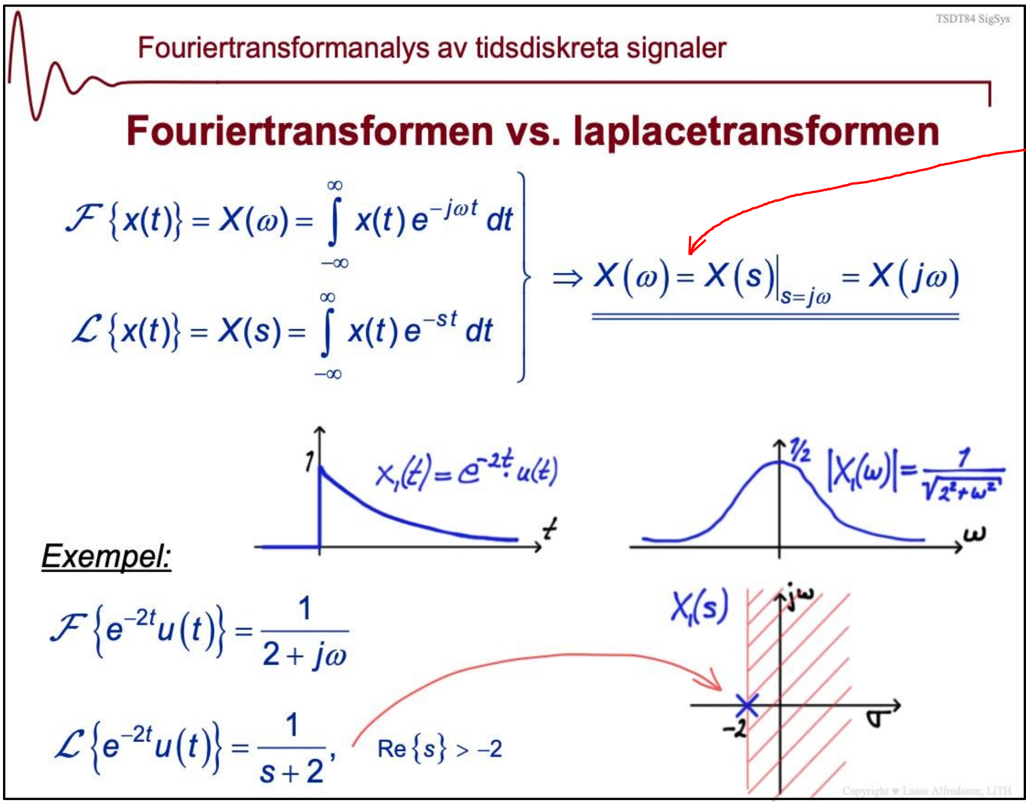
TSBB32 – Föreläsning 18: Videosammanfattning

