

LAPLACETRANSFORMEN

Antag $\left\{ \begin{array}{l} x(t < 0) = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \infty \end{array} \right. \Rightarrow \underline{\mathcal{F}\{x(t)\}} \nexists$ (enl. grunddef.)

Låt $\tilde{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t}$, där $\sigma \in \mathfrak{R}$, sådan att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(t)| dt < \infty \quad \forall \quad \sigma \geq \text{något } \sigma_0 > 0$$

Följaktligen existerar $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$

(Enkelsidig) laplacetransform, forts.

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

$$= X(\sigma + j\omega) = X_I(s) = \mathcal{L}_I\{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

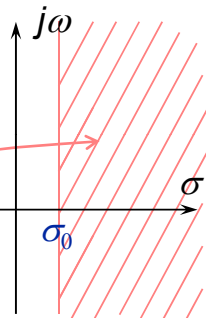
Låt $s = \sigma + j\omega$

$X(s) = X_I(s)$: Enkelsidig laplacetransform

Konvergensområde: $\sigma = \text{Re}\{s\} > \sigma_0$

OBS! $\begin{cases} \mathcal{F}\{x(t)\} \nexists & \Leftrightarrow \sigma_0 > 0 \\ \mathcal{F}\{x(t)\} \exists & \Leftrightarrow \sigma_0 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$$



Dubbelsidig laplacetransform

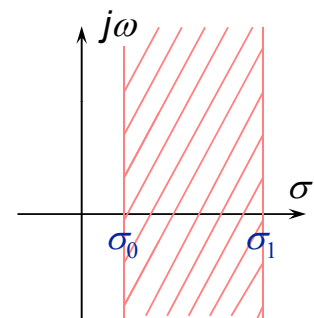
- ♦ Låt $x(t) \exists \forall t$ och låt $\mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} \exists$ för något reellt σ i intervallet $\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$:

$$X_{\text{II}}(s) = \mathcal{L}_{\text{II}}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Dubbelsidig
laplacetransform

Konvergensomr. för $X_{\text{II}}(s)$: $\sigma_0 \leq \sigma = \text{Re}\{s\} \leq \sigma_1$

(OBS! Om $\mathcal{F}\{x(t)\} \exists \Leftrightarrow j\omega$ -axeln ligger i konvergensområdet för $X(s)$!)



Copyright © Lasse Alfredsson, LTH

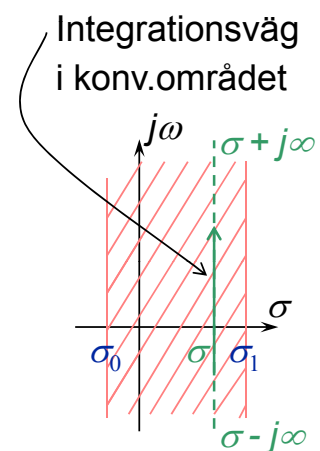
Invers laplacetransform

Den inversa laplacetransformen är densamma för den dubbelsidiga som för den enkelsidiga transformen:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

I denna kurs erhåller vi ofta (oftast) transformer och deras inverser från formelsamlingen !

Repetera gärna laplacetransformen – se Kapitel 2.4!



Kretsberäkningar, linjära *RLMC*-nät (passiva kretselement, laplacetransformerbara källor)

METODIK, beräkna godtycklig nätspänning / -ström:

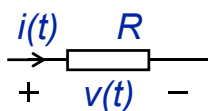


Om nätförändringar sker vid $t = t_0$ (här antas $t_0 = 0$) \Rightarrow Betrakta alla källor som inkopplade vid $t = t_0$ $\Rightarrow \mathcal{L}\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = X(s)e^{-st_0}$



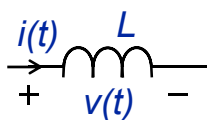
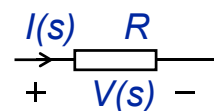
Kretsberäkningar, metodik (forts)

3) Ersätt passiva nätelement med operatorscheman:



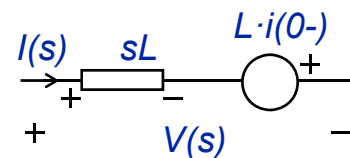
$$v(t) = R \cdot i(t)$$

$$\Leftrightarrow V(s) = R \cdot I(s)$$

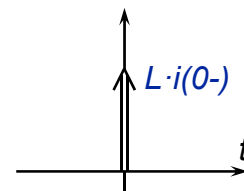


$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow V(s) = sL \cdot I(s) - L \cdot i(0^-)$$

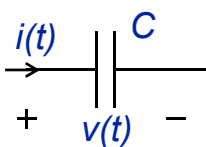


$L \cdot i(0^-)$ motsvarar en impulsformad spänning
med styrkan $L \cdot i(0^-)$ i tidsplanet ($\mathcal{L}^{-1}\{K\} = K \cdot \delta(t)$):



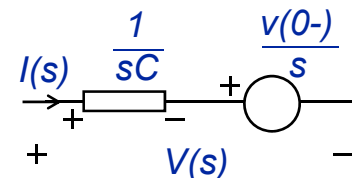
Kretsberäkningar, metodik (forts)

3) forts.

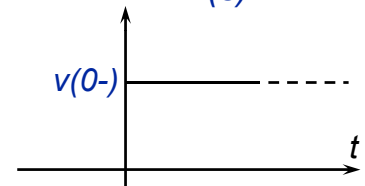


$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow V(s) = \frac{1}{sC} \cdot I(s) + \frac{v(0-)}{s}$$



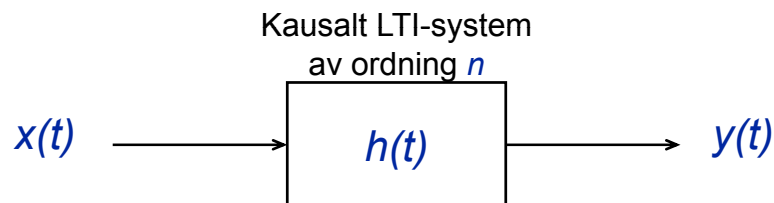
$v(0-)/s$ motsvarar en stegformad spänning med höjden $v(0-)$ i tidsplanet ($\mathcal{L}^{-1}\{K/s\} = K \cdot u(t)$):



4) Likströmsteori \Rightarrow Sökt storhets laplacetransform ($Y(s)$)

5) Inverstransformera \Rightarrow Sökt storhets tidsuttryck ($y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ Y(s) \}$)

SYSTEMANALYS



Många LTI-system kan beskrivas med en differentialekvation:

$$a_0 y(t) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = b_0 x(t) + \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

Antag $x(t < 0) = 0$ (Kausalt system ger då $y(t < 0) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_I$ kan användas)

$$\mathcal{L}_I \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} = sY(s) - y(0^-) \quad \mathcal{L}_I \left\{ \frac{d^i y(t)}{dt^i} \right\} = s^i Y(s) - s^{i-1} y(0^-) - s^{i-2} y'(0^-) - \dots$$

Systemanalys, Systemfunktion

$$\Rightarrow Y(s) = X(s) \cdot \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} + Y_{zi}(s)$$

$$\Rightarrow y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t)$$

Den *tvungna* svängningen

Den *fria* svängningen (ingår endast om systemet har begynnelseenergi)

System-
funktionen:

$$H_I(s) = \left. \frac{Y_I(s)}{X_I(s)} \right|_{\text{alla initialtillstånd} = 0} = \mathcal{L}_I\{h(t)\}$$

Systemfunktion, forts

Dvs. för energifria kausala LTI-system gäller

$$Y(s) = \mathcal{L}_{\text{I}}\{y(t)\} = \mathcal{L}_{\text{I}}\{(x * h)(t)\} = X(s)H(s)$$

För icke-kausala LTI-system gäller

$$Y_{\text{II}}(s) = X_{\text{II}}(s)H_{\text{II}}(s)$$

(Eventuell begynnelseenergi kan då inte hanteras)

Pol-Nollställediagram

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - n_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

