1

a) SANT: LTI ⇒ Linjärt & TidsInvariant
Linjärt ⇒ Homogent & Additivt

b) SANT: De två filtren är ehvivalenta

c) FALSKT: LP-filtrets 3 dB-bandbredd är lika med BP-filtrets 3 dB-bandbredd
(Formelsaml: $\Omega_p = \omega_{p2} - \omega_{p1}$)

d) FALSKT: Det är inte tillräckligt: (LTI-)systemets impulssvar måste vara absolutintegrerbart!

e) FALSKT: Det kausala systemet måste då även vara stabilt, annars ingår inte $j\omega$-axeln i systemfunktionens konvergensområde (vilket innebär att $H(\omega)$ inte existerar).

2 $\mathcal{H}_I: \; h_1(t) = e^{at} \cdot u_0(-t)$, $a \in \mathbb{R}$

Stabilt, enl. uppg. $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h_1(t)| dt < \infty \Rightarrow \underline{\underline{a > 0}}$

(Alt. $H_1(s) = \mathcal{L}_{II}\{h_1(t)\} = \dfrac{-1}{s-a}$, $Re\{s\} < a$. Stabilt om $j\omega$-axeln i konv.omr. $\Rightarrow a > 0$)

Önskat kausalt & stabilt system $\mathcal{H}$: $h(t) = e^{-at} \cdot u(t)$, $a > 0$ enl. oven.

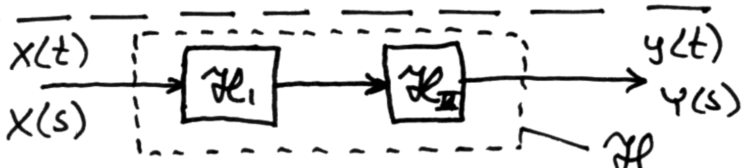
$h(t) = 0$ för $t < 0 \Rightarrow$ Kausalt. $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \Rightarrow$ stabilt

Alt. kontroll: $H(s) = \dfrac{1}{s+a}$; $Re\{s\} > -a$, $a > 0 \Rightarrow$ Kausalt & stabilt

Dvs. grundförutsättningarna är även OK för $\mathcal{H}$.

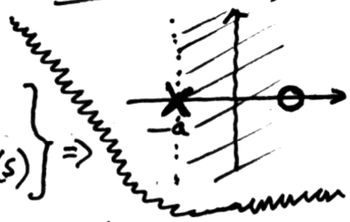
---

i) Kaskadkoppling:

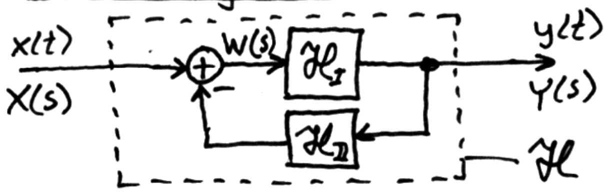


$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = \frac{-1}{s-a} \cdot H_2(s) = \frac{1}{s+a} \Rightarrow \underline{\underline{H_2(s) = -\frac{s-a}{s+a}}}$$

$a > 0$ enl. uppg. $\Rightarrow$ Stabilt om kausalt $\Rightarrow$ konv.omr. är $\underline{\underline{Re\{s\} > -a}}$



ii) Återkoppling (neg.) av $\mathcal{H}_I$ med $\mathcal{H}_{II}$:

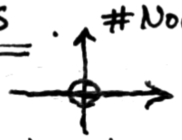


$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= W(s) \cdot H_1(s) \\ W(s) &= X(s) - Y(s) \cdot H_2(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = X(s) \cdot \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s)}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s)} = \frac{\frac{-1}{s-a}}{1 + \frac{-1}{s-a} \cdot H_2(s)} = \frac{1}{s+a} \Rightarrow \ldots$$

$\Rightarrow \underline{\underline{H_2(s) = 2s}}$. # Nollst. > # Poler $\Rightarrow$ Ej stabilt.



$\therefore$ Sammankoppling ej möjlig!

