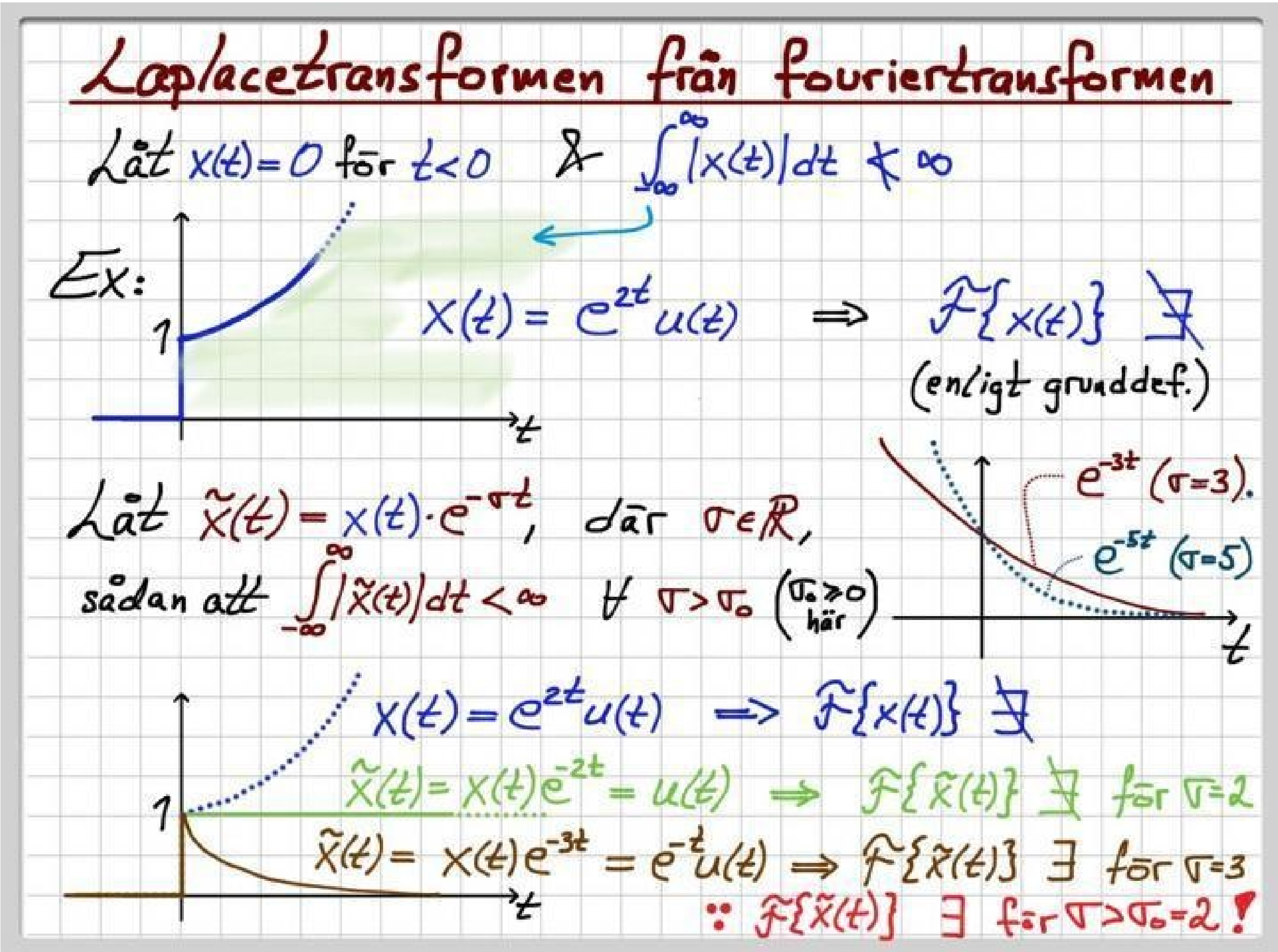
TSBB32 – Föreläsning 17: Videosammanfattningar

Under de tre kommande föreläsningarna används laplacetransformen som matematiskt "verktyg" vid analys av tidskontinuerliga signaler och (i synnerhet) LTI-system.

