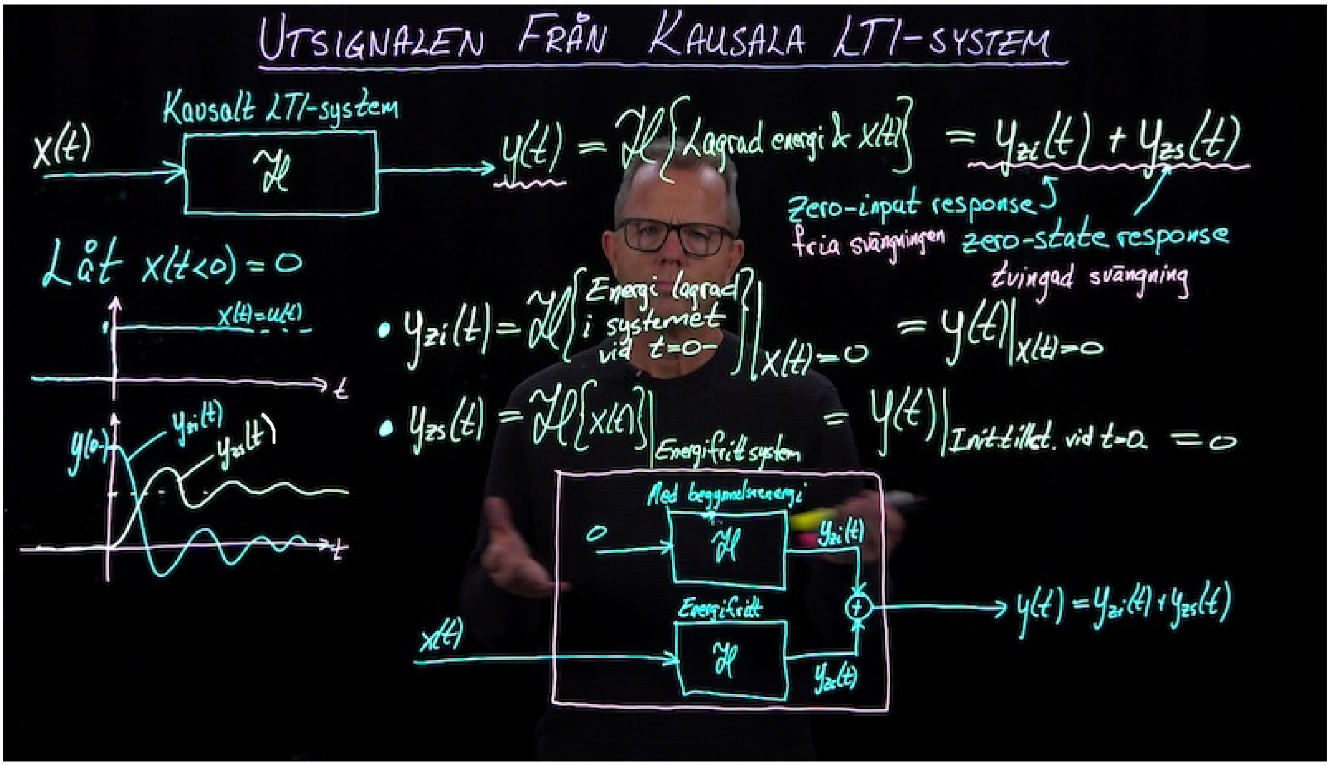
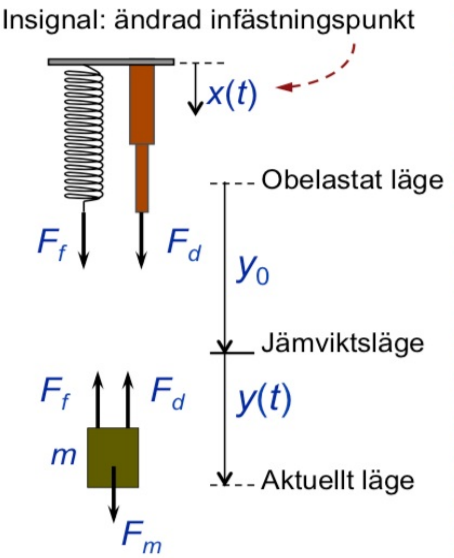
Signaler & System – Föreläsning 2:
Tidsdomänanalys av tidskontinuerliga LTI-system



VIDEO 1

Systemexempel 1 – Mekaniskt svängningssystem, massa i dämpad fjäder

Svängande dämpad fjäder – frilägg och sätt ut krafter:



Fjäderkraften $F_f = k\cdot y_{tot}(t) = k\cdot(y_0 + y(t) - x(t))$

Dämpkraften $F_d = c\cdot(y_{tot}(t))' = c\cdot(y'(t) - x'(t))$

Tyngdkraften $F_m = m\cdot g$ (g = tyngdaccelerationen)

Newtons 2:a lag: $F_m - F_f - F_d = m\cdot y''(t)$

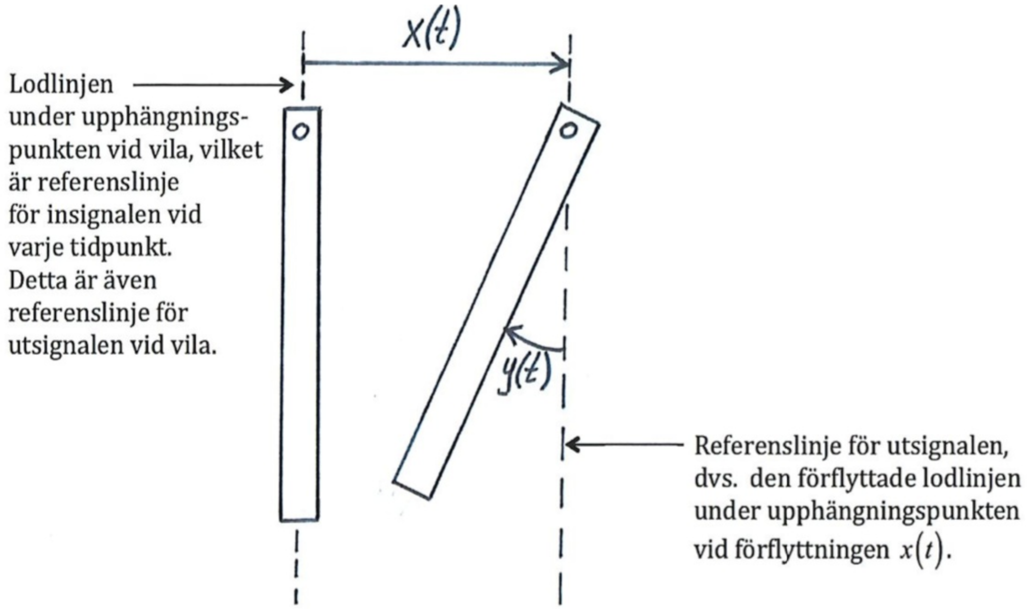
$\Rightarrow m\cdot y''(t) + c\cdot y'(t) + k\cdot y(t) = m\cdot g - k\cdot y_0 + c\cdot x'(t) + k\cdot x(t)$

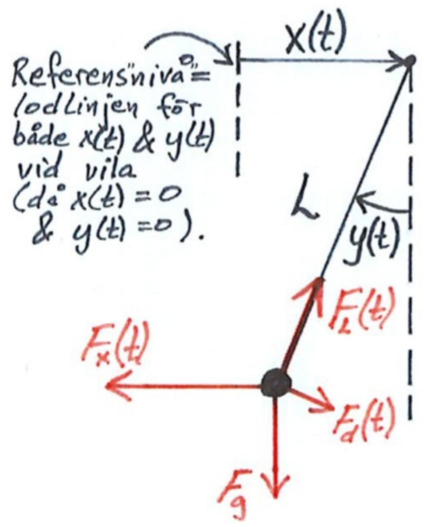
Vid vila är $x=0,\ x'=0,\ y=0,\ y'=0,\ y''=0 \ \Rightarrow\ m\cdot g = k\cdot y_0$

$\Rightarrow$

$$\boxed{m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + c\frac{dy(t)}{dt} + k\cdot y(t) = c\frac{dx(t)}{dt} + k\cdot x(t)}$$

Systemexempel 2 – Mekaniskt svängningssystem, pendlande linjal





Ideal modell

Newtons 2:a lag $\Longrightarrow$ $y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{g}{m}\sin(y) = \frac{\cos(y)}{L}\cdot x''$

