1

a) FALSK: $\mathcal{L}_{II}\{\text{diff.ekv.}\} \Rightarrow (s^2+4s+3)\,Y_{II}(s) = X_{II}(s)$

$$\Rightarrow H_{II}(s) = \frac{Y_{II}(s)}{X_{II}(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$$. Icke-kausalt system $\Rightarrow$

konv.området för $H_{II}(s)$ är $Re\{s\} < -3$ eller $-3 < Re\{s\} < -1$

I båda fallen ingår imag.axeln inte i konv.om. $\Rightarrow$ Instabilt system

b) FALSKT: Systemets egenskaper (kausalitet i det här fallet) beror inte på dess insignal!

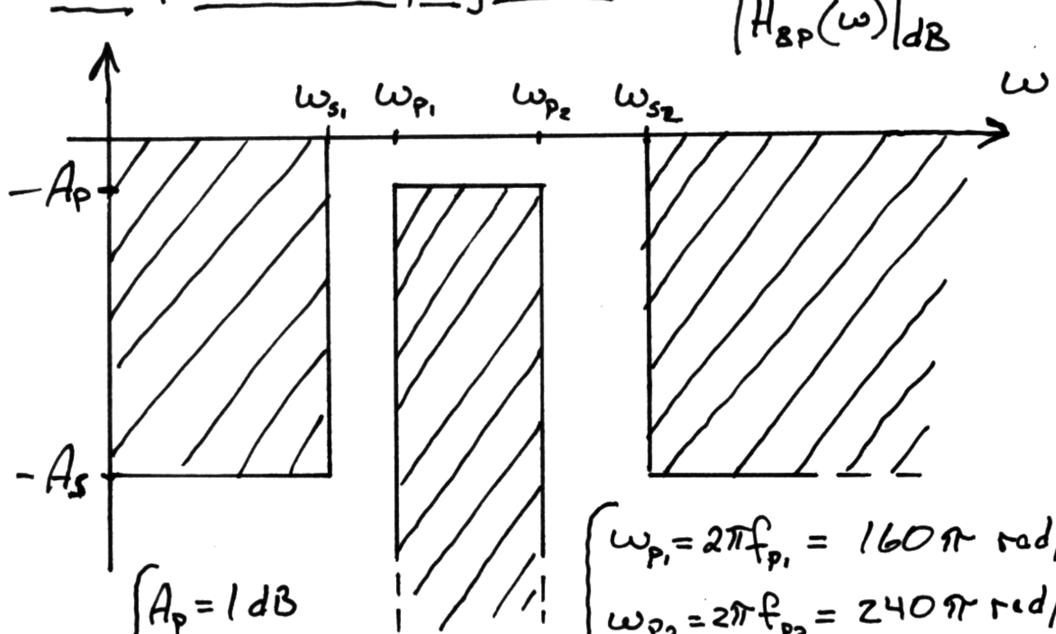
c) FALSKT: Ett butterworthfilter av ordning n har sina poler (hos $H(s)$) jämnt fördelade på en cirkelbåge i vänster halvplan, med vinkelavståndet $\frac{\pi}{n}$ mellan varje intilliggande polpar. Eftersom alla poler är komplexkonjugerade, utom vid udda n, då en av polerna är reellvärd, så går det inte att erhålla ett butterworthfilter av en viss ordning genom att kaskadkoppla två andra butterworthfilter av lägre ordning.

d) FALSKT: Delsystemens K-parametermatriser skall multipliceras, inte adderas, för att erhålla K-parametermatrisen för det totala kaskadkopplade systemet.

e) SANT: $$C_{-k} = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_T \left(x^*(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\right)^* dt =$$

$$= \left(\frac{1}{T}\int_T x^*(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt\right)^* = \Big/ \text{Om } x(t) \text{ är reellvärd} \Rightarrow x^*(t) = x(t) \Big/ = (C_k)^*$$