De tre inledande videorna nedan är från en inledande transformteoridel en annan av mina kurser.

Laplacetransformanalys av signaler

Härledning av laplacetransformen



Del 1

Härledning av den enkelsidiga laplacetransformen utgående från fouriertransformen.

Fokus:

* Signalen x(t) är här inte absolutintegrerbar,vilket innebär att den inte har någon fouriertransform $X(\omega)$.
* Betrakta i stället signalen $\tilde{x}(t) = x(t) \cdot e^{-\sigma t}$.
  Om σ väljs tillräckligt stort, $\sigma > \sigma_0$, så blir $\tilde{x}(t)$ absolutintegrerbar och för dessa σ så existerar fouriertransformen till $\tilde{x}(t)$.

...forts, Del 2

Laplacetransformen från fouriertransformen

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \Big/ \begin{matrix}\tilde{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t} \\ x(t) = 0 \text{ för } t<0\end{matrix} \Big/ = \int_{0-}^{\infty} x(t)\, e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{0-}^{\infty} x(t)\, e^{-(\sigma+j\omega)t}\, dt = \Big/ \boxed{s = \sigma + j\omega} \Big/$$

$$= \underline{\int_{0-}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt = X(s)}$$

$$\left(\begin{matrix} \text{Jämför med} \\ X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \end{matrix} \right)$$

Den enkelsidiga laplacetransformen till x(t) (där $x(t)=0$ för $t<0$):

$$\boxed{X(s) = \mathcal{L}_I\{x(t)\} = \int_{0-}^{\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt}$$

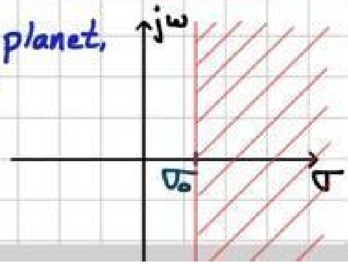
$X_I(s) =$

Existensvillkor, $|X(s)| < \infty$

Konvergensområde:

$$\sigma = \underline{\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0}$$

s-planet, $\mathbb{C}$:



Från 3:31 – Central slutsats i den övre halvan av bilden ovan:
Laplacetransformen av x(t) är ekvivalent med fouriertransformen av x̃(t)!

Från 5:45 – Definition av den enkelsidiga laplacetransformen av/till x(t).

Från 7:07 – Laplacetransformens konvergensområde, dvs. de s-värden för vilka transformen är definierad.

OBS: För att en laplacetransform ska vara fullständigt specificerad, så måste även dess konvergensområde anges!

Laplacetransformexempel

Laplacetransformexempel $x(t) = e^{2t}u(t)$

$$X(s) = \mathcal{L}_I\{x(t)\} = \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt = \int_{0-}^{\infty} e^{(2-s)t}\,dt$$

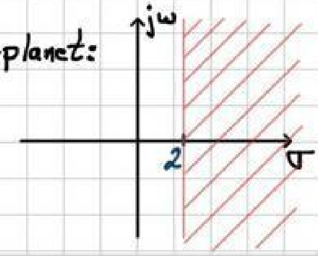
$$= \left[\frac{e^{(2-s)t}}{2-s}\right]_{0-}^{\infty} = \frac{1}{2-s}\left(\lim_{t\to\infty} e^{(2-s)t} - \underbrace{e^{(2-s)\cdot 0}}_{=1}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{(2-s)t} \overset{s=\sigma+j\omega}{=} \lim_{t\to\infty} e^{(2-\sigma)t}\cdot \underbrace{e^{-j\omega t}}_{|e^{j\omega t}|=1\ \forall t}$$

$$= 0 \text{ om } 2-\sigma<0 \Rightarrow \sigma>2$$

$$= \frac{0-1}{2-s} = \frac{1}{s-2}$$

s-planet:

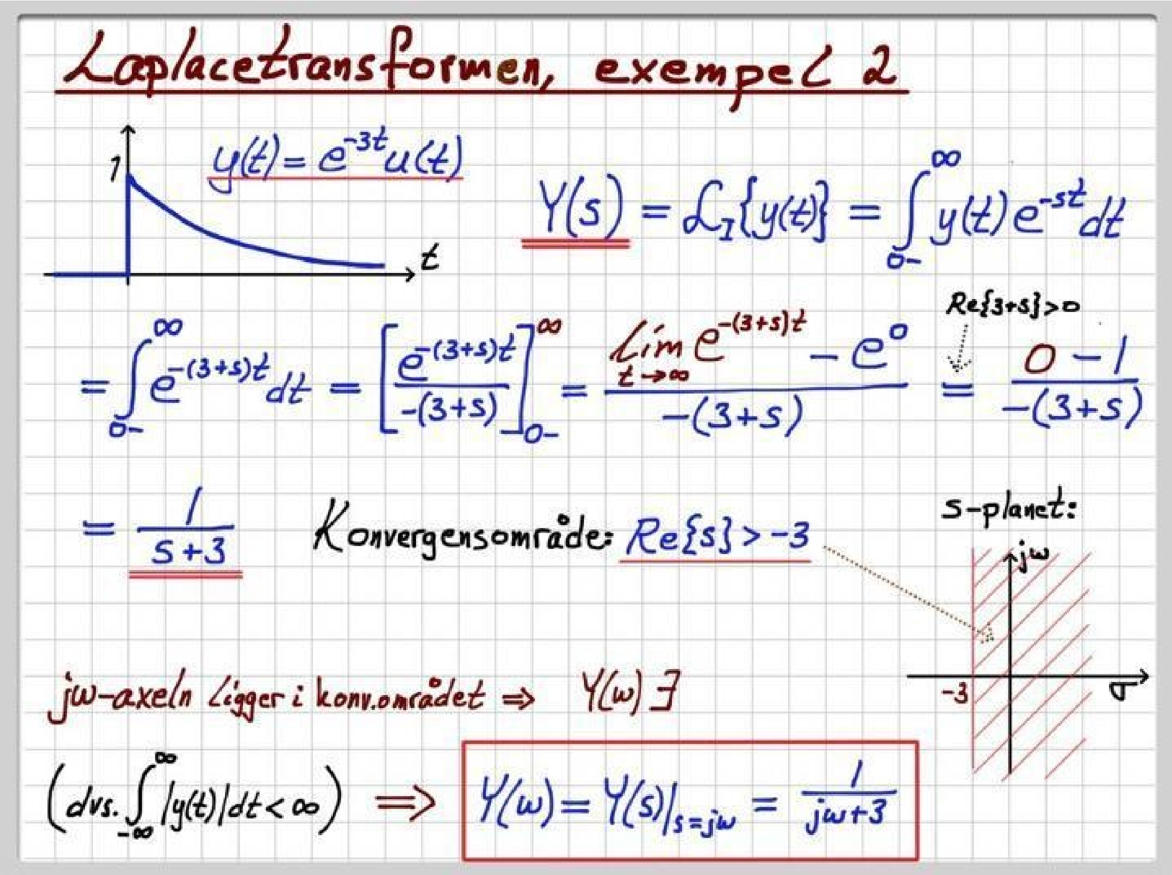


Konvergensområde: $Re\{s\}>2$

Ett räkneexempel (Exempel 1) som visar hur man beräknar laplacetransformen av en signal $x(t) = e^{2t}u(t)$, som inte är fouriertransformerbar (eftersom den inte är absolutintegrerbar).