Laplacetransformanalys av signaler

Relationen mellan fouriertransformen och laplacetransformen



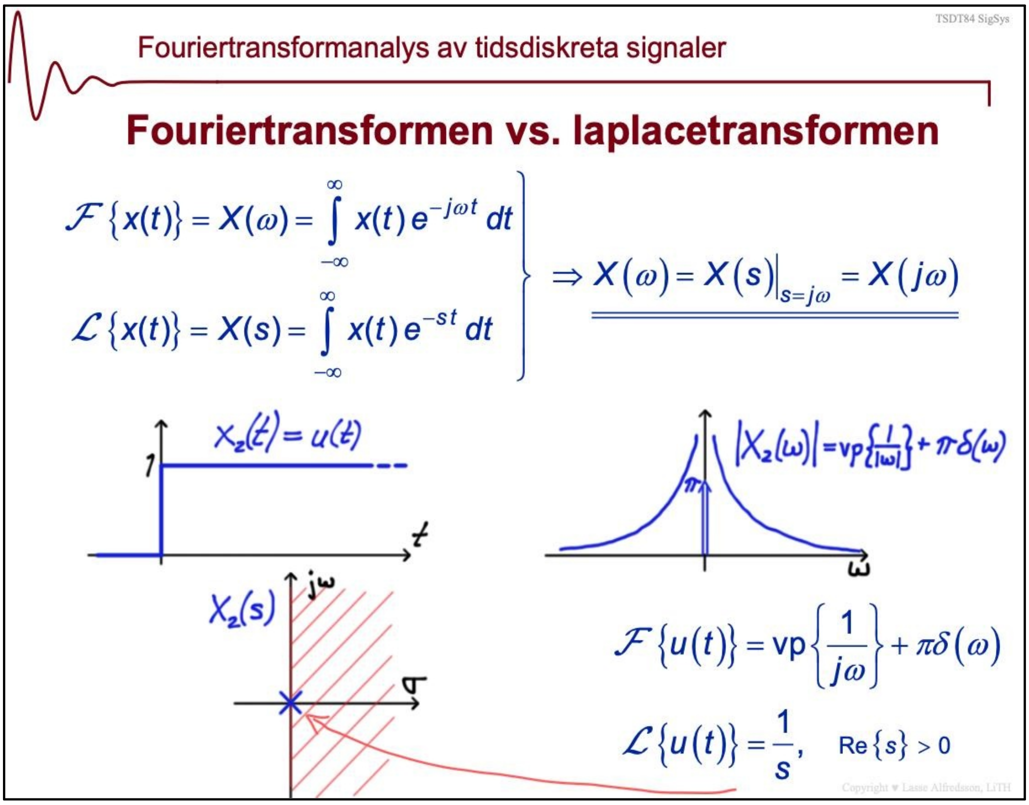
X(ω) = X(s) för s=jω gäller bara om jω-axeln ligger i konvergensområdet för X(s), dvs. om x(t) är absolut-integrerbar, dvs. om X(ω) existerar enligt grunddefinitionen!

Denna video har två syften, vilket sägs i videons inledning:

1. Det är en repetition av fouriertransformen och laplacetransformen av tidskontinuerliga signaler, som speciellt tar upp relationen mellan transformerna.

2. I en annan linjära system-kurs är den en introduktion till fouriertransformen av tidsdiskreta signaler.
   Detta ingår inte i TSBB32, så det perspektivet behöver du inte bry dig om.

Videon inleds ovan med att visa att X(ω) = X(s) för s=jω, om jω-axeln ligger i konvergensområdet för X(s). Detta demonstreras sedan för signalen $x(t) = e^{-2t}u(t)$.



Från 5:27 – En jämförelse mellan fouriertransformen F{u(t)} och laplacetransformen L{u(t)}.

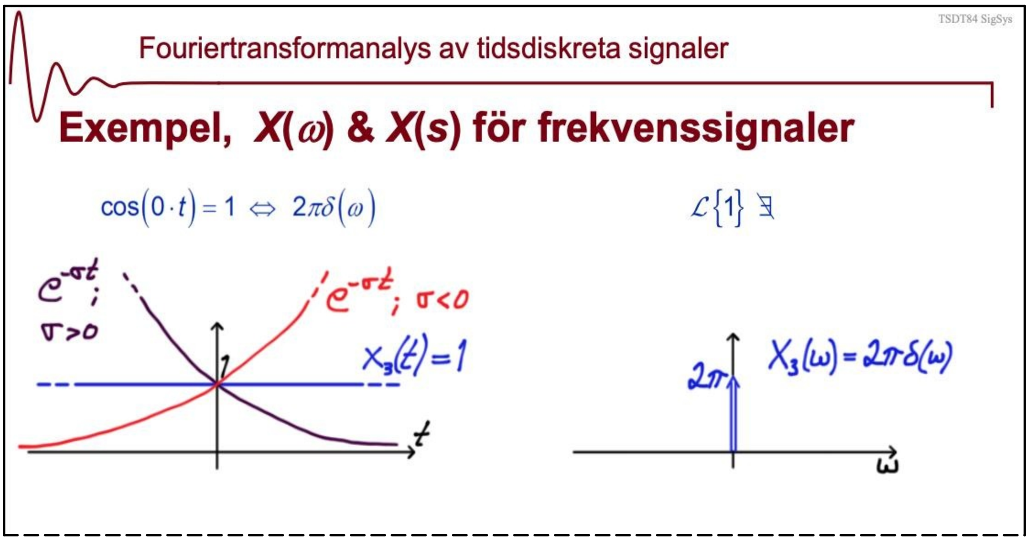
Eftersom u(t) inte är absolutintegrerbar, så existerar inte fouriertransformen F{u(t)} enligt grunddefinitionen, dvs. F{u(t)} är inte lika med laplacetransformen av u(t) längs $j\omega$-axeln för alla ω: $U(\omega) \neq U(s)$ för alla $s=j\omega$.

