+1} = \frac{1}{s+1}; \quad \text{Re}\{s\} > -1 \quad \Rightarrow$$



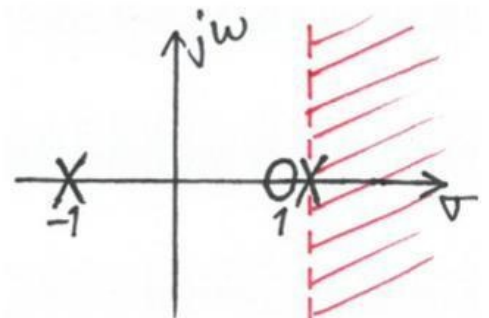
Imaginära axeln ligger i konvergensområdet för $H(s) \Rightarrow$ Det totala (kausala) systemet är **stabilt**!

Dock: Vid minsta förändring av polen i $H_1(s)$ (dvs. en förändring i någon systemparameter hos det fysikaliska systemet) så blir det kaskadkopplade systemet också **instabilt**.

Exempel: Om polen i $s = 1$ hos $H_1(s)$ ändras +10% till $s = 1.1$

$$\Rightarrow H_1(s) = \frac{1}{s-1.1}$$

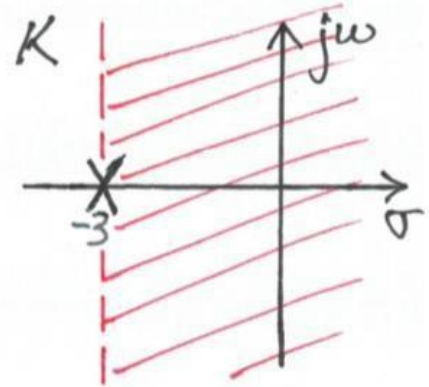
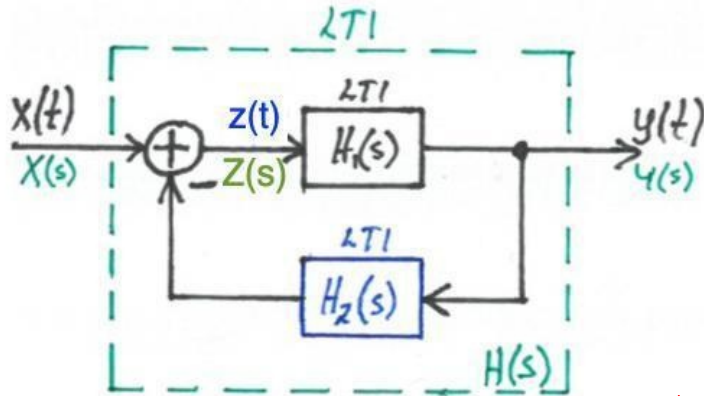
$$\Rightarrow H(s) = \frac{s-1}{(s-1.1)(s+1)}; \quad \text{Re}\{s\} > 1.1$$



Stabilisering genom kaskadkoppling är därför, i praktiken, **inte** lämpligt/bra!

2. Stabilisering genom återkoppling

Det kausala instabila systemet H_1 , med systemfunktion $H_1(s)$, återkopplas enligt nedan med ett kausalt stabilt system H_2 , med systemfunktion $H_2(s) = \frac{K}{s+3}$; $\text{Re}\{s\} > -3$:



$$\begin{cases} Y(s) = Z(s) H_1(s) \\ Z(s) = X(s) - Y(s) H_2(s) \end{cases} \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) H_2(s)} = \frac{s+3}{(s+3)(s-1) + K}$$