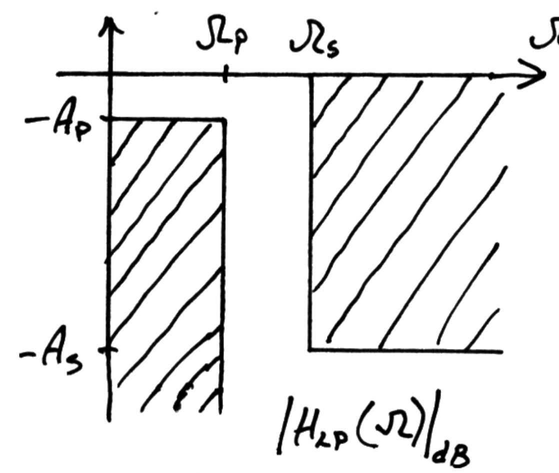
(2) BP-filtrets dämpningskrav:

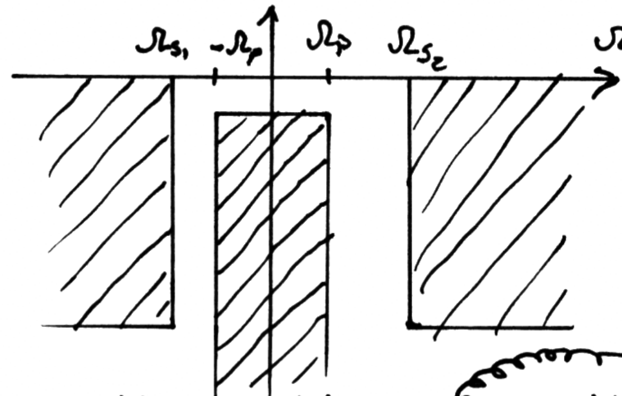


$$\begin{cases} A_p = 1\,\text{dB} \\ A_s = 10\,\text{dB} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{p_1} = 2\pi f_{p_1} = 160\pi \text{ rad/s} \\ \omega_{p_2} = 2\pi f_{p_2} = 240\pi \text{ rad/s} \\ \omega_{s_1} = 2\pi f_{s_1} = 130\pi \text{ rad/s} \\ \omega_{s_2} = 2\pi f_{s_2} = 300\pi \text{ rad/s} \end{cases}$$

Överför BP-filtrets dämpningskrav till motsvarande LP-filter (LP ⟷ BP-transf.):





Egentlig avbildning: $\Omega = \omega - \frac{\omega_I^2}{\omega}$

$\omega_{s_1} \longleftrightarrow \Omega_{s_1}$, $\omega_{p_1} \longleftrightarrow -\Omega_p$

$\omega_{s_2} \longleftrightarrow \Omega_{s_2}$, $\omega_{p_2} \longleftrightarrow \Omega_p$

$\underline{\Omega_p} = \omega_{p_2} - \omega_{p_1} = \underline{80\pi \text{ rad/s}}$

$$\Omega = \omega - \frac{\omega_I^2}{\omega}, \text{ där } \underline{\omega_I^2} = \omega_{p_1} \cdot \omega_{p_2} = \underline{38400\pi^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\Omega_{s_1}} = \omega_{s_1} - \frac{\omega_I^2}{\omega_{s_1}} \approx \underline{-519{,}6 \text{ rad/s}}, \quad \underline{\Omega_{s_2}} = \omega_{s_2} - \frac{\omega_I^2}{\omega_{s_2}} \approx \underline{540{,}4 \text{ rad/s}}$$

Eftersom LP-filtret skall ha minst $A_s = 10$ dB dämpning vid både $-\Omega_s$ och Ω_s, så väljer vi det strängaste kravet (dvs. som ger smalast övergångsband): $\underline{\Omega_s} = \min\{|\Omega_{s_1}|, \Omega_{s_2}\} = \underline{519{,}6 \text{ rad/s}}$

LP-filtret är ett amplitudnormerat chebyshevfilter, enligt uppgift.

Formelsaml. sid. 24 $\Rightarrow$ (underförstått Cheb. I)

Filterordning $\underline{n} \geq \dfrac{\cosh^{-1}\sqrt{\dfrac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1A_p}-1}}}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} \approx \underline{1,8}$

Krav på minsta möjliga ordning $\Rightarrow$ Välj $\underline{n=2}$

Tab. 7b), sid 28 ($A_p = 1$ dB rippel $\Leftrightarrow \varepsilon = 0,5088$, $\varepsilon^2 \approx 0,2589$, $n=2$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ LP-filtrets poler finns i $p_1 \approx -0,5489 + j\,0,8951$ och $p_2 = p_1^*$

$$\Rightarrow H_{LP}(S) = \frac{K}{\left(\frac{S}{\Omega_p} - p_1\right)\left(\frac{S}{\Omega_p} - p_2\right)}$$

