

1.

- a) **FALSKT!** För stabila LTI-system gäller #poler  $\geq$  # nollställen, vilket **ej** gäller här!
- b) **SANT!**
- c) **FALSKT!** Betrakta t.ex. det kausala och stabila LTI-systemet med systemfunktion  $H(s) = \frac{s}{s+1}$ , konvergensområde  $\text{Re}\{s\} > -1$ , med motsvarande frekvensfunktion  $H(f) = \frac{j2\pi f}{j2\pi f + 1}$  som har  $\arg H(2\pi f_0) > 0$ , dvs.  $\tau_0 > 0$ , för alla  $f_0 > 0$ .
- d) **FALSKT!** Det omvända sambandet gäller,  $h(t) = \frac{dg(t)}{dt}$ .
- e) **FALSKT!** Gäller *ej allmänt*. Motexempel för ett kausalt och stabilt LTI-system B, med systemfunktion  $H_B(s) = \frac{s-1}{s+1}$ , konvergensomr.  $\text{Re}\{s\} > -1$  : Om inverssystemet, med systemfunktion  $H_A(s) = H_B^{-1}(s) = \frac{s+1}{s-1}$ , också är kausalt, dvs. systemfunktionen har konvergensområde  $\text{Re}\{s\} > 1$ , är det instabilt (imaginära axeln är ej i konvergensområdet).

2.

- a) LTI-system med insignal  $x(t) = u(t)$  och utsignal  $y(t) = g(t) = \sin(t) \cdot u(t) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ ,  
 där  $X(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$ ,  $\text{Re}\{s\} > 0$  och  $Y(s) = \mathcal{L}\{\sin(t) \cdot u(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1}$   $\text{Re}\{s\} > 0$ , dvs.  
 $H(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$ . Resultande konvergensområde  $\text{Re}\{s\} > 0 \Rightarrow$  Kausalt system. Enkelpoler hos  $H(s)$  på imaginära axeln, som utgör en rand till konvergensområdet, samt fler poler än nollställen medför att systemet är marginellt stabilt.
- b)  $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ ,  $\omega_0 = 2$  rad/s  $\Rightarrow y(t) = y_p(t) + y_h(t)$ , där  $y_p(t) = |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))$ .  
 ( $y_h(t)$  är/motsvarar utsignalens homogena lösning (vid differentialekvationsbeskrivning av systemet).  
 Den går, för stabila kausala LTI-system, mot noll då  $t$  går mot oändligheten, men för uppgiftens marginellt stabila system så är den en stationär sinus med vinkelfrekvens 1 rad/s.)  
 $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$  ( $H(\omega)$  existerar  $\forall \omega \neq \pm 1$ , ty marginellt stabilt system med enkelpoler i  $s = \pm j$ ).  
 Alltså:  $H(\omega_0) = \frac{j\omega_0}{-\omega_0^2 + 1} = -\frac{2}{3}j \Rightarrow |H(\omega_0)| = \frac{2}{3}$  och  $\arg H(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$   
 $\Rightarrow y_p(t) = \frac{2}{3} \cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$ .
- c)  $x(t) = \sin(t) \cdot u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ ,  $\text{Re}\{s\} > 0$ ;  $Y(s) = X(s)H(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}$ ,  $\text{Re}\{s\} > 0$   
 $\Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} t \cdot \sin(t) \cdot u(t)$ .  
 F.s. Tab. 19:13

d) Om en insignal  $x(t) = \delta(t)$  ger utsignalen  $y(t) = h(t)$  så gäller för LTI-system att insignalen

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \text{ ger utsignalen } y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT), \text{ där } h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = \cos(t) \cdot u(t).$$

3. Periodisk insignal  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_1 t}$  till LTI-system med frekvensfunktion  $H(\omega)$  ger utsignal