K : Nivåkonstanten = $\frac{b_m}{a_n}$

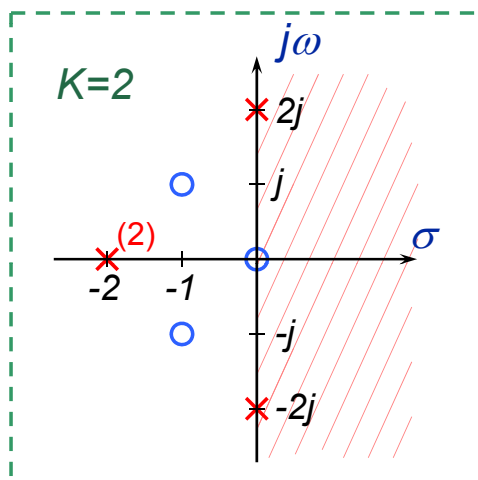
n_j : Nollställen till $H(s)$ = täljarpolynomets nollställen

p_i : Poler till $H(s)$ = nämnarpolynomets nollställen

Pol-Nollställediagram, forts

Exempel:

$$H(s) = \frac{2s^3 + 4s^2 + 4s}{s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 16s + 16} = 2 \cdot \frac{s(s+1+j)(s+1-j)}{(s+2)^2(s+2j)(s-2j)}$$



Nollställen:

$$n_0 = 0 \quad n_1 = -1 - j \quad n_2 = -1 + j$$

Poler:

$$p_1 = p_2 = -2 \quad p_3 = -2j \quad p_4 = 2j$$

Konvergensområde för $H(s)$

om *kausalt* system: $\text{Re}\{s\} > 0$

Poler, nollställen och tidssignal

- ♦ Polerna anger, tillsammans med deras respektive positioner, vilka typer av termer (signalkomponenter) som ingår signalen.

Enkelpol (reell):

($s = -\alpha$, $\text{Re}\{s\} > -\alpha$)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \alpha} \right\} = e^{-\alpha t} \cdot u(t)$$

Enkla komplexkonj. polpar:

($s = -\alpha \pm j\omega_0$, $\text{Re}\{s\} > -\alpha$)

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \right\} = e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$$

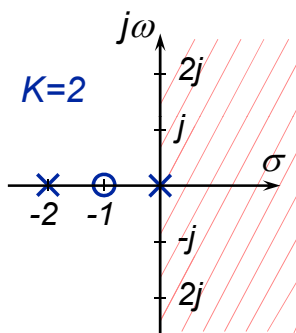
- ♦ Nollställena inverkar främst på den relativa styrkan av de olika termerna.

Överlagrade pol-nollställediagram

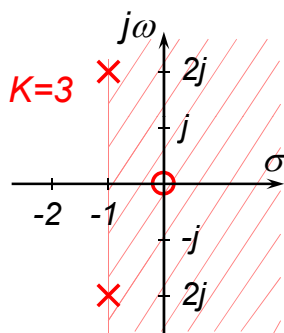
Exempel: $x(t) = (1 + e^{-2t})u(t) \longrightarrow h(t) \longrightarrow y(t)$

$$X_I(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}$$

$$= \frac{2(s+1)}{s(s+2)}$$

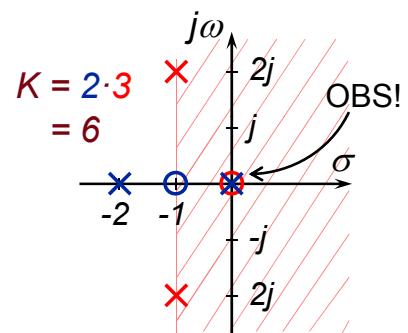


$$H_I(s) = \frac{3s}{(s+1)^2 + 2^2}$$



$$Y_I(s) = X_I(s) \cdot H_I(s)$$

$$= \frac{2(s+1)}{\cancel{s}(s+2)} \cdot \frac{3\cancel{s}}{(s+1)^2 + 2^2}$$



Copyright © Lasse Alfredsson, LTH

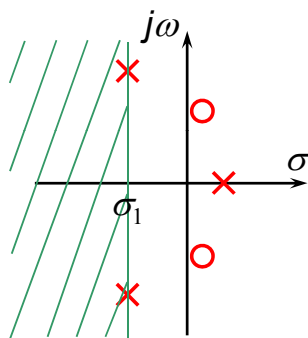
KAUSALITET & konvergensområde för $H(s)$

De tre typerna av sammanhängande konvergensområde motsvarar för systemfunktionen $H(s)$ olika kausalitetsfall:

Antikausalt system

$$h(t \geq 0) = 0$$

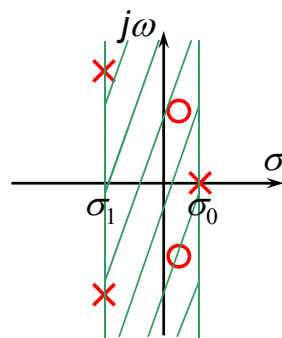
$$\underline{Re\{s\} < \sigma_1}$$



Allmänt icke-kausalt system

$$h(t < 0, t \geq 0) \neq 0$$

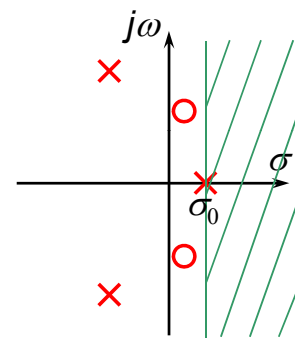
$$\underline{\sigma_1 < Re\{s\} < \sigma_0}$$



Kausalt system

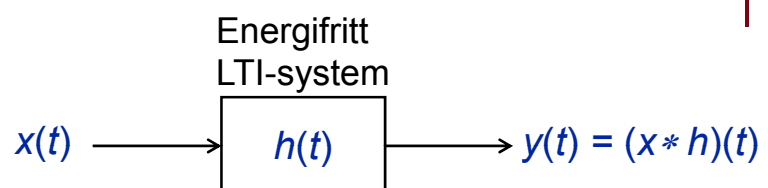
$$h(t < 0) = 0$$

$$\underline{Re\{s\} > \sigma_0}$$



Copyright © Lasse Alfredsson, LTH

STABILITET



Vi vet:

Systemet är stabilt omm $|x(t)| \leq M < \infty \rightarrow |y(t)| \leq N < \infty \quad \forall t$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) \quad \exists$$

Dvs. $j\omega$ -axeln ligger i konvergensområdet för $H(s)$

Dvs. för ett *stabilt LTI-system* gäller

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

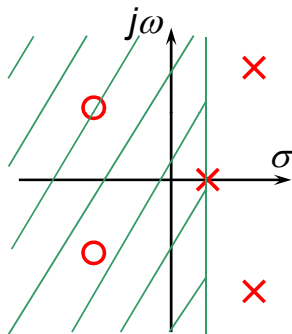
Marginellt stabilt LTI-system \Leftrightarrow $j\omega$ -axeln utgör en *rand* till konvergensområdet för $H(s)$ och alla dess poler på $j\omega$ -axeln är enkla.

OBS: För systemfunktionen till ett stabilt eller marginellt stabilt LTI-system gäller att antal poler \geq antal nollställen

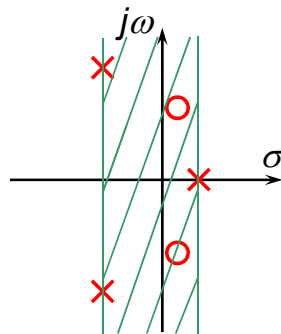
Stabilitet & Kausalitet

För ett **stabil** LTI-system med impulssvar $h(t)$ och systemfunktion $H(s)$ gäller *ett* av följande tre fall:

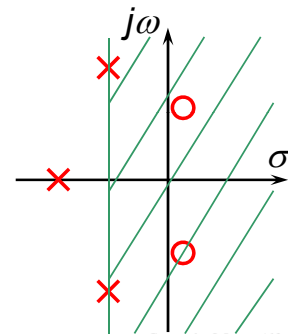
- 1) $h(t \geq 0) = 0 \Rightarrow$
Stabil & Antikausalt
 \Rightarrow Alla poler i HHP



- 2) Allmän $h(t) \Rightarrow$
Stabil & Icke-kausalt
 \Rightarrow Poler i VHP & HHP



