1

a) SANT

Oavsett om systemet är LTI eller inte, så har det ett impulssvar $h(t)$.
Doch är det bara när det är LTI, som
$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$$ (när den existerar)
utgör systemets frekvensfunktion $\dfrac{\mathcal{F}\{y(t)\}}{\mathcal{F}\{x(t)\}}$

b) SANT

Se kursboken

c) SANT

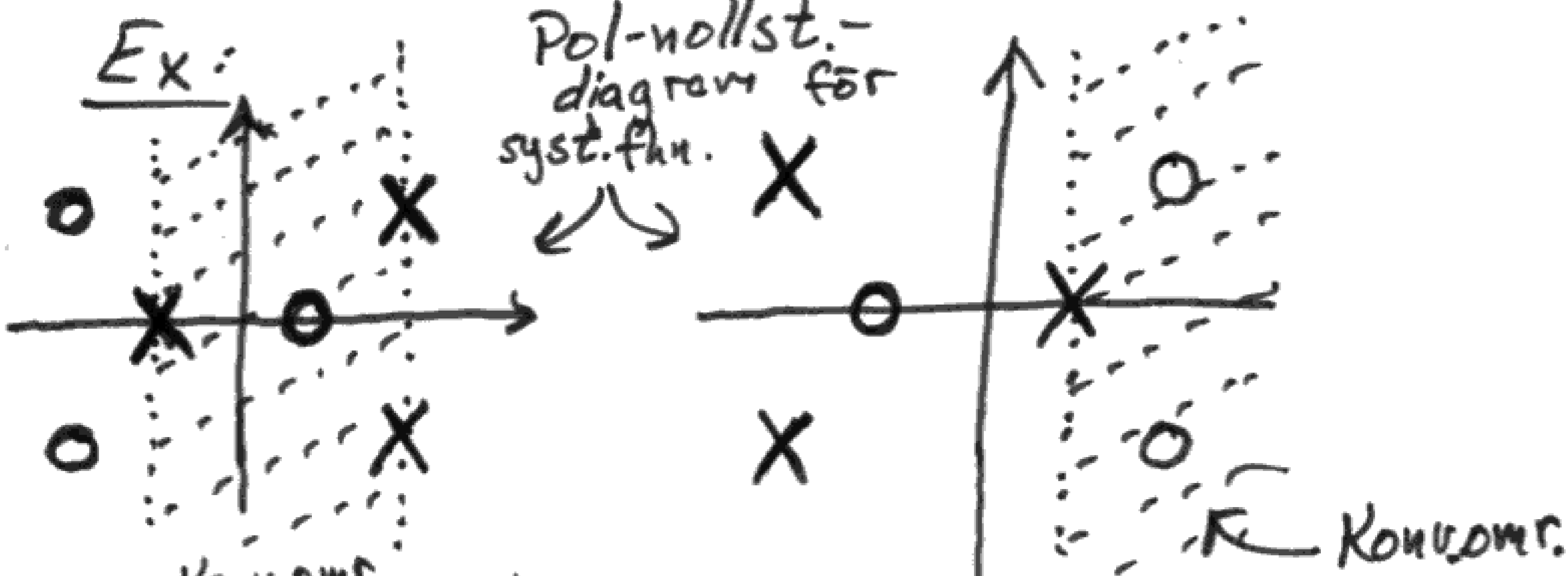
Läs i kursboken om demodulering av AM-signal.

d) SANT

$$x_i(t) \rightarrow y_i(t) = x_i(t^2)$$
$$x(t) = a\cdot x_1(t) + b x_2(t) \longrightarrow y(t) = x(t^2) =$$
$$= a\cdot x_1(t^2) + b\cdot x_2(t^2) = a\cdot y_1(t) + b\cdot y_2(t)$$

e) SANT

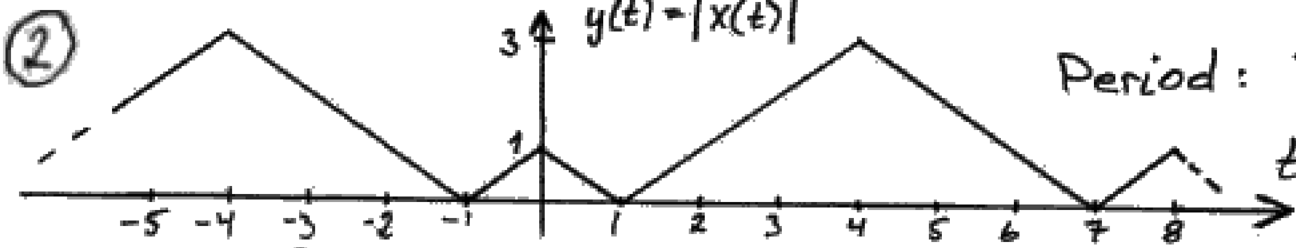
Ex:



Stabilt allpassfilter

Kausalt inversfilter, instabilt!

