

Lektionsuppgifter – FILTER (kursbokens kapitel 7)

1. Ett kausalt och stabilt elektriskt filter/LTI-system av ordning $N=3$ skall helt filtrera bort likspänningskomponenter och (co)sinussignaler med vinkelfrekvensen $2 \cdot 10^3$ rad/s. Sinussignaler med vinkelfrekvens 100 rad/s skall passera filtret utan någon amplitudförändring. Slutligen skall LTI-systemets systemfunktion ha nivåkonstanten $K=1$ samt endast reellvärda poler.
 - a) Vilka nollställen och poler hos filtrets/systemets systemfunktion $H(s)$ är nödvändiga – och varför? Bestäm $H(s)$, inklusive konvergensområde.
 - b) Rita fullständigt pol-nollställediagram för $H(s)$.
 - c) Skissera systemets amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$.
2. Ett visst amplitudnormerat lågpasfilter av butterworth-typ har 3 dB-gränsvinkelfrekvensen $\omega_{3dB}=100$ rad/s och filtrets dämpningsfaktor skall vara *högst* $\frac{1}{10}$ vid vinkelfrekvensen 150 rad/s, dvs. $|H(150)| \leq \frac{1}{10}$.
 - a) Vilket ordning måste filtret minst ha?
 - b) Bestäm dämpningsfaktorn $|H(150)|$ för butterworthfiltret med lägsta ordning enligt uppgift a). Ange även motsvarande dämpning i decibel.
 - c) Rita pol-nollställediagrammet till butterworthfiltrets systemfunktion $H(s)$, dvs. filtret i uppgift a)-b). Ange i grafen vinkelavståndet mellan polerna.
3. Ett amplitudnormerat butterworthfilter av ordning N , med systemfunktion $H_B(s)$ har 3 dB-gränsvinkelfrekvens ω_{3dB} rad/s. Systemfunktionens nivåkonstant är $(\omega_{3dB})^N$.
 - a) Visa, utgående från systemfunktionen, att $|H_B(\omega)|=1$ vid $\omega=0$ rad/s.
 - b) Om man hos systemfunktionen lägger till N nollställen i origo och ändrar nivåkonstanten till 1, så erhålls ett amplitudnormerat högpasfilter som även det har 3 dB-gränsvinkelfrekvensen ω_{3dB} rad/s. Visa detta!

4. Skissera typiska pol-nollställediagram till systemfunktionen för nedanstående kausala och stabila amplitudnormerade tidskontinuerliga filter. Skissera även amplitudkaraktärstiken för varje filter.
- Ett *lågpassfilter* med maximalt flat amplitudkaraktärstik, av ordning 5, som har 3 dB-gränsfrekvens ca. 10 Hz.
 - Ett *lågpassfilter* av ordning 5, med 3 dB-gränsfrekvens ca. 10 Hz, men som har högre dämpning i spärrbandet än filtret i uppgift a).
 - Ett *högpasfilter* med maximalt flat amplitudkaraktärstik, av ordning 4, som har 3 dB-gränsfrekvens ca. 10 Hz.
 - Ett *bandpassfilter* av ordning 6, som har mitt-vinkelfrekvens ca. 50 rad/s och bandbredd (mellan undre och övre 3 dB-gränsvinkelfrekvenserna) på ca. 20 rad/s.
5. Man vill konstruera ett tidskontinuerligt amplitudnormerat lågpasfilter av ordning 6, med 3 dB-gränsvinkelfrekvensen $\omega_{3dB} = 500$ rad/s. En av många lösningar (lösning A) är att använda ett butterworthfilter av ordning 6. En annan lösning (lösning B) är att kaskadkoppla två likadana butterworthfilter av ordning 3, där båda filtren har 3 dB-gränsvinkelfrekvens ω_p .
- Bestäm ω_p .
 - Vilket av systemen (lösning A eller B) är bäst? Förklara!