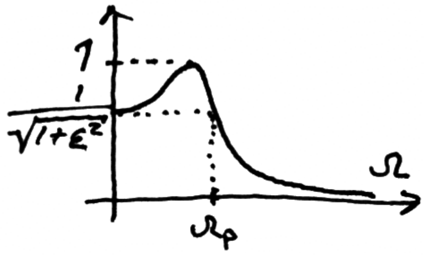
(Jämför med uttrycket för chebyshevfiltrets systemfkn. på sid 24)

Med $p_2 = p_1^*$ förenklas $H_{LP}(S)$ enligt uppgiftens tips enl. följande:

$$\underline{\underline{H_{LP}(S)}} = \frac{K}{\left(\frac{S}{\Omega_p}\right)^2 - 2\cdot \mathrm{Re}\{p_1\}\left(\frac{S}{\Omega_p}\right) + |p_1|^2} = \underline{\underline{\frac{K}{\left(\frac{S}{\Omega_p}\right)^2 + 1,0978\left(\frac{S}{\Omega_p}\right) + 1.1025}}}$$

$\underline{K = ?}$

$n=2 \Rightarrow$ Principutseende för $|H_{LP}(\Omega)|$:



$\Rightarrow |H_{LP}(0)| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \approx 0,8913$

$\varepsilon^2 \approx 0,2589$ enl. Tab. 7b.

Även: $|H_{LP}(\Omega = 0)| = |H_{LP}(S=0)| = \dfrac{K}{1.1025}$

$\Rightarrow \underline{K} \approx 0,8913 \cdot 1,1025 \approx \underline{\underline{0,9827}}$

Med $\Omega_p = 80\pi$ rad/s har vi alltså $\underline{\underline{H_{LP}(S) \approx \dfrac{62073}{S^2 + 276S + 69640}}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H_{BP}(s)}} = H_{LP}(S)\Big|_{S = s + \frac{\omega_I^2}{s}} = \frac{62073}{\left(s + \frac{\omega_I^2}{s}\right)^2 + 276\left(s + \frac{\omega_I^2}{s}\right) + 69640}$$

$$\approx \underline{\underline{\frac{62073\, s^2}{s^4 + 276 s^3 + 8,276\cdot 10^5 s^2 + 1,046\cdot 10^8 s + 1,436\cdot 10^{11}}}}$$

3 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, där $x_1(t) = 2 + 3\cos(4t)$ & $x_2(t) = u(t+1) - u(t-1)$

Linjärt system $\Rightarrow$ $\underline{y(t) = y_1(t) + y_2(t)}$

där $y_1(t) = 2\cdot H(0) + 3\cdot|H(4)|\cos(4t + \arg H(4))$ ❶

och $y_2(t) = (x_2 * h)(t)$ ❷ $\qquad [\text{där } h(t) = 2\cdot e^{-3t}\cdot u(t)]$

❶ förutsätter att systemet är stabilt (eller åtminstone marginellt stabilt) — vilket det är, p.g.a. att $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$ [Behöver ej visas/beräknas men måste motiveras! stabilitet]

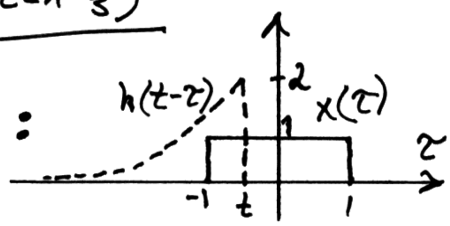
$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = /\text{Formels. Tab. 17.2}/ = \dfrac{2}{3+j\omega}$

$\Rightarrow \underline{H(0) = \frac{2}{3}}$, $H(4) = \dfrac{2}{3+j4} = \dfrac{2}{\sqrt{3^2+4^2}\,e^{j\arctan\frac{4}{3}}} = |H(4)|e^{j\arg H(4)}$

$\Rightarrow \underline{|H(4)| = \frac{2}{5}}$, $\underline{\arg H(4) = -\arctan\frac{4}{3}}$