(2)

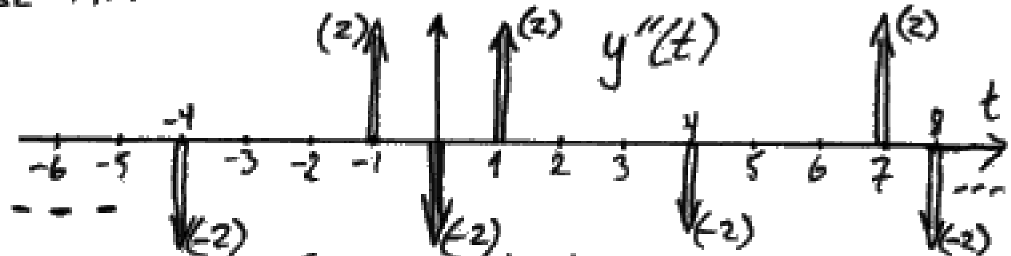


Period: $T = 8$ sek.

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} \qquad \left(\omega_1=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}\text{ rad/s}\right)$$

C_k bestäms här enklast m.h.a. den s.k. "distributionsmetoden"

Derivera $y(t)$ 2ggr:



$$y''(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k'' e^{jk\omega_1 t}, \text{ där } \underline{C_k''}=\frac{1}{T}\int_T y''(t)e^{-jk\omega_1 t}\,dt = \Big/\substack{\text{Integrera t.ex}\\ \text{över } -4<t\leq 4}\Big/$$

$$=\frac{1}{8}\int_{-4}^{4} 2\big(\delta(t+1)-\delta(t)+\delta(t-1)-\delta(t-4)\big)e^{-jk\omega_1 t}\,dt = \ldots$$

$$=\underline{\frac{1}{4}\left(2\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right)-1-(-1)^k\right)}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C_k}}=\frac{C_k''}{(jk\omega_1)^2} = \underline{\underline{\frac{4}{k^2\pi^2}\left(1+(-1)^k-2\cos\left(k\frac{\pi}{4}\right)\right)}}$$

BP-filtret släpper bara igenom delton $k=4$ $\left(\substack{\text{Motsvarande vinkel-}\\ \text{frekvens } 4\cdot\omega_1 = \\ 4\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{16\pi}{16}\text{ rad/s}}\right)$

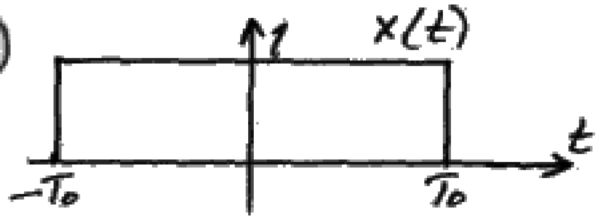
$$\Rightarrow \underline{\underline{z(t)=\hat{z}_4\sin(4\omega_1 t+\varphi_4)}},$$

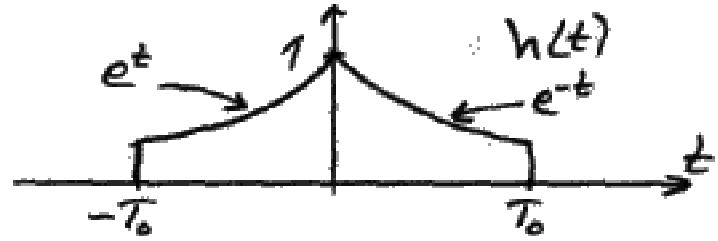
där $\underline{\underline{\hat{z}_4}} = 2|C_4| = \frac{2\cdot 4}{4^2\pi^2}\left(1+1-2\cos(\pi)\right) = \underline{\underline{\frac{2}{\pi^2}}}$

och $\underline{\underline{\varphi_4}} = \arg C_4+\frac{\pi}{2} = \big/C_4 \text{ positiv \& reell}\big/ = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$

$$\therefore\ \underline{\underline{z(t)}}=\frac{2}{\pi^2}\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)=\underline{\underline{\frac{2}{\pi^2}\cos(\pi t)}}$$