LÖSNINGAR:

1. a) • Ett nollställe i origo hos $H(s)$ tar bort ev. Likhspänningskomponent hos insignalen $x(t)$.
($|H(\omega=0)| = 0$)

• $x(t) = \hat{X} \cos/\sin(2 \cdot 10^3 t + \varphi) \Rightarrow$ /stabilit/
 $\Rightarrow y(t) = \underbrace{\hat{X}/H(2 \cdot 10^3)}_{|H(\omega)|_{\omega=2 \cdot 10^3}} \cos/\sin(2 \cdot 10^3 t + \dots) = 0$

$\Rightarrow |H(\omega)|_{\omega=2 \cdot 10^3} = 0 \Rightarrow H(s)$ måste ha
nollställen i $s = \pm j 2 \cdot 10^3$

- Ordning 3 \Rightarrow 3 poler — reella, enl. uppgift.
Lät, för enkelhetens skull, alla ligga på samma
ställe; $s = -a < 0$ (< 0 ty kausalt & stabilt)

$\Rightarrow H(s) = \frac{s(s^2 + (2 \cdot 10^3)^2)}{(s+a)^3} \quad (K=1)$

Stabilit $\Rightarrow H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{j\omega(\omega^2 + 4 \cdot 10^6)}{(a + j\omega)^3}$

$\Rightarrow |H(\omega)| = \frac{|\omega| \cdot |\omega^2 + 4 \cdot 10^6|}{(\sqrt{a^2 + \omega^2})^3}$

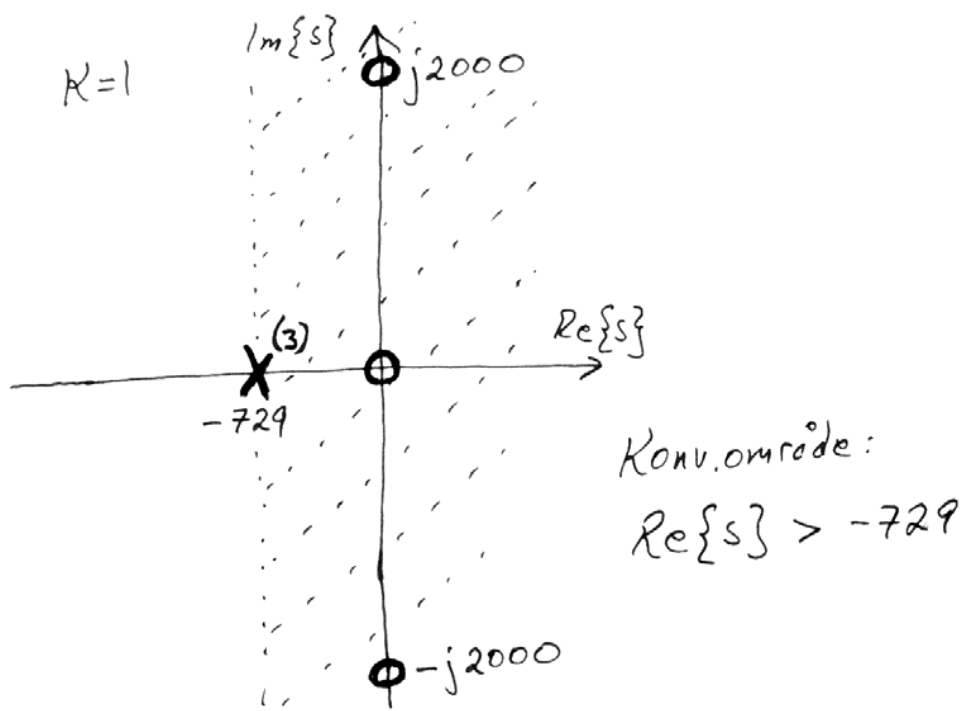
Enl. uppgift: $|H(100)| = \frac{100(-100^2 + 4 \cdot 10^6)}{(a^2 + 100^2)^{3/2}} = 1$

$\Rightarrow \underline{a \approx 729}$

$\circ \circ \quad H(s) = \frac{s(s^2 + 4 \cdot 10^6)}{(s + 729)^3}$

Konvergensområde: $\text{Re}\{s\} > -729$
(\Rightarrow kausalt & stabilt)