Dvs. $\underline{y_1(t) = \frac{4}{3} + \frac{6}{5}\cos\left(4t - \arctan\frac{4}{3}\right)}$

❷: $y_2(t) = (x_2 * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$:



Figuren: $\underline{t < -1} \Rightarrow \underline{y_2(t) = 0}$

$\underline{-1 \le t < 1} \Rightarrow \underline{y_2(t)} = \int_{-1}^{t} 1\cdot 2\cdot e^{-3(t-\tau)}\,d\tau = 2\cdot e^{-3t}\left[\dfrac{e^{3\tau}}{3}\right]_{-1}^{t}$

$= \underline{\frac{2}{3}\left(1 - e^{-3(t+1)}\right)}$

$\underline{t \ge 1} \Rightarrow \underline{y_2(t)} = 2\cdot e^{-3t}\left[\dfrac{e^{3\tau}}{3}\right]_{-1}^{1} = \underline{\frac{2}{3}\left(e^{3} - e^{-3}\right)e^{-3t}}$

Den totala utsignalen är alltså $\underline{y(t) = y_1(t) + y_2(t)}$

där $\underline{\underline{y_1(t)}} = \frac{4}{3} + \frac{6}{5}\cos\left(4t - \arctan\frac{4}{3}\right)$

och $\underline{\underline{y_2(t)}} = \begin{cases} 0; & t < -1 \\ \frac{2}{3}\left(1 - e^{-3(t+1)}\right); & -1 \le t < 1 \\ \frac{2}{3}\left(e^{3} - e^{-3}\right)e^{-3t}; & t \ge 1 \end{cases}$

4) a) För en periodisk insignal $x(t)$ till ett stabilt LTI-system med frekvensfunktion $H(\omega)$, gäller att den periodiska utsignalens $(y(t))$ komplexa fourierseriekoefficienter är $D_k = C_k \cdot H(k\omega_1)$, där C_k är insignalens kompl. fourierseriekoefficienter och ω_1 är (in)signalens grundvinkelfrekvens.

Här: $x(t) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k\pi} \sin(k\pi t + (k+\frac{1}{2})\pi)$. $\omega_1 = \pi$ rad/s

$X_0 = 2 = C_0$

$\hat{X}_{k>0} = \frac{6}{k\pi} = 2|C_k|$

$\varphi_k = (k+\frac{1}{2})\pi = \arg C_k + \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} k>0: C_k = \underbrace{\frac{\hat{X}_k}{2}}_{|C_k|} \cdot e^{j\overbrace{(\varphi_k - \frac{\pi}{2})}^{}}_{\arg C_k} = \frac{3}{k\pi} e^{jk\pi} \\ k<0: C_k = C_{-k}^{*} = \frac{3}{-k\cdot\pi} e^{jk\pi} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_k = \frac{3(-1)^k}{|k|\cdot\pi}; \quad k \neq 0$$

Systemet är stabilt, dvs. imag. axeln ingår i konv.området för $H(s)$ ($\Leftrightarrow H(\omega)\ \exists$), ty systemet är enl. uppgift kausalt $\Rightarrow$ konv.området är $\mathrm{Re}\{s\} > -1$ (där "de mest högra" polerna ligger)

Då gäller alltså $D_k = C_k \cdot H(k\omega_1)$,

där $H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = $ / Från pol-nollst.diagr. / $= \frac{4s}{(s+1)^2+2^2}\Big|_{s=j\omega}$

$$= \frac{j4\omega}{5-\omega^2+j2\omega}$$

$$\Rightarrow H(k\omega_1) = H(k\pi) = \frac{j4k\pi}{5-k^2\pi^2+j2k\pi}$$

$$\Rightarrow D_k = C_k \cdot H(k\omega_1) = \begin{cases} 2\cdot 0 = 0; & k=0 \\ \frac{3(-1)^k}{|k|\cdot\pi} \cdot \frac{j4k\pi}{5-k^2\pi^2+j2k\pi} = \frac{j12(-1)^k \cdot \mathrm{sgn}(k)}{5-k^2\pi^2+j2k\pi} & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\left(\mathrm{sgn}(k) = \begin{cases} 1; & k>0 \\ -1; & k<0 \end{cases} \right)$$

Alternativ lösning till 4a):