H_1 och H_2 är kausala $\Rightarrow$ totala systemet är kausalt $\Rightarrow$

Stabilt system om alla poler hos $H(s)$ ligger i vänster halvplan

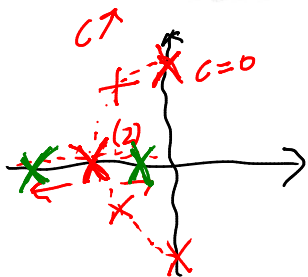
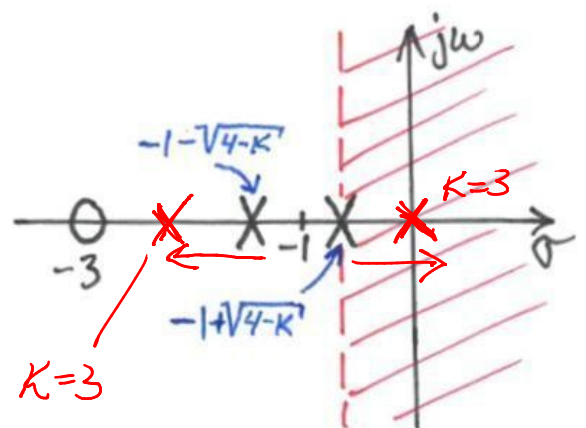
(för då ligger den imaginära axeln i konvergensområdet för $H(s)$)!

Polerna finns där $(s+3)(s-1) + K = 0 \Rightarrow$

- **Reellvärda poler** $\underline{s = -1 \pm \sqrt{4-K}}$ då $K \leq 4$

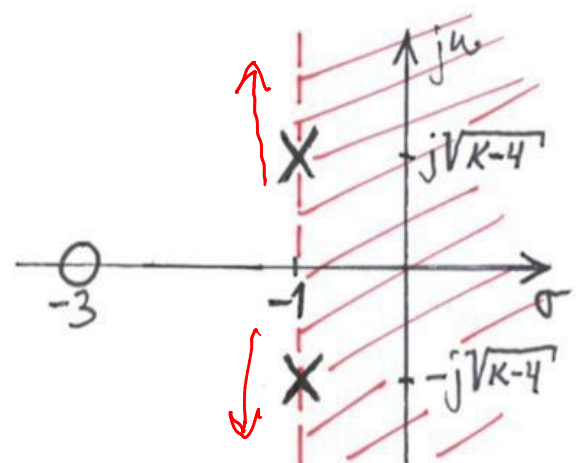
$\Rightarrow$ Stabilt system om $K > 3$
(då ligger båda polerna i vänster halvplan)

(Marginellt stabilt system då $K = 3$.
 $\Rightarrow$ poler i $s = -2$ & $s = 0$)



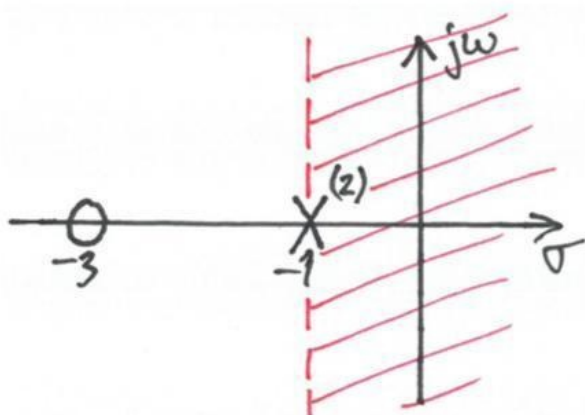
- **Komplexvärda poler** $\underline{s = -1 \pm j\sqrt{K-4}}$ då $K > 4$

$\Rightarrow$ Stabilt system för alla $K > 4$.
(båda polernas realdel = -1 för alla $K > 4$)



Det återkopplade systemet är alltså stabilt för alla $K > 3$.