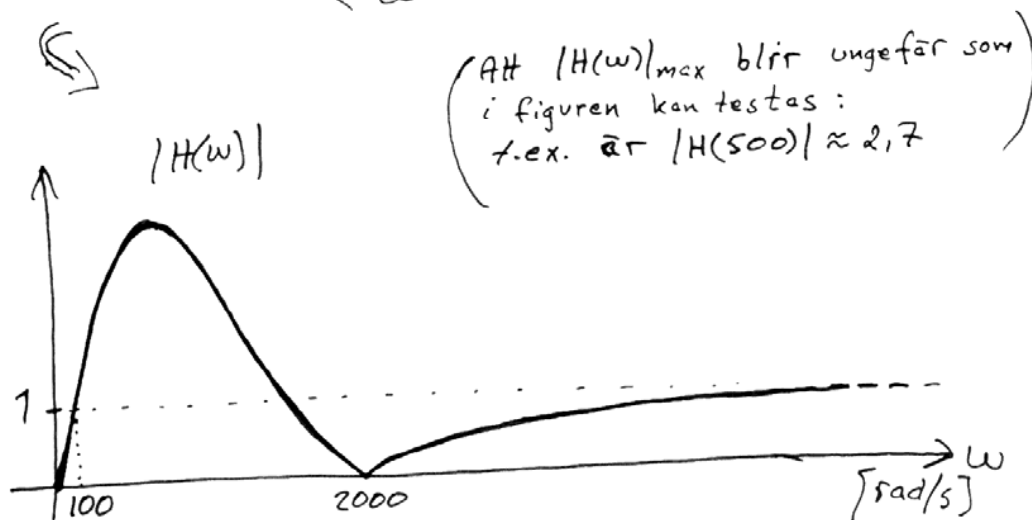
1. b)



c) $|H(0)| = |H(2000)| = 0, |H(100)| = 1$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{|-\omega^3 + \omega \cdot 4 \cdot 10^6|}{(729^2 + \omega^2)^{3/2}} =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\left|1 - \frac{4 \cdot 10^6}{\omega^2}\right|}{\left(\frac{729}{\omega^2} + 1\right)^3} = \frac{1-0}{(0+1)^3} = 1 \quad (=K?)$$



2. a) Butterworthfiltrets amplitudkarakteristik:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{3dB}}\right)^{2N}}} ; \omega_{3dB} = 100 \text{ rad/s}$$

$$|H(150)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{150}{100}\right)^{2N}}} \leq \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow 1,5^{2N} \geq 10^2 - 1 = 99$$

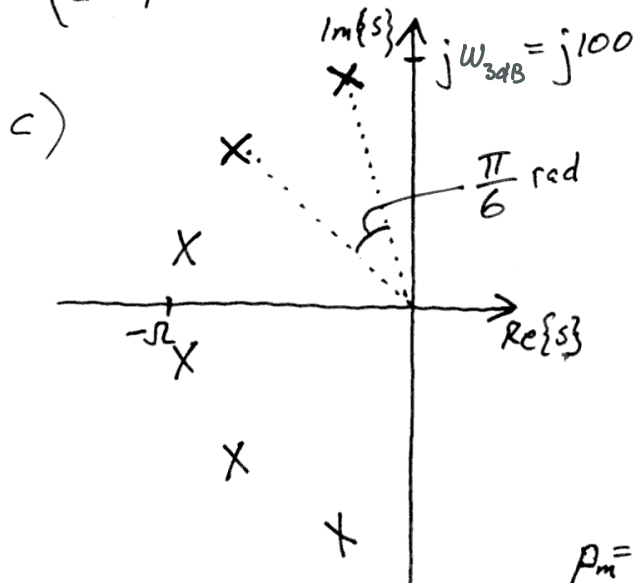
$$= 2N \cdot \log 1,5 \geq \log 99$$

$$\Rightarrow N \geq \frac{\log 99}{2 \cdot \log 1,5} \approx 5,7 \Rightarrow \underline{N_{\min} = 6}$$

b) $|H(150)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{150}{100}\right)^{2 \cdot 6}}} \approx \underline{0,0875}$

$20 \cdot \log(0,0875) \approx -21$, dvs. en dämpn.faktor på 0,0875 motsvarar ≈ 21 dB dämpning

(dämpn.faktorn $\frac{1}{10}$ motsvarar 20 dB dämpning)



Nivåkonstanten är

$$K = (\omega_{3dB})^N = 100^6$$

Polernas lägen:

$$P_m = \omega_{3dB} \cdot e^{j\left(1 + \frac{m}{6}\right)\frac{\pi}{2}},$$

$$m = 1, 3, 5, 7, 9, 11$$

dvs.

$$P_m = 100 \cdot e^{j\varphi_m}, \text{ där}$$

$$\varphi_m = \frac{7\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \text{ rad}$$

OBS: Polernas exakta lägen är inte centralt här, utan snarare att de ligger på en halvcirkel med radien ω_{3dB} .