$x(t)$ = konstant + $\sum$(stationära sinusar)

stabilt LTI-system, enligt motivering på förra sidan, ger då

$$y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \sin(k\pi t + \beta_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \cdot e^{jk\pi t} \qquad (\omega_1 = \pi \text{ rad/s})$$

där
$$\begin{cases} Y_0 = X_0 \cdot H(0) = 2 \cdot 0 = 0 & [H(\omega) \text{ ber. på föregående side}] \\ \hat{Y}_k = \hat{X}_k \cdot |H(k\pi)|, \quad \text{där } \hat{X}_k = \frac{6}{k\pi} \\ \beta_k = \varphi_k + \arg H(k\pi), \text{ där } \varphi_k = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \text{ rad} \end{cases}$$

Då erhålls:

$$\underline{\underline{D_0}} = Y_0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{D_{k>0}}} = |D_k| \cdot e^{j \arg D_k} = \frac{\hat{Y}_k}{2} \cdot e^{j(\beta_k - \frac{\pi}{2})}$$

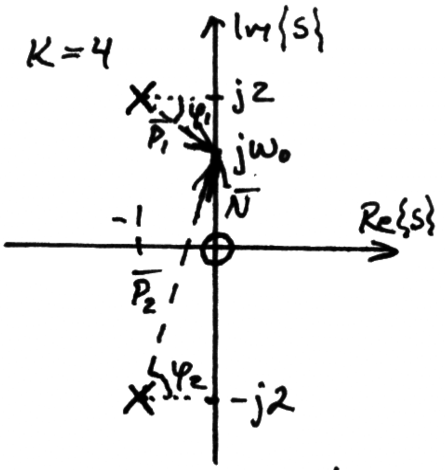
$$= \frac{\hat{X}_k}{2} \cdot |H(k\pi)| \cdot e^{j\left(k\pi + \frac{\pi}{2} + \arg H(k\pi) - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{3}{k\pi} e^{jk\pi} \cdot |H(k\pi)| e^{j \arg H(\omega)} = \frac{3(-1)^k}{k\pi} \cdot H(k\pi)$$

$$= \underline{\underline{\frac{j12(-1)^k}{5 - k^2\pi^2 + j2k\pi}}} \qquad (H(k\pi) \text{ enl. föregående side})$$

$$\underline{\underline{D_{k<0}}} = D_{-k}^* = \left(\frac{j12(-1)^{-k}}{5 - (-k)^2\pi^2 - j2k\pi}\right)^* = \underline{\underline{\frac{-j12(-1)^k}{5 - k^2\pi^2 + j2k\pi}}}$$

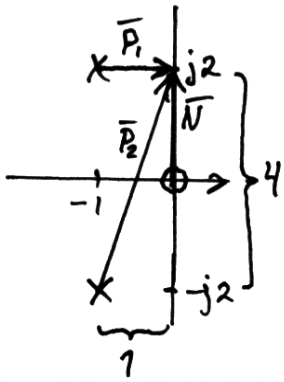
b) 2 polvektorer och 1 nollvektor är inritat i pol-nollställediagrammet för $H(s)$ till höger.



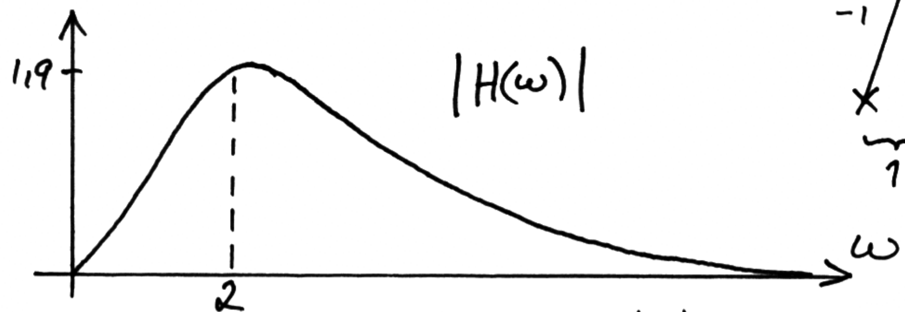
$$\Rightarrow |H(\omega_0)| = K \cdot \frac{|\bar{N}|}{|\bar{P}_1| \cdot |\bar{P}_2|}$$