Notera att "vp" = principalvärde.
Se definitionen i formelsamlingen, sid. 3:

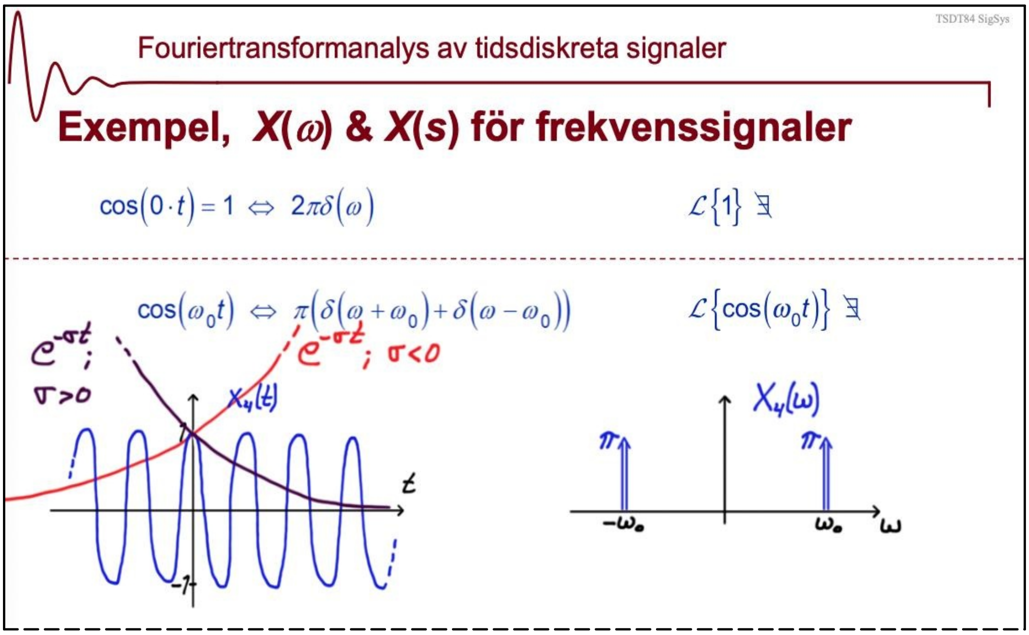
$$\mathrm{vp}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \begin{cases} 0; & t = 0 \\ \dfrac{f(t)}{t}; & t \neq 0 \end{cases}$$

Vi ser alltså här att att $F\{u(t)\} = U(\omega) = U(s)$ för alla $s=j\omega$ utom då $s=0$ (dvs. då $\omega=0$), för U(s) är inte begränsad i s=0. Termen $\pi \cdot \delta(\omega)$ i $U(\omega)$ är transformens värde i $\omega=0$.