$$3. \quad a) \quad H_B(s) = \frac{(\omega_{3dB})^N}{(s-p_1)(s-p_3)(s-p_5)\dots(s-p_{2N-1})}$$

där $p_m = \omega_{3dB} e^{j(1+\frac{m}{N})\frac{\pi}{2}}$, $m = 1, 3, 5, \dots, 2N-1$

$$\Rightarrow |H_B(\omega)| = \frac{(\omega_{3dB})^N}{|(j\omega-p_1)(j\omega-p_3)(j\omega-p_5)\dots(j\omega-p_{2N-1})|}$$

$$\Rightarrow |H_B(0)| = \frac{(\omega_{3dB})^N}{|(-p_1)(-p_3)(-p_5)\dots(-p_{2N-1})|}$$

$$= \frac{(\omega_{3dB})^N}{|\omega_{3dB}|} = \frac{(\omega_{3dB})^N}{(\omega_{3dB})^N} = 1$$

$$b) \quad H(s) = \frac{s^N}{(s-p_1)(s-p_3)(s-p_5)\dots(s-p_{2N-1})}$$

$$= H_B(s) \cdot \frac{s^N}{(\omega_{3dB})^N} \Rightarrow |H(\omega)| = |H_B(\omega)| \cdot \frac{|\omega|^N}{(\omega_{3dB})^N}$$

$$\Rightarrow \bullet |H(0)| = |H_B(0)| \cdot \frac{0^N}{\omega_{3dB}} = \frac{1}{\omega_{3dB}} \cdot 0 = 0$$

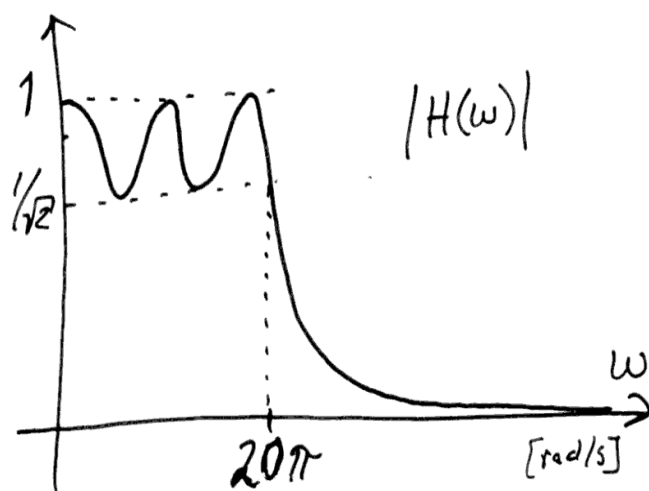
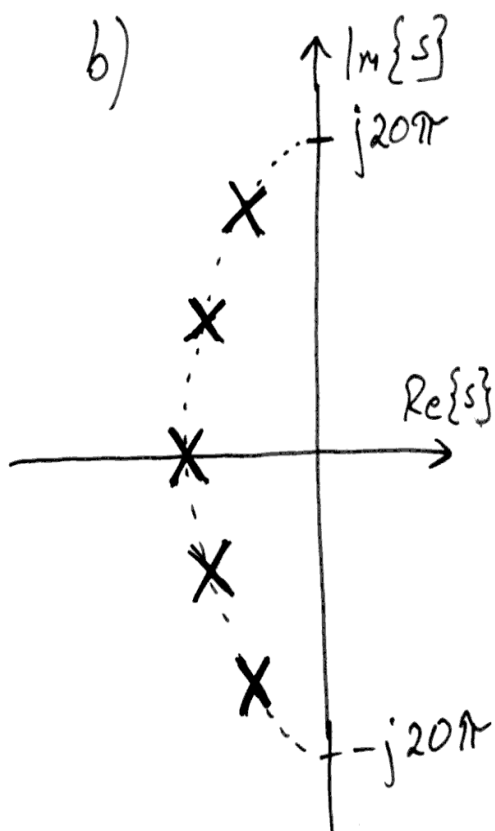
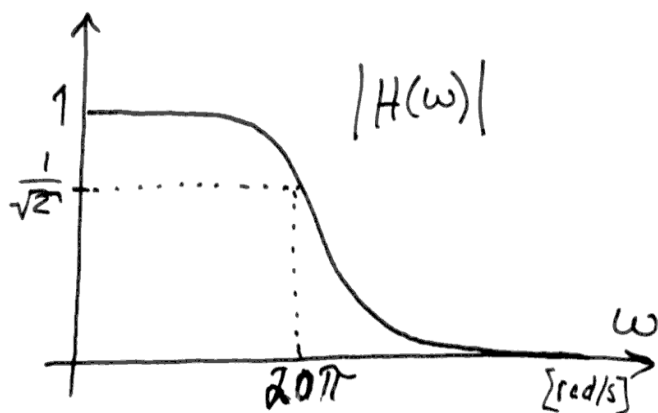
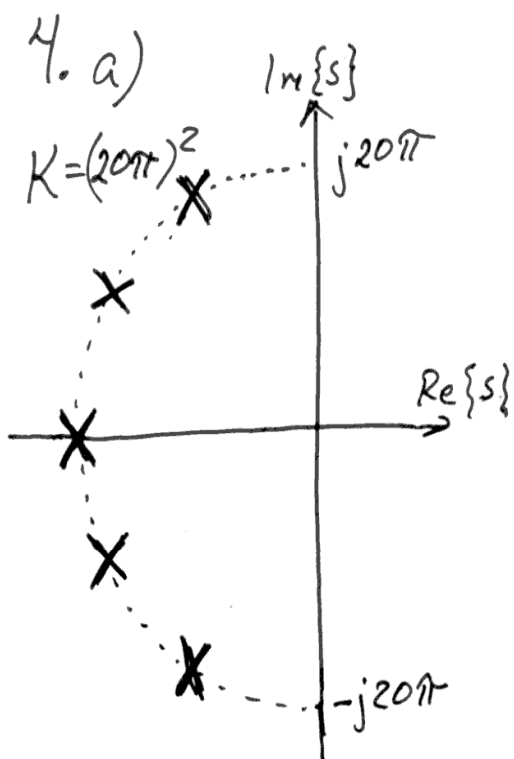
$$\bullet |H(\omega_{3dB})| = |H_B(\omega_{3dB})| \cdot \frac{(\omega_{3dB})^N}{(\omega_{3dB})^N} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