- $\omega = 0 \Rightarrow |\bar{N}| = 0 \Rightarrow \underline{|H(0)| = 0}$
- $\omega \to \infty \Rightarrow$ Alla vektorer $\approx$ lika långa $\Rightarrow \underline{|H(\omega)|} \approx K \cdot \frac{\omega}{\omega \cdot \omega} \to \underline{0}$
- $|H(\omega)|$ har ett lokalt max vid $\approx \omega = 2$, för då har $\bar{P}_1$-vektorn kortast längd

$$\underline{|H(2)|} = 4 \cdot \frac{2}{1 \cdot \sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{8}{\sqrt{17}} \approx \underline{1{,}9}$$



Skiss:



(Anm: Nollstället i origo "trycker ned" $|H(\omega)|$ i närheten av $\omega = 0$ så att det lokala maximet ligger strax efter $\omega = 2$. Det är dock ok att rita max-amplituden vid $\omega = 2$ här.)

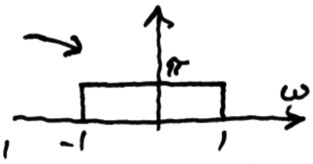
5 a) [= övningsbokens uppgift 4-17]

System 1: $y(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} Y(\omega) = (j\omega)^2 X(\omega)$

formels. Tab. 16.10

$x(t) = \dfrac{\sin(t)}{t} = \dfrac{\sin(\pi \cdot \frac{1}{\pi} t)}{\pi \cdot \frac{1}{\pi} t} = $ / formels. sid 62 / $= \operatorname{sinc}(\frac{1}{\pi} t)$

Formels. Tab. 17.8 $\Rightarrow$ $X(\omega) = \pi(u(\omega+1) - u(\omega-1)) \rightarrow$



Utsignalens energi:

$W_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt =$ / parsevals relation / $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \omega^4 \pi^2 d\omega = \frac{\pi}{5}$

System 2: $\tilde{y}(t) = x(t) \cdot z(t)$, där $z(t) = \sin(t)$

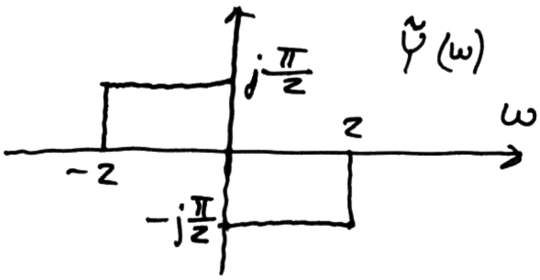
Det kommer även här att bli enklare att beräkna utsignalsenergin i frekvensdomänen:

$W_{\tilde{y}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{Y}(\omega)|^2 d\omega$, där $\tilde{Y}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(X * Z)(\omega)$.

Formels. Tab. 17.15 $\Rightarrow Z(\omega) = j\pi(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1))$

$\Rightarrow \tilde{Y}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega-\lambda) Z(\lambda)\, d\lambda = \frac{j\pi}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega-\lambda)\delta(\lambda+1)d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega-\lambda)\delta(\lambda-1)d\lambda\right)$

$= \frac{j}{2}(X(\omega+1) - X(\omega-1))$



$\Rightarrow W_{\tilde{y}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2}$

---

b) Låt $y_1(t)$ & $y_2(t)$ vara utsignal för insignalerna $x_1(t)$ resp. $x_2(t)$

Om ett system är linjärt gäller att insignalen $x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$, ger upphov till utsignalen $y(t) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$. [Anm: måste framgå/formuleras i din tentalösning!]

Test, system 1:

$y(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = \dfrac{d^2(a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t))}{dt^2} = a \cdot \dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2} + b \cdot \dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2}$

$= a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t) \Rightarrow$ Systemet är Linjärt!

Test, system 2: $(\tilde{y}_i(t) = x_i(t) \cdot \sin(t))$

$\tilde{y}(t) = x(t) \cdot \sin(t) = (a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)) \cdot \sin(t) = a \cdot x_1(t) \cdot \sin(t) + b \cdot x_2(t) \cdot \sin(t)$

$= a \cdot \tilde{y}_1(t) + b \cdot \tilde{y}_2(t) \Rightarrow$ Systemet är Linjärt!