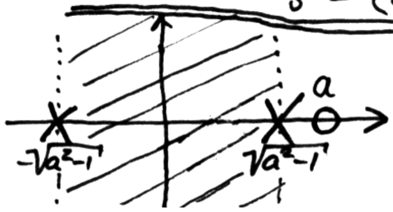
iii) Negativ återkoppling av $\mathcal{H}_{II}$ med $\mathcal{H}_I$:

Byt plats med $H_1(s)$ & $H_2(s)$ ($\mathcal{H}_I \leftrightarrow \mathcal{H}_{II}$) oven

$$\Rightarrow H(s) = \frac{H_2(s)}{1 + H_2(s) \cdot H_1(s)} = \frac{H_2(s)}{1 + H_2(s) \cdot \frac{-1}{s-a}} = \frac{1}{s+a} \Rightarrow \ldots$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H_2(s) = \frac{s-a}{s^2 - (a^2-1)}}}.$$

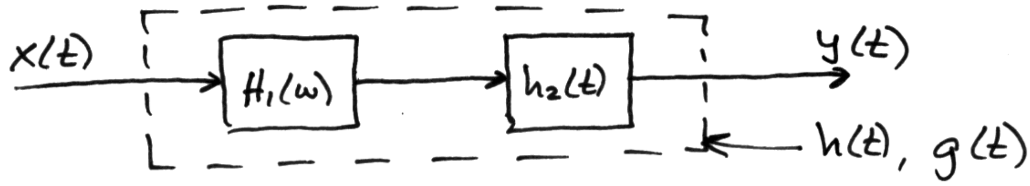
Stabilt system $\Rightarrow$ Inga poler på $j\omega$-axeln $\Rightarrow a^2 - 1 > 0 \Rightarrow \underline{a > 1}$ ($a > 0$ krav)



$\Rightarrow$ Konv.område $\underline{\underline{-\sqrt{a^2-1} < Re\{s\} < \sqrt{a^2-1}}}$

$\Rightarrow$ Stabilt! (och icke-kausalt)

3



Kaskadkoppling $\Rightarrow h(t) = (h_1 * h_2)(t)$; $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$

i) Faltningsberäkning av $h(t)$: $h_2(t) = e^{-10^3 t} \cdot u(t)$ given.

$$h_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_1(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{10^3 + j\omega}\right\} = /\text{Formels. Tab. 17:2}/$$

$$= e^{-10^3 t} \cdot u(t) \qquad (\text{Anm: } h_1(t) = h_2(t) \;!)$$

$$h(t) = (h_1 * h_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h_1(t-\tau)}_{=0 \text{ för } \tau > t} \underbrace{h_2(\tau)}_{=0 \text{ för } \tau < 0} d\tau = \int_0^t e^{-10^3(t-\tau)} \cdot e^{-10^3 \tau} d\tau$$

$$= e^{-10^3 t} \int_0^t 1\, dt = t \cdot e^{-10^3 t} \cdot u(t)$$

ii) Transformberäkning: $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, där $H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$,

där $H_1(s) = H_2(s) = \mathcal{L}_I\{e^{-10^3 t} \cdot u(t)\} = /\text{Formels. Tab. 19:12}/ = \dfrac{1}{s + 10^3}$, $Re\{s\} > -10^3$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{(s + 10^3)^2}, \quad Re\{s\} > -10^3$$

$$\Rightarrow /\text{Formels. Tab 19:15}/ \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} h(t) = t \cdot e^{-10^3 t} \cdot u(t)$$

Stegsvaret $g(t) = \mathcal{H}\{u(t)\} = \begin{cases} (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau & (1) \\ \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}, \text{ där } G(s) = U(s) \cdot H(s), \text{ där } U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} & (2) \end{cases}$

För t.ex. alt. (2) erhålls:

$$G(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s + 10^3)^2} = /\text{Partialbråksuppdelning och identifiering av transformpar i Formels. Tab. 19?}/$$

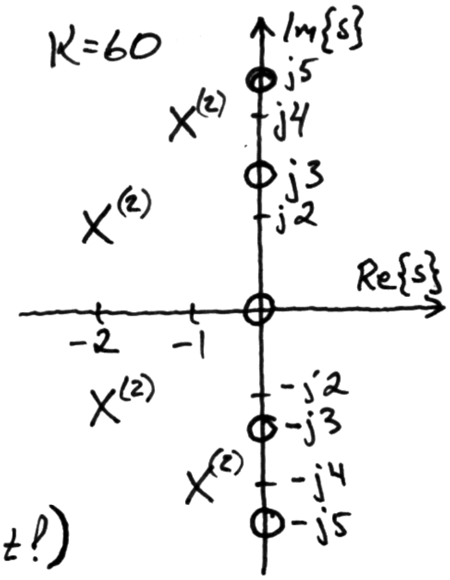
$$= 10^{-6}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{(s+10^3)^2} - 2 \cdot 10^3 \frac{1}{(s+10^3)^2}\right), \quad Re\{s\} > -10^3$$

Tab. 19:3, 18:7 & 19:15 $\Rightarrow g(t) = 10^{-6}\left(u(t) - \frac{d}{dt}\left(t e^{-10^3 t} \cdot u(t)\right) - 2 \cdot 10^3 \cdot t e^{-10^3 t} \cdot u(t)\right)$

$$= 10^{-6}\left(1 - e^{-10^3 t} - 10^3 t e^{-10^3 t}\right) \cdot u(t)$$

(Anm: Alt. (1) är nog enklare för de flesta.)