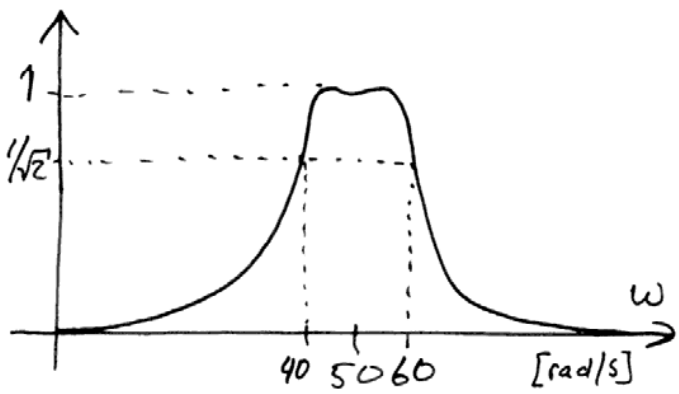
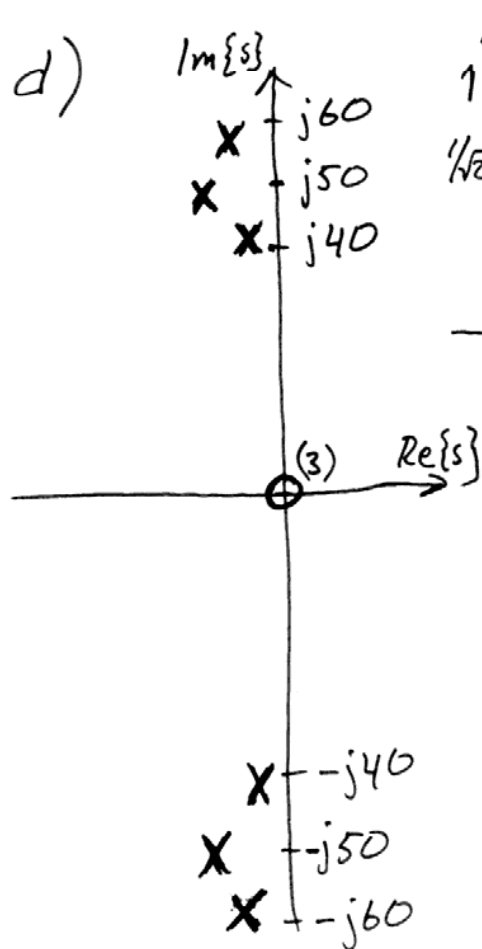
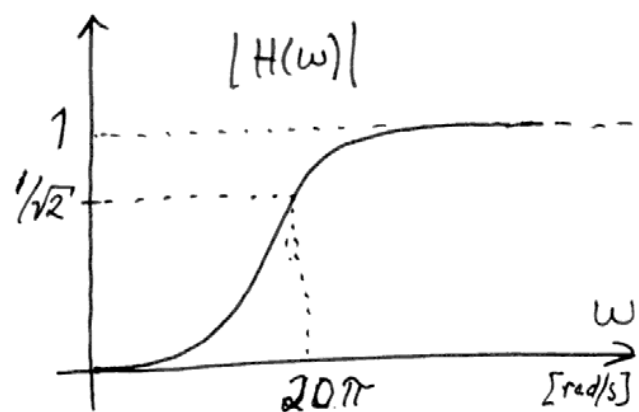
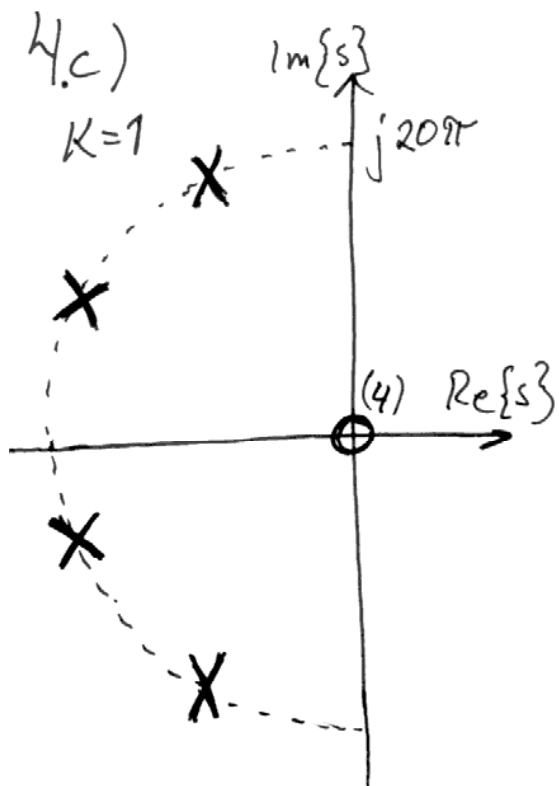
$$\bullet \lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega^N}{|(j\omega-p_1)(j\omega-p_3)\dots|}$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{|(j - \frac{p_1}{\omega})(j - \frac{p_3}{\omega})(j - \frac{p_5}{\omega})\dots(j - \frac{p_{2N-1}}{\omega})|}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 1 \dots 1} = 1$$