Låt t.ex. $K = 4 \Rightarrow H(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2}; \operatorname{Re}\{s\} > -1$:



Låt återigen polen i $s = 1$ hos $H_1(s)$ ändras +10% till $s = 1.1$ (dvs. $H_1(s) = \frac{1}{s-1.1}$)

$$\Rightarrow H(s) = \frac{s+3}{(s+1.4)(s+0.45)}; \operatorname{Re}\{s\} > -0.45, \text{ dvs. polerna hos } H(s) \text{ hamnar i } s = -1.4 \text{ \& } s = -0.45.$$

Om polen i $s = 1$ hos $H_1(s)$ i stället ändras -10% till $s = 0.9$ (dvs. $H_1(s) = \frac{1}{s-0.9}$)

$$\Rightarrow H(s) = \frac{s+3}{(s+1.05)^2 + 0.44^2}; \operatorname{Re}\{s\} > -1.05, \text{ dvs. polerna hos } H(s) \text{ hamnar i } s = -1.05 \pm j0.44.$$

Slutsats:

Stabilisering m.h.a. återkoppling är mycket "störtålig" mot polvariationer hos $H_1(s)$ (dvs. parametervariationer hos H_1 .)

Återkoppling är mycket centralt inom reglerteknik!

PASSIVA FILTER

Energifritt
KT1-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(j\omega) \rightarrow y(t) = y_{zs}(t) = (x * h)(t)$
 $Y(s) = Y_{zs}(s) = X(s) \cdot H(s)$

Ex: $x(t) = A e^{-at} u(t)$
 $\Rightarrow X(s) = \frac{A}{s+a}; \operatorname{Re}\{s\} > -a$

$K=A$

$H(s) = \frac{B}{s+b}; \operatorname{Re}\{s\} > -b$
 $K=B$

$h(t) = B e^{-bt} u(t)$

$Y(s) = \frac{A}{s+a} \cdot \frac{B}{s+b}$
 $K=A \cdot B$

$\Delta p = b - a$

$Y(s) = \frac{B}{\Delta p} X(s) - \frac{A}{\Delta p} H(s)$
 $\Rightarrow y(t) = \frac{B}{\Delta p} x(t) - \frac{A}{\Delta p} h(t)$

$\Delta p = b - a = \text{avståndet mellan polerna.}$
 Systemet förstärker signalen $x(t)$ om:

- $B > 1$ ($B \uparrow \Rightarrow \text{förstärkn.} \uparrow$)
- $\Delta p < 1$ ($\Delta p \downarrow \Rightarrow \text{förstärkn.} \uparrow$)

Ex:

$x(t) = e^{-90t} u(t) \Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+90}; \operatorname{Re}\{s\} > -90$

$h(t) = 100 e^{-100t} u(t) \Leftrightarrow H(s) = \frac{100}{s+100}; A=1, B=100$

$\Rightarrow \Delta p = b - a = 100 - 90 = 10$

$\Rightarrow y(t) = \frac{100}{10} x(t) - \frac{1}{10} h(t) = 10 x(t) - \frac{1}{10} h(t)$

$= (10 e^{-90t} - \frac{100}{10} e^{-100t}) u(t)$
 $= 10 (e^{-90t} - e^{-100t}) u(t)$

Bättre – mer korrekt:
 Förstärkning erhålls om $\left| \frac{B}{\Delta p} \right| > 1$, dvs. om $|A p| < |B|$

$E_y \approx 42\% \cdot E_x$ (51%?)

PASSIVA FILTER

Energifritt
KT1-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(j\omega) \rightarrow y(t) = y_{zs}(t) = (x * h)(t)$
 $Y(s) = Y_{zs}(s) = X(s) \cdot H(s)$

Exempel: $x(t) = e^{-t} u(t) + 2 e^{-3t} \sin(4t) u(t)$
 Filteras bort av KT1-systemet

$X(s) = \frac{1}{s+1} + 2 \cdot \frac{4}{(s+3)^2 + 4^2} \Rightarrow Y(s) = X(s) \cdot H(s) =$
 $= \frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)((s+3)^2 + 4^2)} \cdot \frac{(s+3)^2 + 4^2}{(s-p_1)(s-p_2)}$

$K=1$

$H(s)$

$\Rightarrow$ Minst 2 poler?