- 3) $h(t < 0) = 0 \Rightarrow$
Stabil & Kausalt
 \Rightarrow Alla poler i VHP

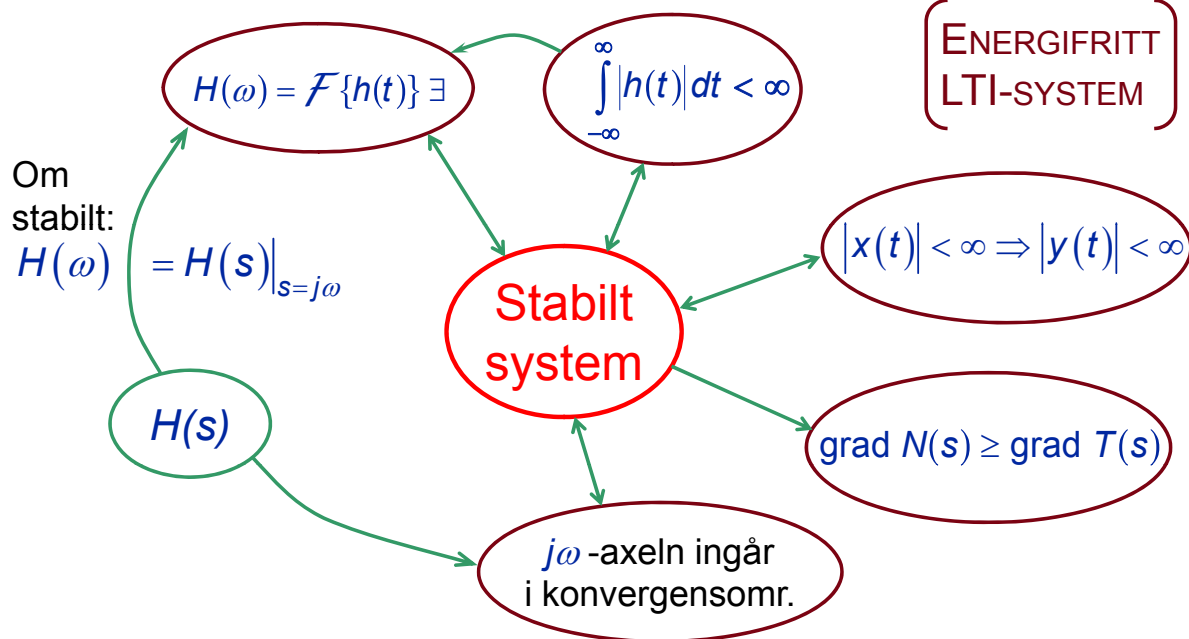


Copyright © Lasse Alfredsson, LTH

Stabilitetsrelationer,

$$H(s) = \frac{T(s)}{N(s)} \exists$$

(ENERGIFRITT
LTI-SYSTEM)



Amplitud- & faskaraktäristik (-spektrum)

$$H(\omega) = H_{I/\Pi}(s)|_{s=j\omega} = K \cdot \frac{\prod_{r=1}^m (s - n_r)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \Big|_{s=j\omega} = |H(\omega)| e^{j \arg H(\omega)}$$

Stabilt LTI-system

Amplitudkaraktäristiken:

$$|H(\omega)| = |K| \cdot \frac{\prod_{r=1}^m |j\omega - n_r|}{\prod_{i=1}^n |j\omega - p_i|}$$

Faskaraktäristiken:

$$\arg H(\omega) = \arg K + \sum_{r=1}^m \arg(j\omega - n_r) - \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - p_i)$$

Amplitud- & faskaraktäristik, forts

Exempel, beräkning av frekvenskaraktäristik (eller -spektrum) från pol-nollställediagram:

Nollställevektorer:

$$\bar{N}_r = j\omega - \bar{n}_r$$

$$\begin{cases} \gamma_r = \arg \bar{N}_r \\ \alpha_i = \arg \bar{P}_i \end{cases}$$

Polvektorer:

$$\bar{P}_i = j\omega - \bar{p}_i$$

$$\begin{cases} \alpha_r, \gamma_i \in]-\pi, \pi] \\ \arg K \in \{0, \pi\} \end{cases}$$

$$|H(\omega)| = |K| \cdot \frac{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2| \cdot |\bar{N}_3|}{|\bar{P}_1| \cdot |\bar{P}_2| \cdot |\bar{P}_3|}$$

$$\arg H(\omega) = \arg K + \sum_{r=1}^3 \gamma_r - \sum_{i=1}^3 \alpha_i$$

