

Utsignalen från kausala LTI system

UTSIGNALEN FRÅN KAUSALA LTI-SYSTEM

Kausalt LTI-system

$x(t) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow y(t) = \mathcal{H}\{\text{Lagrad energi \& } x(t)\} = \underbrace{y_{zi}(t)}_{\text{Zero-input response}} + \underbrace{y_{zs}(t)}_{\text{zero-state response}}$

Låt $x(t < 0) = 0$

$x(t) = u(t)$

$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

- $y_{zi}(t) = \mathcal{H}\{\text{Energilagrard i systemet vid } t=0^-\} \Big|_{x(t)=0} = y(t) \Big|_{x(t)=0}$ (fria svängingen)
- $y_{zs}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ (Energifritt system) = $y(t) \Big|_{\text{Init.tillst. vid } t=0} = 0$ (tvingad svängning)

Med begynnelseenergi

Energifritt

$x(t) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow y_{zi}(t)$

$x(t) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow y_{zs}(t)$

$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

Definition av LTI-systemets utsignalskomponenter (här för kausala system),

dvs. zero-input response $y_{zi}(t)$ (betecknas $y_0(t)$ i kursboken) och zero-state response $y_{zs}(t)$.

Differentialekvationsbeskrivning av LTI-system samt beräkning av dess zero-input response $y_{zi}(t)$

DEN FRIA SVÄNGNINGEN, ZERO-INPUT RESPONSE $y_{zi}(t)$

$x(t)=0 \rightarrow$ LTI-system $\rightarrow y_{zi}(t)$ Differentialekvationsbeskrivning:

$$a_n \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{n-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{m-1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

Deriveringsoperatören \mathcal{D} : $\mathcal{D}y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$, $\mathcal{D}^i y(t) = \frac{d^i y(t)}{dt^i}$ (Vanligen: $N \geq M$)

$$\Rightarrow Q(\mathcal{D})y(t) = P(\mathcal{D})x(t) \quad \text{där} \quad \begin{cases} Q(\mathcal{D}) = a_n \mathcal{D}^N + a_{n-1} \mathcal{D}^{N-1} + \dots + a_1 \mathcal{D} + a_0 \\ P(\mathcal{D}) = b_m \mathcal{D}^M + b_{m-1} \mathcal{D}^{M-1} + \dots + b_1 \mathcal{D} + b_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{lös } \boxed{Q(\mathcal{D})y_{zi}(t) = 0} \Rightarrow y_{zi}(t) = \sum (\text{karaktäristiska termer})$$

$$e^{\lambda t}, t^n e^{\lambda t}, e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t)$$

Videon inleds med en differentialekvationsbeskrivning av LTI-system och därefter visas hur zero-input-komponenten $y_{zi}(t)$ hos LTI-systemets utsignal beräknas utgående från differentialekvationen.

- * Differentialekvationsbeskrivning (0:00)
- * Beräkning av zero-input response $y_{zi}(t)$ (4:16)

I kursen kommer vi oftast att utgå från energifria system, vilket innebär att utsignalens zero-input-komponent är noll, $y_{zi}(t) = 0$.

I de fall ett LTI-system har energi lagrad och $y_{zi}(t)$ ska/behöver beräknas, så kommer vi i första hand att göra det i transformdomänen, med hjälp av laplacetransformen. Det blir vanligen mycket enklare då, jämfört med att göra det i tidsdomänen.

Under föreläsningen visas ett exempel på beräkning av $y_{zi}(t)$ i tidsdomänen.

Faltning – beräkning av zero-state response $y_{zs}(t)$ från ett LTI-system (uppdelad i de fyra delarna/skärmdumparna nedan)

DEL 1

DEN TVINGADE SVÄNGNINGEN, ZERO-STATE RESPONSE $y_{zs}(t)$

Energifritt LTI-system

$x(t) \xrightarrow{x_n(t)} \mathcal{H} \rightarrow y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \stackrel{y_{zi}(t)=0}{=} \stackrel{t_0 \text{ energifritt}}{=} y_{zs}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$

Låt $x(t) = a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t) + \dots = \sum_n a_n \cdot x_n(t)$

Linjärt system $\Rightarrow y_{zs}(t) = a_1 \cdot y_1(t) + a_2 \cdot y_2(t) + \dots = \sum_n a_n \cdot y_n(t)$

Hur väljer vi lämplig uppsättning $\{x_n(t)\}$ för repr. av godtycklig $x(t)$, som ger enkel/enklast beräkning av $\{y_n(t)\}$?

I denna video visas en härledning av faltningsintegralen, som används för att beräkna zero-state-komponenten $y_{zs}(t)$ hos LTI-systemets utsignal.

* Härledning, utgående från att insignalen beskrivs som en Riemannsumma (0:00)

De första 22 minuterna i videon (= de tre skärmdumparna Del1, Del 2 & Del 3 nedan) är en motiverande inledning/härledning inför det som kommer i slutet av videon – impulssvaret $h(t)$ och faltningsintegralen.