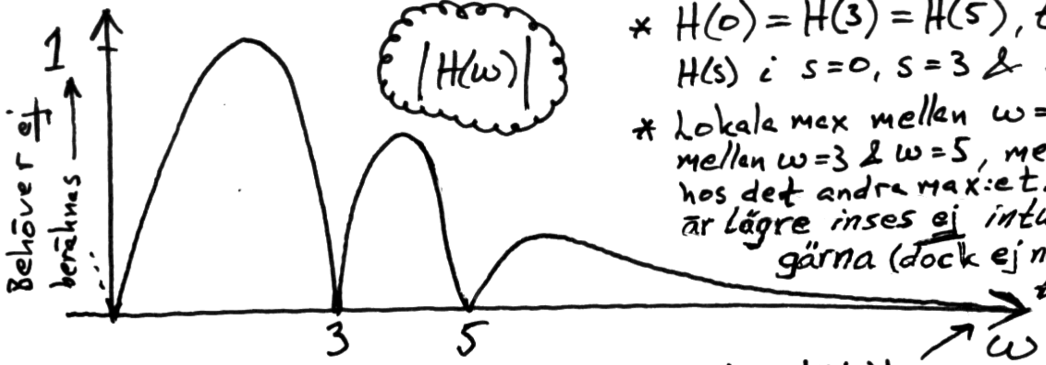
④ Pol-nollställediagrammet för $H(s)$: $K=60$



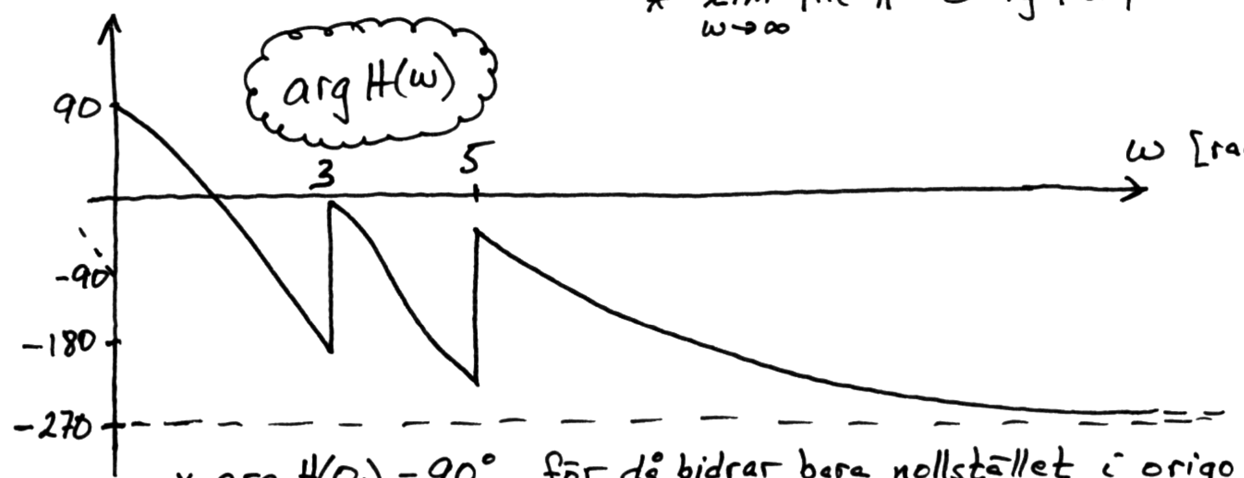
- $H(\omega)$ existerar om imaginära axeln ingår i konvergensområdet till $H(s)$, dvs. konv.området är då $\underline{Re\{s\} > -1}$, dvs. till höger om de högraste polerna samt att #poler ≥ #nollställen (vilket är fallet här). Konv.områdestypen medför därför att systemet då är kausalt. $H(\omega)\ \exists \Leftrightarrow$ Systemet är (också) stabilt.
(Minst ett av ovanstående tre understrukna egenskaper skall vara angivet och tydligt motiverat!)

- $$|H(\omega)| = |K| \cdot \frac{\prod_i |\bar{N}_i|}{\prod_j |\bar{P}_j|} \quad ; \quad \arg H(\omega) = \arg K + \sum_i \arg \bar{N}_i - \sum_j \arg \bar{P}_j$$

där $\bar{N}_i$ & $\bar{P}_j$ är nollställe- resp. polvektorer som införs i pol-nollställediagrammet ovan, från varje nollst./pol till $s=j\omega$.