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \cdot e^{jk\omega_1 t} \text{ där } D_k = C_k \cdot H(k\omega_1) \text{ (ekv } \otimes) \text{ och } H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{e^{-t}u(t)\} = \frac{1}{j\omega + 1}.$$

Formels. Tab. 17:2

Här är vi bara intresserade av utsignalens grundton  $y_1(t) = \hat{Y}_1 \sin(\omega_1 t + \beta_1)$ , där

$$\hat{Y}_1 = 2|D_1| \text{ (ekv } \otimes) = 2|C_1| \cdot |H(\omega_1)| \text{ och } \beta_1 = \arg D_1 + \frac{\pi}{2} = \arg C_1 + \arg H(\omega_1) + \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Signalperiodtid } T = 2 \text{ s.} \Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s.} \Rightarrow |H(\omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + 1}}, \arg H(\omega_1) = -\arctan \pi$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \Rightarrow \underline{C_1} = \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) e^{-j\pi t} dt = \frac{1}{2} \left( -\int_0^1 e^{-j\pi t} dt + \int_1^2 e^{-j\pi t} dt \right) = \dots = \frac{2j}{\pi}.$$

$$\text{Följaktligen är } \hat{Y}_1 = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + 1}} = \frac{4}{\pi\sqrt{\pi^2 + 1}} \text{ och } \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \arctan \pi + \frac{\pi}{2} = \pi - \arctan \pi, \text{ vilket ger att}$$

$$\text{den efterfrågade utsignalens grundton är } \underline{\underline{y_1(t) = \frac{4}{\pi\sqrt{\pi^2 + 1}} \sin(\pi t + \pi - \arctan \pi)}}.$$

4.

a) Här blir det alltför krångligt att beräkna  $y(t)$  som inversa fouriertransformen av  $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$ .

Använd istället faltning (OK ty LTI-system där både  $x(t)$  och  $h(t)$  är absolutintegrerbara):

$y(t) = (x * h)(t)$ , där  $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = 0,5(u(t-1) - u(t-3))$  (vid inverstransformeringen används lämpligen sambanden i formels. Tab. 17:1 och 16:7).

$$\Rightarrow y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \underset{\substack{x(t-\tau)=0 \text{ för } \tau > t \\ h(\tau)=0 \text{ för } \tau < 1 \text{ och } \tau > 3}}{=} \frac{1}{2} \int_1^{\min\{3,t\}} e^{-2(t-\tau)} d\tau.$$

Vi erhåller följaktligen tre fall (lös gärna och/eller kontrollera motsvarande grafiskt!):

•  $\underline{t < 1} \Rightarrow \underline{y(t) = 0}$  (integralen ovan gäller bara då övre integr.gräns  $\geq$  undre integr.gräns)

•  $\underline{1 \leq t \leq 3} \Rightarrow \underline{y(t) = 0,5 \int_1^t e^{-2(t-\tau)} d\tau = 0,5e^{-2t} \int_1^t e^{2\tau} d\tau = 0,25(1 - e^{-2t+2})}$

•  $\underline{t \geq 3} \Rightarrow \underline{y(t) = 0,5 \int_1^3 e^{-2(t-\tau)} d\tau = \dots = 0,25e^{-2t}(e^6 - e^2)}$

b) Allmänt gäller  $h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \Rightarrow g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$ , vilket även erhålls vid faltningsberäkning