Denna härledning examineras inte, så du behöver inte lära dig något utantill, men syftet denna inledning/härledning är att du ska få en känsla och förståelse för faltning. Själva faltningen är "bara" en integral som ska lösas, men här får du veta mer om hur den uppstår.

DEN Tvingade Svängningen, ZERO-STATE RESPONSE $y_{zs}(t)$

$x(t)$
 $p(t)$
 a_n

$p(t) = u(t) - u(t - \Delta\tau)$
 $\tilde{x}(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t)$

Energisätt DTI
 $X(t) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow y_{zs}(t)$

$\mathcal{H}\{x(n\Delta\tau) p(t - n\Delta\tau)\}$
= /homogent/ = $x(n\Delta\tau) \cdot \mathcal{H}\{p(t - n\Delta\tau)\}$
 $a_n \cdot y_n(t)$

\sum

Linjärt system $\rightarrow \tilde{y}(t) = \sum_n a_n y_n(t) = \sum_n x(n\Delta\tau) \cdot \mathcal{H}\{p(t - n\Delta\tau)\} \xrightarrow[\Delta\tau \rightarrow 0]{d\delta} y_{zs}(t)$

DEN Tvingade Svängningen, ZERO-STATE RESPONSE $y_{zs}(t)$

$x(t)$
 $p(t)$
 a_n

$p(t) = u(t) - u(t - \Delta\tau)$
 $\tilde{x}(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t)$

Energisätt DTI
 $X(t) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow y_{zs}(t)$

$\mathcal{H}\{p(t - n\Delta\tau)\} = ?$

$d(t) \rightarrow \delta(t)$
 $p(t) = d(t) \cdot \Delta\tau$
 $\Delta\tau \rightarrow 0 \rightarrow \delta(t) \cdot d\tau$

DVS.
 $\tilde{x}(t) = \sum_n x(n\Delta\tau) p(t - n\Delta\tau)$
 $\tilde{y}(t) = \sum_n x(n\Delta\tau) \mathcal{H}\{p(t - n\Delta\tau)\}$

$\rightarrow x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$

$\Delta\tau \rightarrow 0 \rightarrow X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$

$\Delta\tau \rightarrow 0 \rightarrow y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{H}\{\delta(t - \tau)\} d\tau$

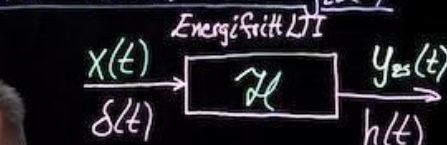
Den huvudsakliga inledningen/härledningen pågår huvudsakligen fram till slutet av skärmdumpen ovan (Del 3), videons första 22:03 minuter.

DEN TUNGÅDE SVÄNGNINGEN, ZERO-STATE RESPONSE $y_{zs}(t)$

Allmän signalsbeskrivning: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$

Linjärt system $\Rightarrow y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\} d\tau$

låt $h(t) := \mathcal{L}\{\delta(t)\}$; systemets impulssvar



Tidsinvariant system \Rightarrow

$$\mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau)$$

Faltningsintegralen:

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$y_{zs}(t) = (x * h)(t) = x(t) * h(t)$$

Viktiga egenskaper:

$$* \text{ är kommutativ; } y_{zs}(t) = (x * h)(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) b(t-\tau) d\tau = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \dots & ; a(\tau) = 0; \tau < 0 \\ 0 & ; \\ \int_{-\infty}^{\dots} \dots & ; b(\tau) = 0; \tau > 0 \end{cases}$$

* Definition av impulssvaret $h(t)$ samt faltningsintegralen (22:03)

Från 22:03 i videon "landar" härledningen i faltningsintegralen, tillsammans med en definition av systemets impulssvar.

Om man känner impulssvaret $h(t)$ för ett LTI-system så kan man, för varje insignal $x(t)$, beräkna utsignalens zero-state-komponent $y_{zs}(t)$ med hjälp av faltningsintegralen.

- * Vid beräkning av faltningsintegralen är det viktigt att känna till och förstå de olika faltningsoperationerna i slutet av videon – bland annat att faltningsoperationen är kommutativ. Konsekvensen blir att det finns två faltningsintegraler:
 - 1) den som är inrutad i mitten av skärmdumpen ovan och
 - 2) den som är understruken nere till höger (p.g.a. kommutativiteten).
- * Vid faltningsberäkningar, som jag kommer att ge exempel på under föreläsningen som följer efter denna video, så rekommenderas du att alltid rita de två funktionerna $x(\tau)$ och $h(t-\tau)$ (respektive $x(t-\tau)$ och $h(\tau)$) för olika intervall på t . Det motiverar å ena sidan dina beräkningar på ett tydligt sätt, men gör det även oftast enklare för dig att beräkna faltningen. Detta kallas för grafisk faltningsintegral. Mer om detta på föreläsningen som följer.
- * Notera att faltningsintegralen alltid kan användas för att beräkna zero-state-komponenten, men integralen konvergerar bara om
 - 1) minst en av $x(t)$ och $h(t)$ är absolutintegrerbar
 - 2) och den andra funktionen är åtminstone begränsad.