$p_1 = p_2 = p$

Konsekvens/krav för stabilitet: Antal poler $\geq$ Antal nollställen

- $h(t)$ -termer i $y(t)$
- placeras långt till vänster i s -planet
- påverkar e^{-t} -termen

$$\text{Allmänt: } Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Video 2.1

Stabilit LT1-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(\omega) \rightarrow y_{zs}(t) = (x * h)(t)$
 $Y_{zs}(s) = X(s) \cdot H(s)$

Stabilit LT1-system $\Rightarrow H(\omega) \exists$

$\Rightarrow Y_{zs}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$ i $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$
 Frekvensselektiv filtrering $= |H(\omega)| \angle \arg H(\omega)$

$\Rightarrow \begin{cases} |Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)| \\ \arg Y(\omega) = \arg X(\omega) + \arg H(\omega) \end{cases}$

Spec. fall, stabilt LT1-system med $x(t) = C + \cos/\sin(\omega_0 t) \Rightarrow$
 $y(t) = C \cdot H(0) + |H(\omega_0)| \cos/\sin(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))$

FREKVENSSELEKTIVA PASSIVA FILTER

Exempel, amplitudkar. $|H(\omega)|$:

Amplitudnormerat filter $\Rightarrow H_{\max} = 1$

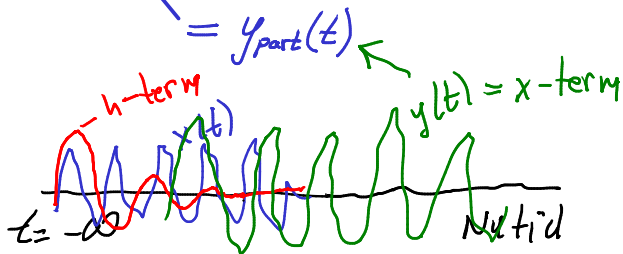
Passbandet

ω_{p1}, ω_{p2} = gränsvinkel/frekvenser

Bandbredden $W = \omega_{p2} - \omega_{p1}$

$|H(\omega)|_{dB} = 20 \cdot \lg |H(\omega)|$

3 dB - gräns (vinkel) frekvenser



Video 2.2

Stabilit LT1-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(\omega) \rightarrow y_{zs}(t) = (x * h)(t)$
 $Y_{zs}(s) = X(s) \cdot H(s)$

$x(t) = C + \cos/\sin(\omega_0 t) \xrightarrow{\text{Stabilit LT1}} y(t) = C \cdot H(0) + |H(\omega_0)| \cos/\sin(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))$

Olika amplitudnormerade frekvensselektiva filtertyper

Lågpass filter (LP-)

Idealt

Approx.-filter (Fysikaliskt)

Högpass filter (HP-)

Idealt

Approx.-filter

Bandpass filter (BP-)

Idealt filter

Approx.-filter

Bandspärfilter (BS-)

Idealt

Approx.-filter

Allpass filter (AP-)

