Faltning

Energifritt LTI-system

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}\{\bullet\}} \longrightarrow y(t)$$

$\mathcal{H}$ = systemoperatorn; $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$

- Från def. av $\delta(t)$ följer: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$

=> $$y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \mathcal{H}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau) \; d\tau\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{H}\{\delta(t-\tau)\} \; d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau) \; d\tau$$

Faltning, forts.

Energifritt LTI-system

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\boxed{y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau}$$

Konvergensvillkor: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| < \infty\,, \quad |h(t)| < \infty$ (alt. byt plats på x och h)

DEMO

$$g(t) = \mathcal{H}[u(t)] = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dg(t)}{dt} = h(t)}$$

Stabilitet

Energifritt LTI-system

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

Vi vet: Stabilt LTI-system <=> $y(t)$ begränsad för varje begränsad $x(t)$

Konsekvens:

Stabilt LTI-system <=> $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$

Marginellt stabilt system <=> $|h(t)| < \infty \quad \forall t$

men $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \infty$

Differentialekvationsbeskrivning av LTI-system

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

- Ett tidskontinuerligt n:te ordningens diskret LTI-system kan beskriva av en linjär n:te ordningens differentialekvation:

$$\boxed{a_0 y(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = b_0 x(t) + \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}}$$

- Lösning: $\boxed{y(t) = \underbrace{y_{\mathrm{h}}(t)}_{\text{Oberoende av insignalen}} + \overbrace{y_{\mathrm{p}}(t)}^{\text{Beror på insignalen}}}$

Differentialekvationsbeskrivning, forts.

- Energifritt (initialtillstånden = 0) linjärt system:

$$x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0$$

- Om något initialvillkor $\neq 0$ (för annars linjärt system):

Inkrementellt linjärt system