3





* $h(t) \neq 0$ för $t<0$ $\Rightarrow$ Systemet är <u>icke-kausalt</u>

(<u>generellt</u> icke-kausalt, ty även $h(t \geq 0) \neq 0$)

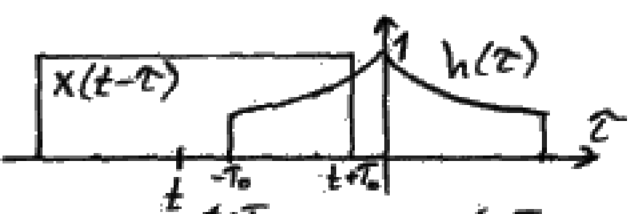
* $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ (uppenbart) $\Rightarrow$ Systemet är <u>stabilt</u>

x begränsad & h abs. integrerbar $\Rightarrow$ LTI-systemets utsignal kan erhållas m.h.a. faltning: $y(t) = (x*h)(t) =$

Betrakta lämpligen följande fyra tidsintervall:

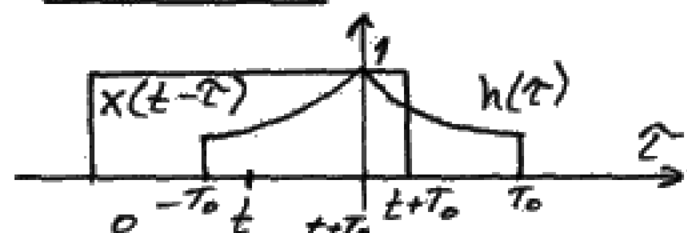
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

I: $-2T_0 \leq t < -T_0$



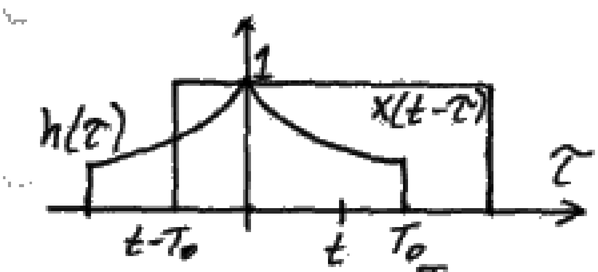
$$y(t) = \int_{-T_0}^{t+T_0} e^{\tau}\, d\tau = e^{t+T_0} - e^{-T_0}$$

II: $-T_0 \leq t < 0$



$$y(t) = \int_{-T_0}^{0} e^{\tau}\, d\tau + \int_{0}^{t+T_0} e^{-\tau}\, d\tau = 2 - e^{-T_0} - e^{-t-T_0}$$

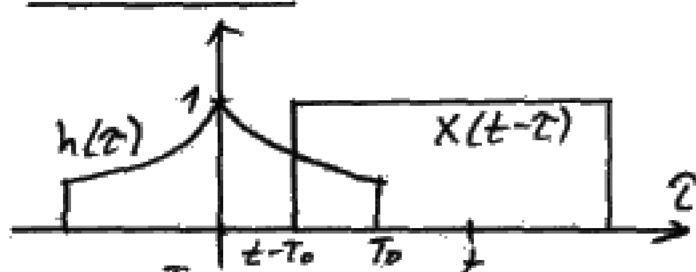
III: $0 \leq t < T_0$



$$y(t) = \int_{t-T_0}^{0} e^{\tau}\, d\tau + \int_{0}^{T_0} e^{-\tau}\, d\tau$$

$$= 2 - e^{t-T_0} - e^{-T_0}$$

IV: $T_0 \leq t \leq 2T_0$



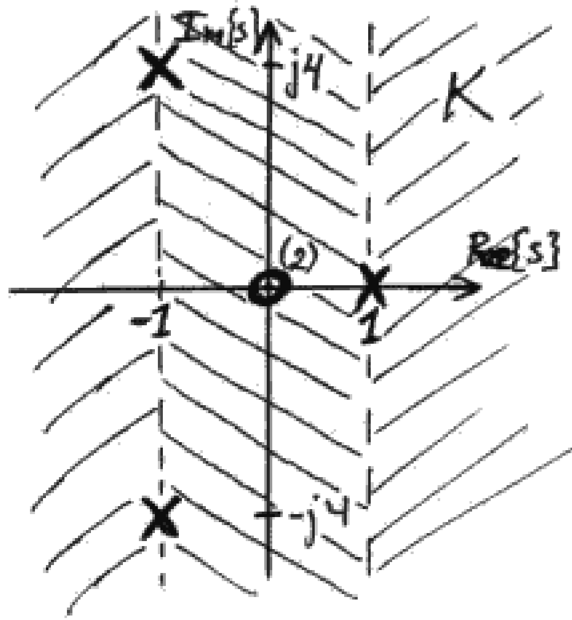
$$y(t) = \int_{t-T_0}^{T_0} e^{-\tau}\, d\tau = e^{T_0-t} - e^{-T_0}$$