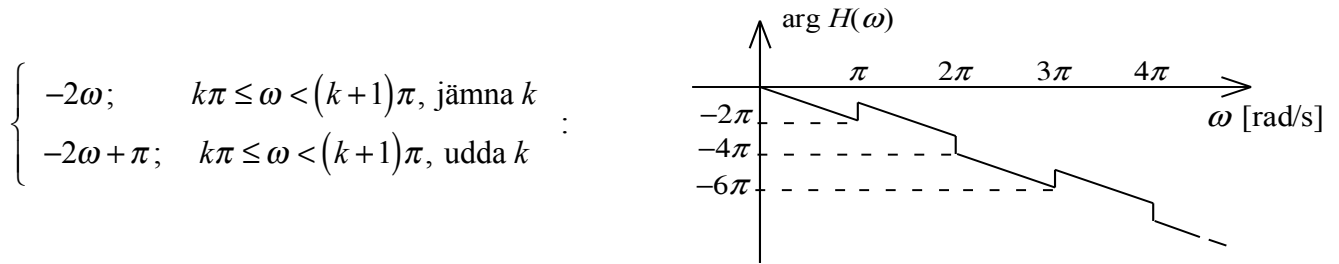
$$g(t) = (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau \underset{u(t-\tau)=0 \text{ för } \tau > t}{=} \int_{-\infty}^t h(\tau)d\tau.$$

Forts. nästa sida...

$$\text{Alltså: } \underline{\underline{g(t)}} = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \stackrel{h(\tau) \text{ från a)}}{=} \int_1^{\min\{3,t\}} 0,5 d\tau \stackrel{\text{Motsvarande beräkningar som i a)}}{=} \begin{cases} 0; & t < 1 \\ 0,5(t-1); & 1 \leq t \leq 3 \\ 1; & t > 3 \end{cases}$$

c) Faskaraktäristiken är  $\arg H(\omega) = \arg \left\{ e^{-2j\omega} \operatorname{sinc} \left( \frac{\omega}{\pi} \right) \right\} = \arg \left\{ e^{-2j\omega} \right\} + \arg \left\{ \operatorname{sinc} \left( \frac{\omega}{\pi} \right) \right\} =$

$$= \begin{cases} 0 \text{ då } \operatorname{sinc}(\cdot) \geq 0 \\ \pi \text{ då } \operatorname{sinc}(\cdot) < 0 \end{cases}$$



5.

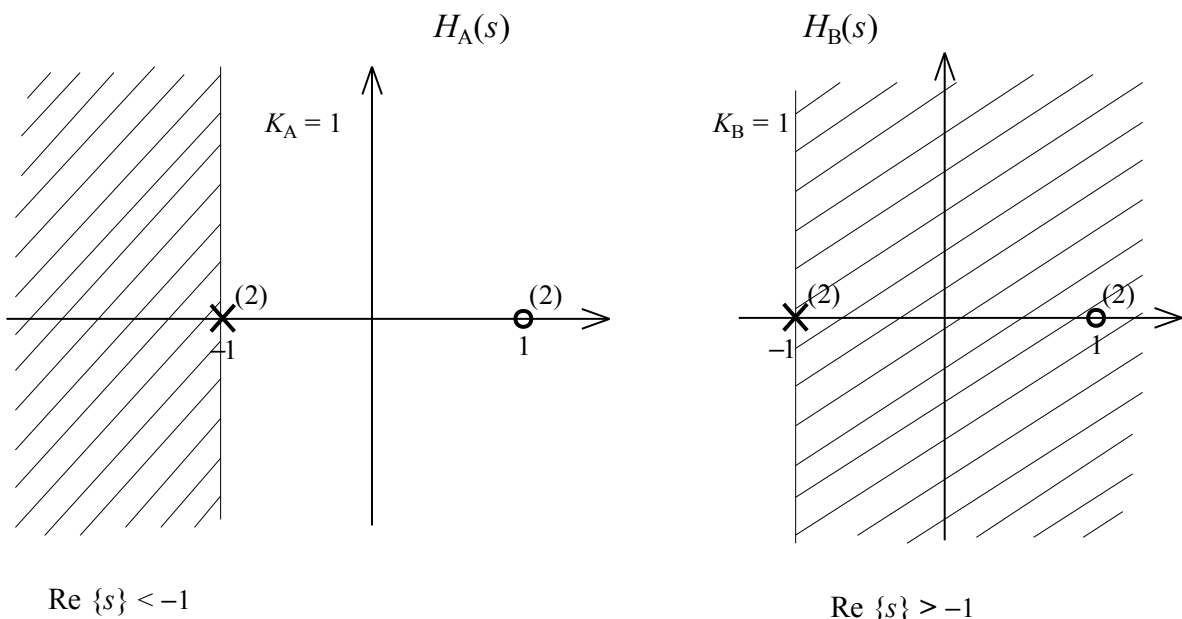
a) Laplacetransformera (dubbelsidig) differentialekvationen  $\Rightarrow$