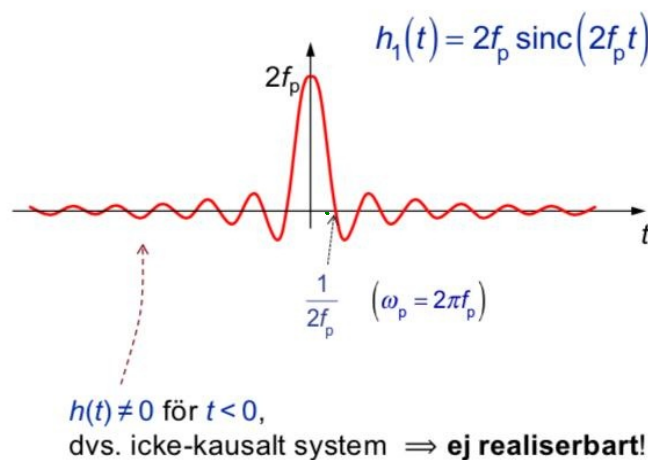
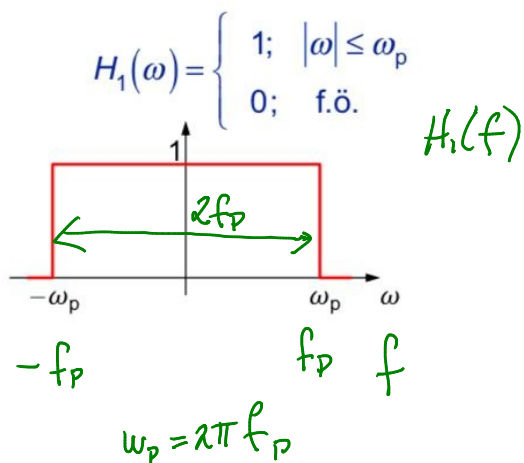
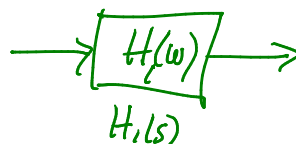
$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

$H(s)$

$j\omega$

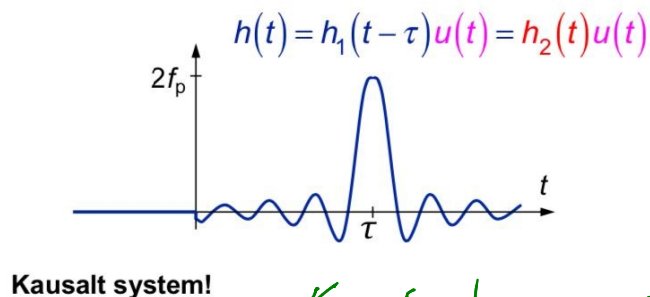
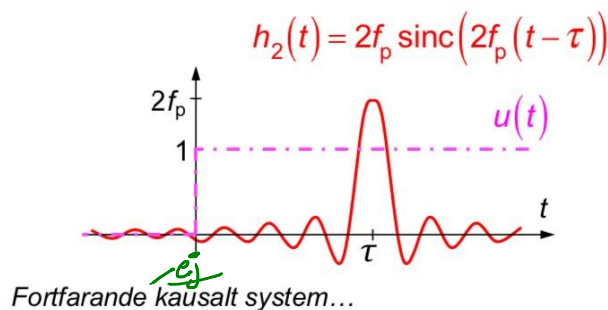
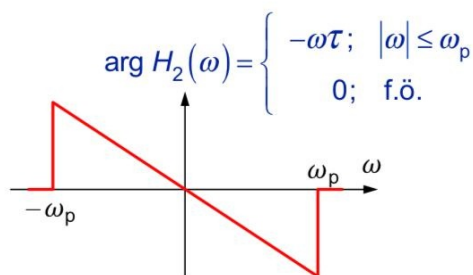
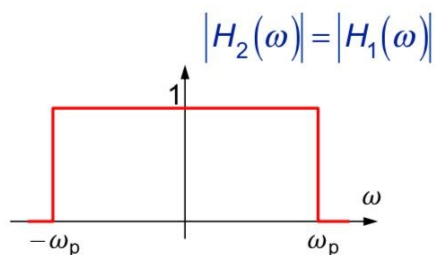
σ

Exempel – Idealt LP-FILTER



Blir det bättre om man tidsförskjuter sincen och multiplicerar med $u(t)$?

$$H_2(\omega) = H_1(\omega)e^{-j\omega\tau} \Leftrightarrow h_2(t) = h_1(t - \tau)$$



Kan ej placera poler/nollst
som gör detta

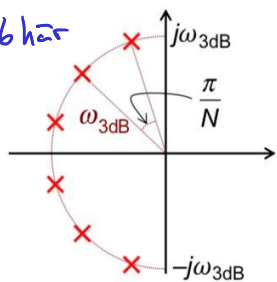
Demonstration i Matlab av:

- 1) De ideala LP-filtren ovan
- 2) Placering av poler och nollställen för approximationsfilter (LP)
(inför fortsättningen med butterworthfilter på nästa sida)

Butterworthfilter – (Amplitudnormerat LP-filter)

N poler hos $H(s)$ längs en halvcirkel (n i kursboken):

$N=6$ här

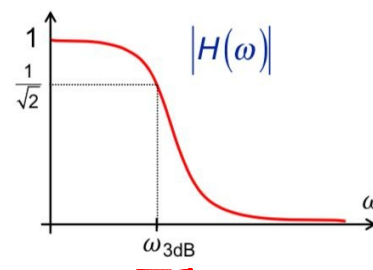


Poler:

$$p_k = \omega_{3dB} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2N} + k \cdot \frac{\pi}{N}\right)} = \omega_{3dB} \cdot e^{j\left(\frac{2k+N-1}{2N}\right)\pi}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, N$$

ω_{3dB} = 3 dB-gränsvinkelfrekvensen
(ω_p i formelsamlingen)



$$H(s) = \frac{(\omega_{3dB})^N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s + (\omega_{3dB})^N}$$

a_i erhålls vanligen från tabell eller genom utveckling av $(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_N)$

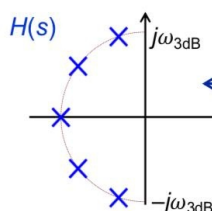
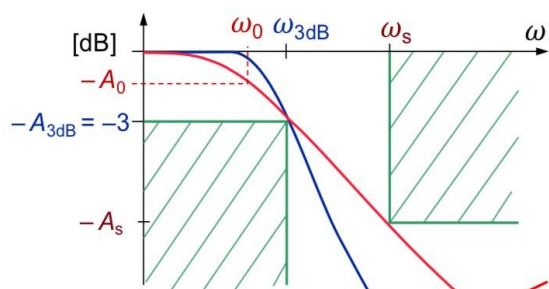
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{3dB}}\right)^{2N}}}$$

Formelsamlingen: $p_k = \omega_p \cdot e^{j\left(\frac{1+k}{2N}\right)\frac{\pi}{2}}$, $k = 1, 3, 5, \dots, 2N-1$
(Olika sätt att beskriva och numrera polpositionerna.)

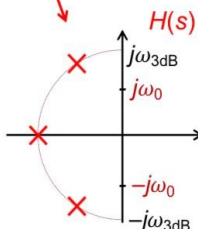
$$\begin{aligned} |H(\omega_{3dB})| &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{3dB}}{\omega_{3dB}}\right)^{2N}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Amplitudkaraktäristiken i dB-skala

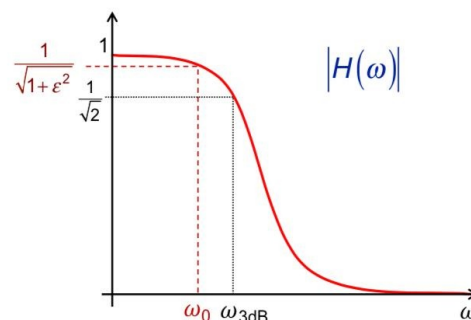
$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \cdot 10 \log |H(\omega)|$$



$N=5$



Butterworthfilter ger bästa möjliga passbands-approximation



$$A_0 = 20 \cdot 10 \log \sqrt{1 + \epsilon^2} \text{ dB dämpning}$$

vid $\omega_0 = \omega_{3dB} \cdot \epsilon^{1/N}$

Kursboken: Gränsvinkelfrekvensen = ω_0 oavsett dämpning där.
Här gör jag detsamma, men det är tydligare att använda ω_{3dB} eftersom vi i kursen bara fokuserar på 3 dB-gränsvinkelfrekvens för alla filter.
(Notera igen att ω_{3dB} betecknas ω_p i formelsamlingen)