För övrigt, dvs. för $|t| > 2T_0$, fås ingen överlappning av $x(t-\tau)$ och $h(\tau)$ $\Rightarrow y(t) = 0$

<u>Svar:</u>

$$y(t) = \begin{cases} e^{t+T_0} - e^{-T_0}; & -2T_0 \leq t < -T_0 \\ 2 - e^{-T_0} - e^{-t-T_0}; & -T_0 \leq t < 0 \\ 2 - e^{t-T_0} - e^{-T_0}; & 0 \leq t < T_0 \\ e^{T_0-t} - e^{-T_0}; & T_0 \leq t \leq 2T_0 \\ 0; & |t| > 2T_0 \end{cases}$$

④ $H(s) = \dfrac{K \cdot s^2}{(s-1)(s^2+2s+17)}$



Två nollställen i origo.
Poler (enkla) i $s=1$ och $s=-1 \pm j4$

a) Möjliga konvergensområden för $H(s)$:

I: $\underline{\underline{Re\{s\} < -1}}$ ⇒ Antikausalt system
jw-axeln ingår ej i konv.området ⇒ Instabilt system

II: $\underline{\underline{-1 < Re\{s\} < 1}}$ ⇒ Generellt icke-kausalt system
jw-axeln i konv.området samt #poler ≥ #nollst. ⇒ Stabilt system

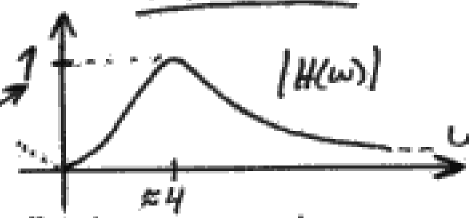
III: $\underline{Re\{s\} > 1}$ ⇒ Kausalt system
jw-axeln ingår ej i konv.området ⇒ Instabilt system

(Som motivering av kausalitetsegenskap räcker det med att hänvisa till konvergensområdestypen)

b) Frekvensfunktionen $H(\omega)$ existerar endast då jw-axeln ingår i systemfunktionens konvergensområde, dvs. i fall II.

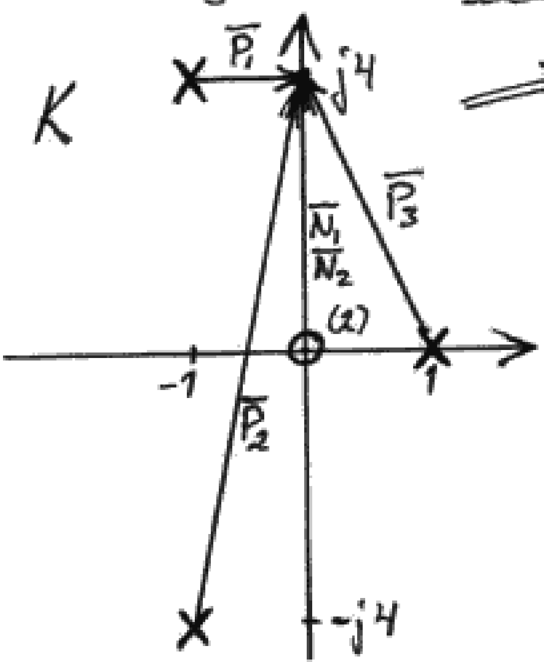
* Nollställen i $s=0$ ⇒ $|H(\omega=0)| = 0$
* #poler > #nollställen ⇒ $|H(\omega \to \infty)| \to 0$
* Polen i $s=-1+j4$ ger ett lokalt max hos $|H(\omega)|$ i närheten av $\omega = 4$ rad/s.