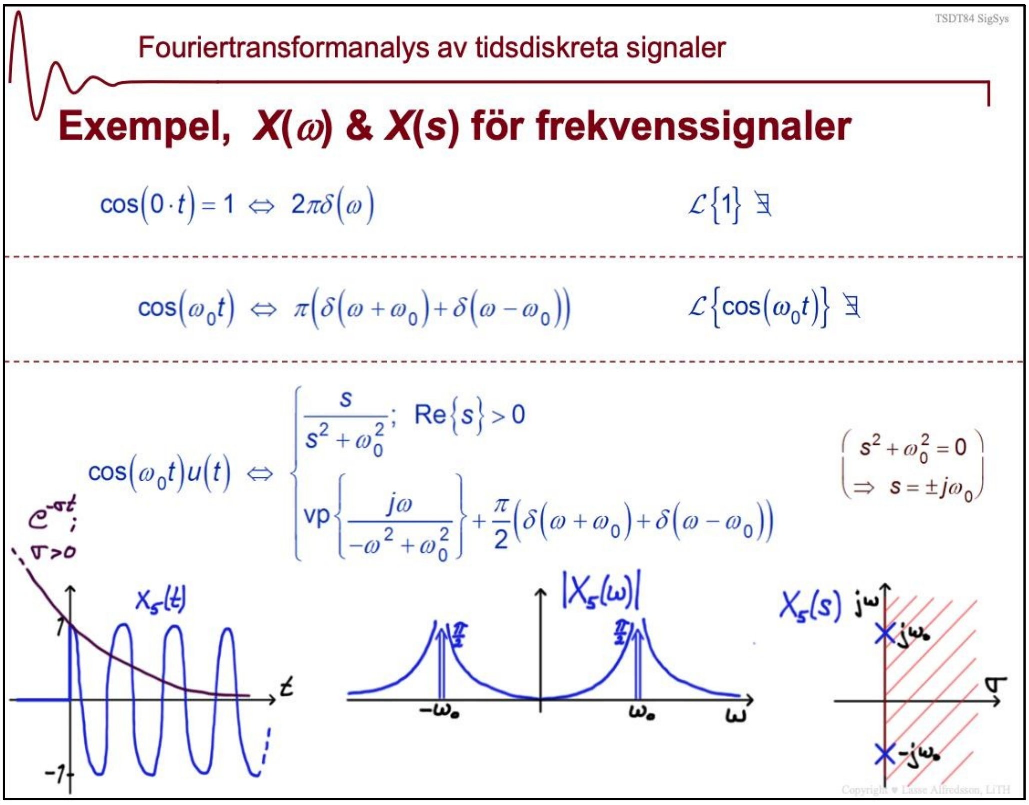
Jämförelse mellan fouriertransformen F och laplacetransformen L av frekvenssignaler



Från 7:58 – F{1} = fouriertransformen av en konstant 1:a.
Fouriertransformen existerar i distributionsmening (den består av en dirac), men konstanten $x_3(t)=1$ har ingen laplacetransform, eftersom det inte finns något σ i "konvergensfunktionen" $e^{-\sigma t}$ som gör att $x_3(t)e^{-\sigma t}$ blir absolutintegrerbar.