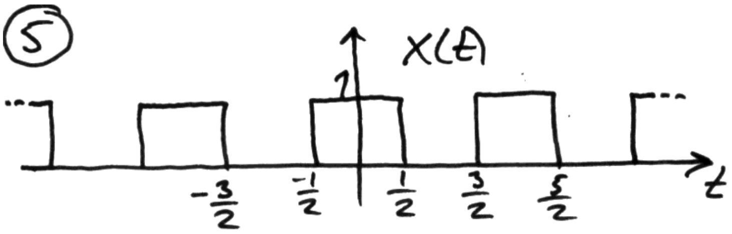


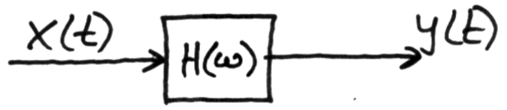
* $H(0)=H(3)=H(5)$, ty nollställen hos $H(s)$ i $s=0$, $s=3$ & $s=5$
* Lokala max mellan $\omega=0$ & $\omega=3$ samt mellan $\omega=3$ & $\omega=5$, med lägre amplitud hos det andra max:et. ~~Att~~ andra toppen är lägre inses ej intuitivt, utan bör gärna (dock ej nödv. här) undersökas, t.ex. genom ber. av $|H(1.5)|$ & $|H(4)|$.
* $\lim_{\omega\to\infty} |H(\omega)| = 0$ ty fler poler än nollst.



* $\arg H(0_+) = 90°$, för då bidrar bara nollstället i origo till fasen. Alla andra fasbidrag tar ut varandra, eftersom övriga nollställen och poler är komplexkonjugerade och är i vänster halvplan eller på $j\omega$-axeln.
* Alla nollställen är på $j\omega$-axeln ⇒ de ger bara fashopp på $+180°$ vid nollställelägena $s=0$, $s=(\pm)j3$ och $s=(\pm)j5$, dvs. $\omega=0, 3$ resp. 5. Alla poler ger negativt fasbidrag, strikt avtagande utöver hoppen på $180°$ vid nollställena, som beskrivs ovan.
* $\lim_{\omega\to\infty} \arg H(\omega) = 90(N-P) = 90(5-8) = -270°$, där $\begin{cases} N = \#\text{ nollställen} \\ P = \#\text{ poler} \end{cases}$
* Lite större neg. lutning runt $\omega=4$ rad/s, p.g.a. närhet till polerna i $s=-1+j4$.

5





Butterworthfilter med dämpn.krav enl. uppgift. Gradtal n.

Formelsaml. sid. 24 (Butterw.):

$$n \geq \frac{{}^{10}\log \frac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1A_p}-1}}{2 \cdot {}^{10}\log \frac{\omega_s}{\omega_p}} \approx 5.1$$

$$\begin{cases} \omega_p = 2\pi \cdot 2{,}2 \text{ rad/s} \\ \omega_s = 2\pi \cdot 3{,}3 \text{ rad/s} \\ A_p = 3 \text{ dB} \\ A_s = 18 \text{ dB} \end{cases} \Rightarrow$$

$A_p = 3\text{dB} \Rightarrow \varepsilon^2 = 1$ $(\varepsilon^2 = 10^{0.1A_p} - 1)$

$\Rightarrow$ Välj gradtal $n = 6$

Formels. sid. 24 $\Rightarrow$ $$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{24}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{4.4\pi}\right)^{12}}}$$

Fourierserieutveckla $x(t)$ (Period $T = 2$ sek $\Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \pi$ rad/s):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_1 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

(with $X_0 = 1/2$)

$$C_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot e^{-jk\pi t} dt = \frac{e^{-j\frac{k\pi}{2}} - e^{j\frac{k\pi}{2}}}{2\cdot(-jk\pi)}$$

$$= \frac{\sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{k\pi} \qquad \left(= \frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)\right)$$

Efterfrågat: För vilka k gäller $\hat{X}_k = 2|C_k| < 0.2$?

$\hat{X}_1 = \frac{2}{\pi} > 0.2$, $\hat{X}_2 = 0$, $\hat{X}_3 = \frac{2}{3\pi} > 0.2$, $\hat{X}_4 = 0$

$\hat{X}_5 = \frac{2}{5\pi} < 0.2$!

Vi ser att $\hat{X}_{k>0} = \begin{cases} 0; & \text{jämna } k \\ \frac{2}{k\pi}; & \text{udda } k \end{cases}$

$\Rightarrow$ Sökt delton är $\tilde{k} = 5$

$\Rightarrow$ Filtret dämpar delton 5 med

$$20 \cdot {}^{10}\log |H(5\cdot\omega_1)|^{-1} = 20 \cdot {}^{10}\log \sqrt{1+\left(\frac{5\pi}{4.4\pi}\right)^{12}} \approx 7{,}5 \text{ dB}$$