⇒ BANDPASS-FILTER



Ty amplitudnormerat

c) Pol- & nollställevektorer i pol-nollställediagrammet:
Enligt b) bör $\underline{|H(\omega=4)| \approx 1}$ ① gälla ⇒



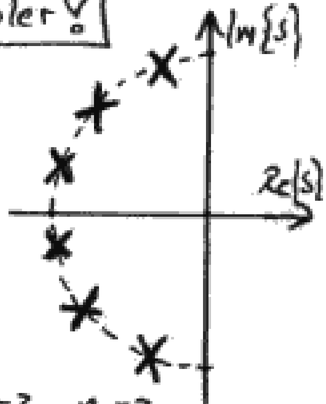
$$\Longrightarrow |H(\omega=4)| = |K| \cdot \frac{|\overline{N_1}| \cdot |\overline{N_2}|}{|\overline{P_1}| \cdot |\overline{P_2}| \cdot |\overline{P_3}|} = \Big/ \begin{matrix}\text{Antag} \\ K>0\end{matrix} \Big/$$

$$= K \frac{4 \cdot 4}{1 \cdot \sqrt{1^2+8^2} \cdot \sqrt{1^2+4^2}} = K \frac{16}{\sqrt{1105}} \quad ②$$

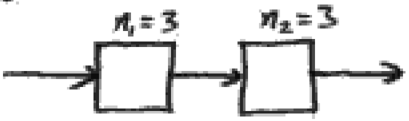
$$① \& ② \Rightarrow \underline{\underline{K \approx \frac{\sqrt{1105}}{16} \approx 2{,}1}}$$

⑤ Ett 6:e ordningens LP-filter av butterworthtyp har sina poler längs en halvcirkel i vänster halvplan (ty kausalt & stabilt), med inbördes vinkelavstånd $\frac{\pi}{6}$ rad.

Ordning $n \Rightarrow n$ poler!

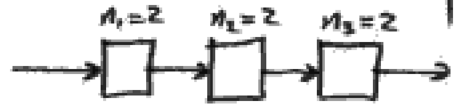


a)

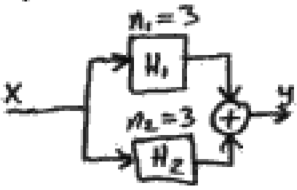


OMÖJLIGT; Ett system av udda ordning måste ha minst en reellvärd pol, vilket inte det önskade butterworthfiltret har!
(Butterworthfiltrets poler utgörs, vid kaskadkopplingen, av både delsystemens poler)

b) **JA, MÖJLIGT**, om butterwortfiltrets tre komplexkonjugerade polpar fördelas på de tre delsystemen.



c)

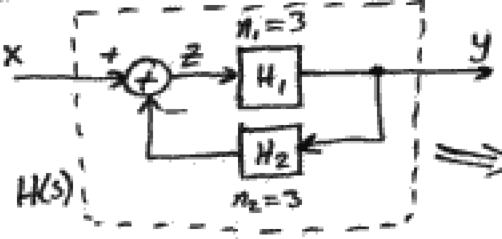


OMÖJLIGT: $Y(s) = X(s)\cdot H_1(s) + X(s)\cdot H_2(s) =$

$$= X(s)\cdot \underbrace{\left(H_1(s) + H_2(s)\right)}_{= H(s);\ \text{Butterworth?}}$$

En partialbråksuppdelning av butterworthfiltrets systemfunktion resulterar i en fördelning av de tre komplexkonjugerade polparen, vilket inte kan ge två delsystem av udda ordning. Motivering: samma som i a) — det måste då finnas reellvärda poler hos butterwortfiltret, vilket inte är fallet.

d)



OMÖJLIGT:

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} Y(s) &= Z(s)\,H_1(s) \\ Z(s) &= X(s) - Y(s)\cdot H_2(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = \Bigg/ \begin{aligned} H_1(s) &= \frac{T_1(s)}{N_1(s)} \begin{matrix}\leftarrow \text{grad} \le 3 \\ \leftarrow \text{grad } n_1=3\end{matrix} \\ H_2(s) &= \frac{T_2(s)}{N_2(s)} \begin{matrix}\leftarrow \text{grad} \le 3 \\ \leftarrow \text{grad } n_2=3\end{matrix} \end{aligned} \Bigg/ =$$

$$= \frac{T_1(s)\,N_2(s)}{N_1(s)\,N_2(s) + T_1(s)\,T_2(s)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{om} \\ \text{Butterworth}}}{=} \frac{1}{B_6(s)}$$

1 ← antag ampl.normerat!

$B_6(s)$ ← Butterworthpolynom av grad $n=6$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{T_1(s)}_{\text{grad} \le 3}\ \underbrace{N_2(s)\cdot B_6(s)}_{\text{grad } 3+6=9}}_{9 \le \text{grad} \le 12} = \underbrace{\underbrace{N_1(s)\,N_2(s)}_{\text{grad } 3+3=6} + \underbrace{T_1(s)\,T_2(s)}_{\text{grad} \le 3+3=6}}_{\text{grad} \le 6}$$

Omöjligt/orimligt!