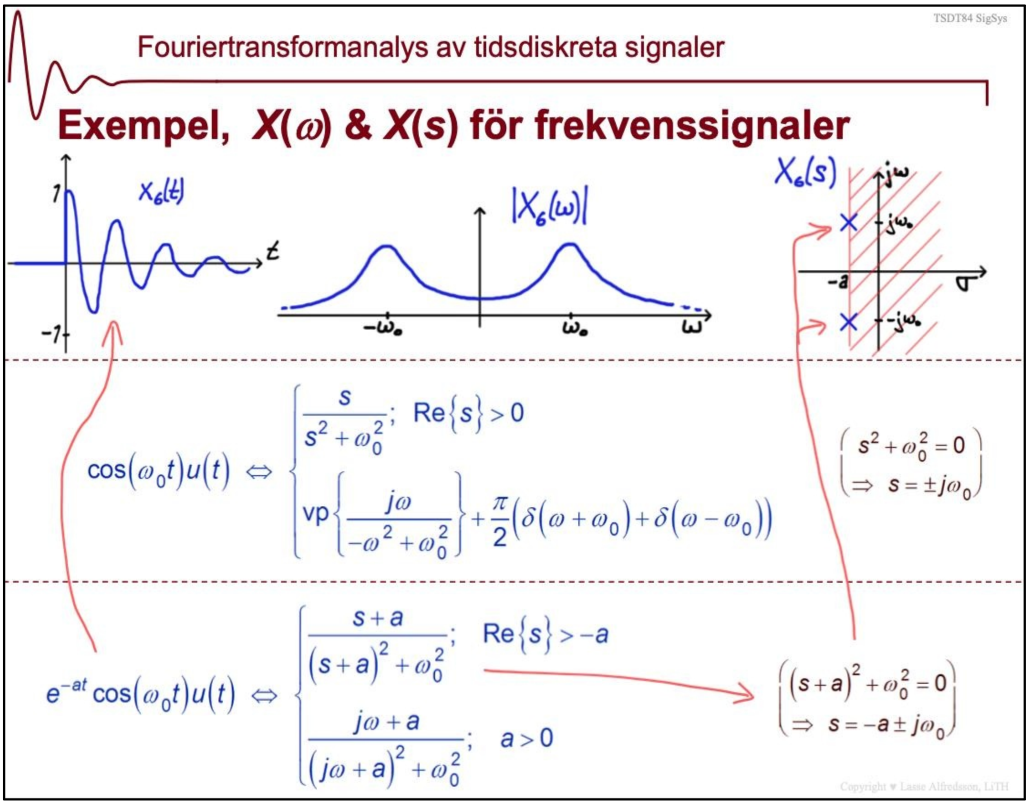
Från 10:06 – F{cos(ω_0t)} = fouriertransformen av en stationär cosinus.
Liksom för konstanten ovan, så existerar fouriertransformen av cosinusen i distributionsmening (men inte enligt grunddefinitionen, eftersom cosinusen inte är absolutintegrerbar) – och konsekvensen blir att vi får diracer i frekvensdomänen, dvs. hos fouriertransformen.
Dock, på samma sätt som för konstanten 1 ovan, så har inte heller den stationära cosinusen någon laplacetransform, eftersom det inte finns något σ i $e^{-\sigma t}$ som gör att $\cos(\omega_0 t)e^{-\sigma t}$ blir absolutintegrerbar.



Från 11:58 – F{cos(ω_0t) · u(t)} = fouriertransformen av en högersidig cosinus
jämfört med
L{cos(ω_0t) · u(t)} = laplacetransformen av samma högersidiga cosinus.

* Här existerar laplacetransformen $X_5(s)$ av den högersidiga cosinusen, eftersom cos(ω_0t) · u(t) · $e^{-\sigma t}$ blir absolutintegrerbar för $\sigma>0$. Följaktligen är detta även laplacetransformens konvergensområde, dvs. Re{s} = σ > 0.

* Viktigt: På randen till konvergensområdet (dvs. på dess gränslinje(r)) så har alltid laplacetransformen minst en singulär punkt.
I det här exemplet är det i s = jω_0 och s = –jω_0.
Här gäller därför att
$X_5(\omega) = X_5(s)$ för s=jω för alla ω utom då $\omega = \pm\omega_0$.



Från 14:48 – $F\{e^{-at}\cdot\cos(\omega_0 t)\cdot u(t)\}$ = fouriertransformen av en högersidig avtagande cosinus
jämfört med
$L\{e^{-at}\cdot\cos(\omega_0 t)\cdot u(t)\}$ = laplacetransformen av samma signal.

* Eftersom den aktuella signalen $x_6(t)$ är absolutintegrerbar (för a>0 i exemplet), så existerar dess fouriertransform $X_6(\omega)$ enligt grunddefinitionen, vilket innebär att $|X_6(\omega)| < \infty$ för alla ω.

* $x_6(t)$ är även laplacetransformerbar, och eftersom $-a<0$ så ingår $j\omega$-axeln i konvergensområdet ($\mathrm{Re}\{s\}>-a$) till signalens laplacetransform $X_6(s)$. Därför kan fouriertransformen erhållas som laplacetransformen längs $j\omega$-axeln, dvs. $X_6(\omega) = X_6(s)|_{s=j\omega}$.

* Även här ser vi att laplacetransformen $X_6(s)$ har singulära punkter på randen till sitt konvergensområde, nämligen i $s = -a \pm j\omega_0$. Laplacetransformens singulära punkter i s-planet, dvs. nämnarpolynomets nollställen, brukar kallas för poler.