$$5. a) |H_A(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{3dB}}\right)^{2 \cdot 6}}}$$

$$|H_B(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2 \cdot 3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2 \cdot 3}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2 \cdot 3}}$$

$$|H_A(\omega_{3dB})| = \frac{1}{\sqrt{2}} = |H_B(\omega_{3dB})| = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_{3dB}}{\omega_p}\right)^6}$$

$$\Rightarrow \underline{\omega_p} = \frac{\omega_{3dB}}{(\sqrt{2} - 1)^{1/6}} = \frac{500}{(\sqrt{2} - 1)^{1/6}} \approx \underline{\underline{579 \text{ rad/s}}}$$

b) Dämpning "långt ute" i spärbandet, dus. för stora ω ($\left(\frac{\omega_{3dB}}{\omega}\right)^{12} \gg 1, \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^6 \gg 1$)

$$\Rightarrow |H_A(\omega)| \approx \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{3dB}}\right)^{12}}} \approx \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_{3dB}}\right)^6} = \left(\frac{\omega_{3dB}}{\omega}\right)^6$$

$$\underline{\underline{|H_B(\omega)|}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^6} \approx \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^6} = \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^6 =$$

$$= \left(\frac{\omega_{3dB}}{\omega}\right)^6 \cdot \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \approx \underline{\underline{|H_A(\omega)| \cdot 2,4}}$$

\Rightarrow System/lösning A ger 2,4 gånger så hög dämpning som system/lösning B! (Dvs. lösning A är bättre än lösning B?)