$$(s^2 + 2s + 1)Y(s) = (s^2 - 2s + 1)X(s) \stackrel{\text{LTI-system}}{\Rightarrow} \underline{\underline{H(s)}} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 - 2s + 1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)^2}$$

Dubbelpol i  $s = -1 \Rightarrow$  två möjliga konvergensområden,  $\underline{\underline{\operatorname{Re}\{s\} < -1}}$  och  $\underline{\underline{\operatorname{Re}\{s\} > -1}}$ , vilket motsvarar två olika LTI-system A och B – med systemfunktion  $H_A(s) = H(s)$  respektive  $H_B(s) = H(s)$ .

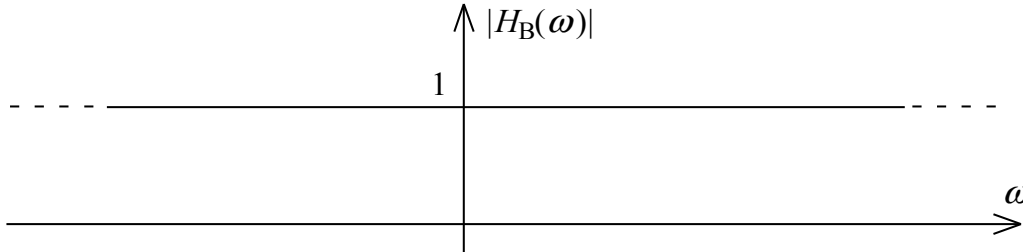
Pol-nollställegrammen för  $H_A(s)$  och  $H_B(s)$  blir enligt nedanstående figur.

System A är icke-kausalt, ty vänstersidigt konvergensområde för  $H_A(s)$ , och instabilt ty imaginära axeln ingår inte i konvergensområdet. System B är kausalt, ty högersidigt konvergensområde för  $H_B(s)$ , och stabilt ty imaginära axeln ingår i konvergensområdet (även imaginära axelns oändlighetspunkter ingår i konvergensområdet för  $H_B(s)$ , ty antalet poler är minst lika många som antalet nollställen).



b) Det är, enligt lösningen i a), system B som är stabilt. Eftersom imaginära axeln då ingår i konvergensområdet för så existerar frekvensfunktionen  $H_B(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{(j\omega - 1)^2}{(j\omega + 1)^2} \Rightarrow$

$$|H_B(\omega)| = \frac{\omega^2 + 1}{\omega^2 + 1} = 1. \text{ Konstant amplitudkaraktäristik för alla } \omega \Rightarrow \text{det är ett allpassfilter:}$$



Amplitudkaraktäristiken  $|H_B(\omega)|$  kan även erhållas ur pol-nollställediagrammet som produkten av nivåkonstanten och nollställevektorernas längder delat med produkten av polvektorernas längder. Systemfunktionen har två nollställen i  $s = +1$  och två poler i  $s = -1$ . Därför kommer, för varje  $\omega$ , de två nollställevektorerna vara lika långa som de två polvektorerna och följaktligen blir amplitudkaraktäristiken lika med nivåkonstanten (som är 1) för alla  $\omega$ .

c) Det stabila systemets utsignalsenergi:  $\underline{w_y} = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \stackrel{\text{Parsevals formel}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega \stackrel{\text{LTI-system}}{=}$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 \cdot |H(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \stackrel{\text{Parseval igen}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$