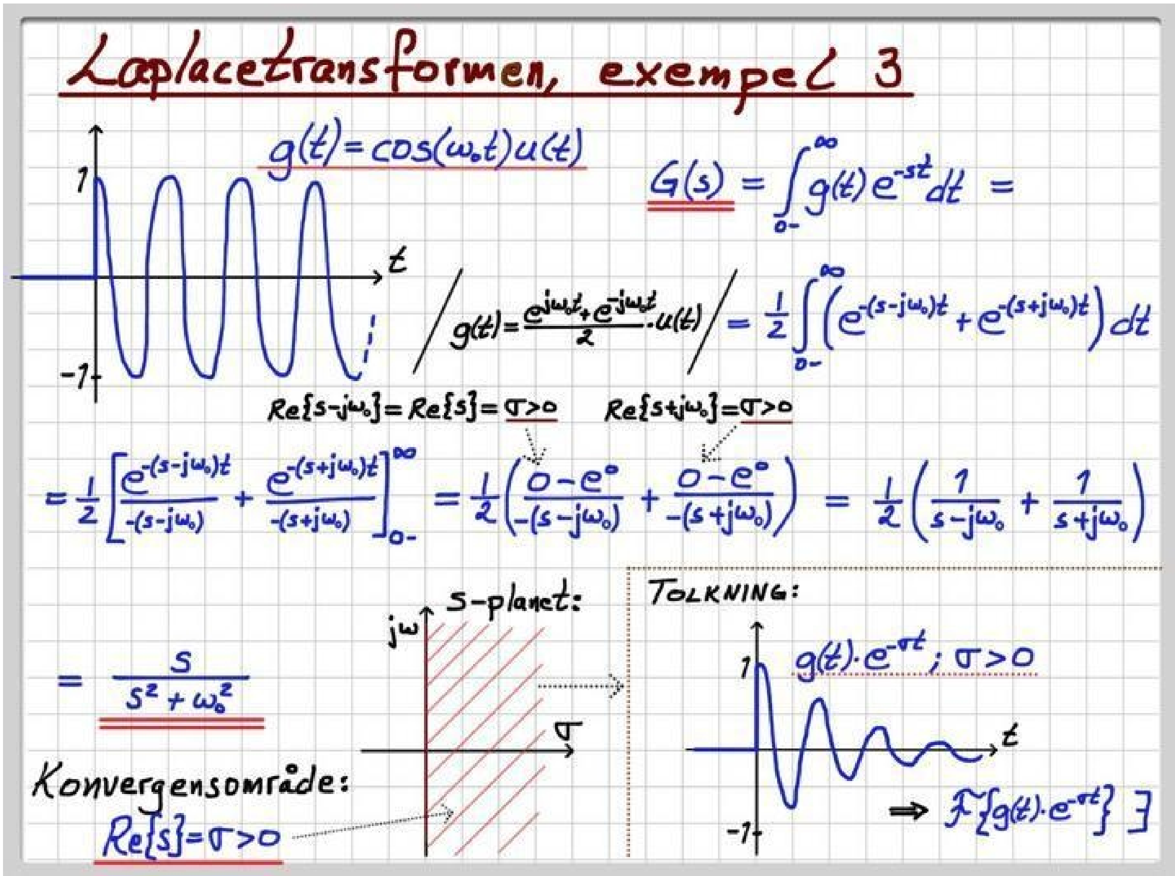
Laplacetransformens konvergensområde $\sigma = Re\{s\} > 2$ uppkommer här som krav för att integralen ska konvergera.
Konsekvensen blir att $|X(s)|<\infty$ i konvergensområdet.

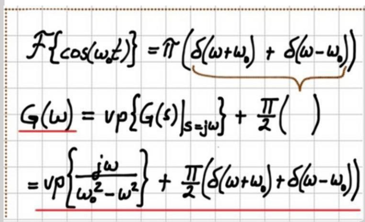
Laplacetransformexempel 2 och 3



Här visas ytterligare två exempel på beräkning av enkelsidig laplacetransform:

* Exempel 2, (från 0:00): Laplacetransformen av $y(t) = e^{-3t}u(t)$





* Exempel 3, (från 4:48): Laplacetransformen av $g(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$.

Från 10:00 beskriver jag hur $\cos(\omega_0 t)$ har en fouriertransform men inte en laplacetransform.