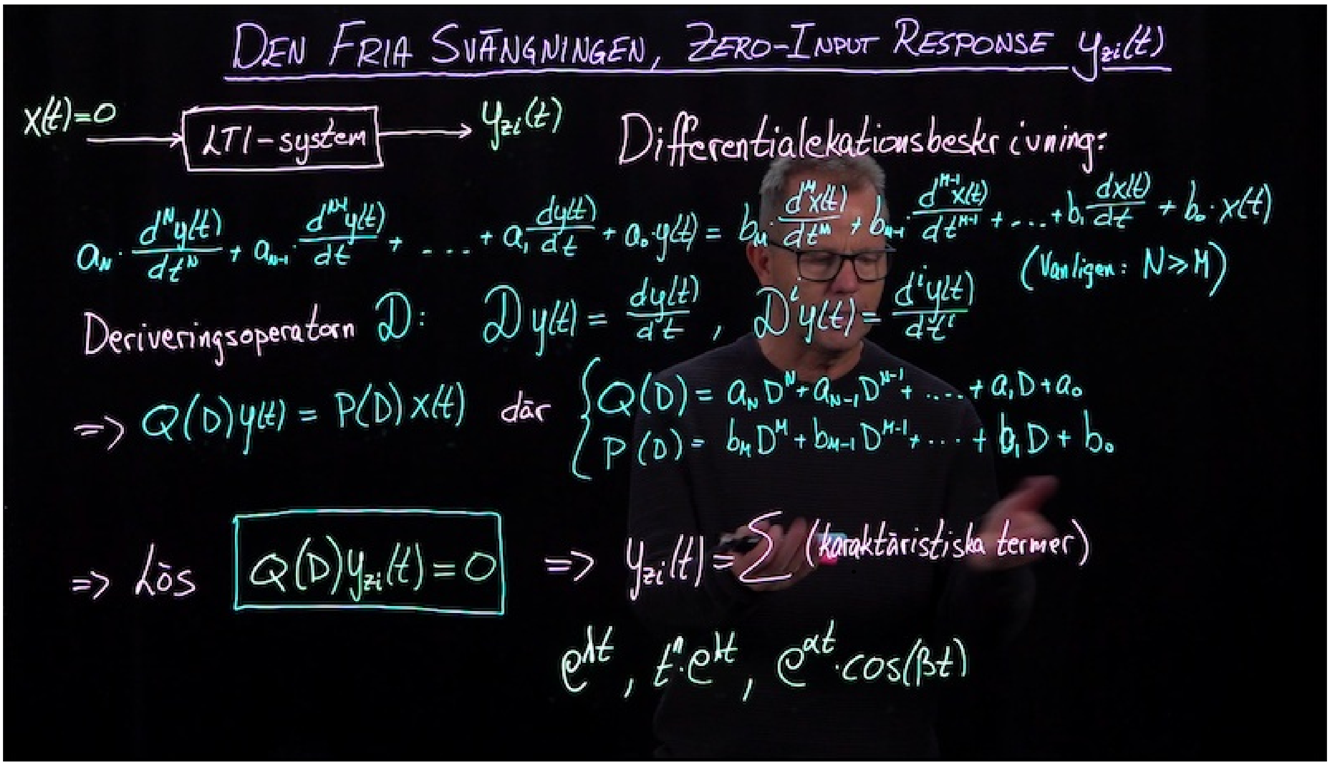
Icke-linjärt system, p.g.a. sin(y) och cos(y)

$\Longrightarrow$ Linjärisera, dvs. approximera med linjär modell:

Om vinkeln y är liten $\Longrightarrow$ $\sin(y) \approx y$, $\cos(y) \approx 1$

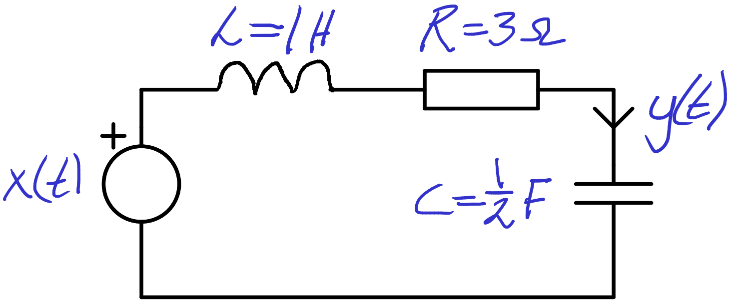
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{g}{L}y(t) = \frac{1}{L}\frac{d^2x(t)}{dt^2}}$$

VIDEO 2



OBS: $y_{zi}(t)$ betecknas $y_0(t)$ i kursboken!

Exempel:

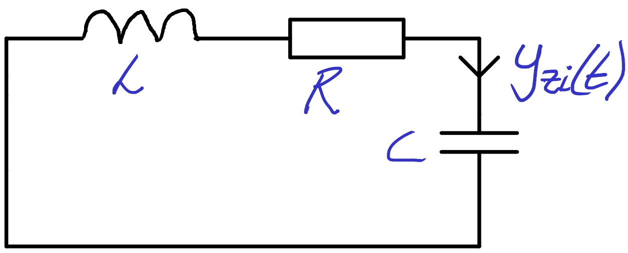


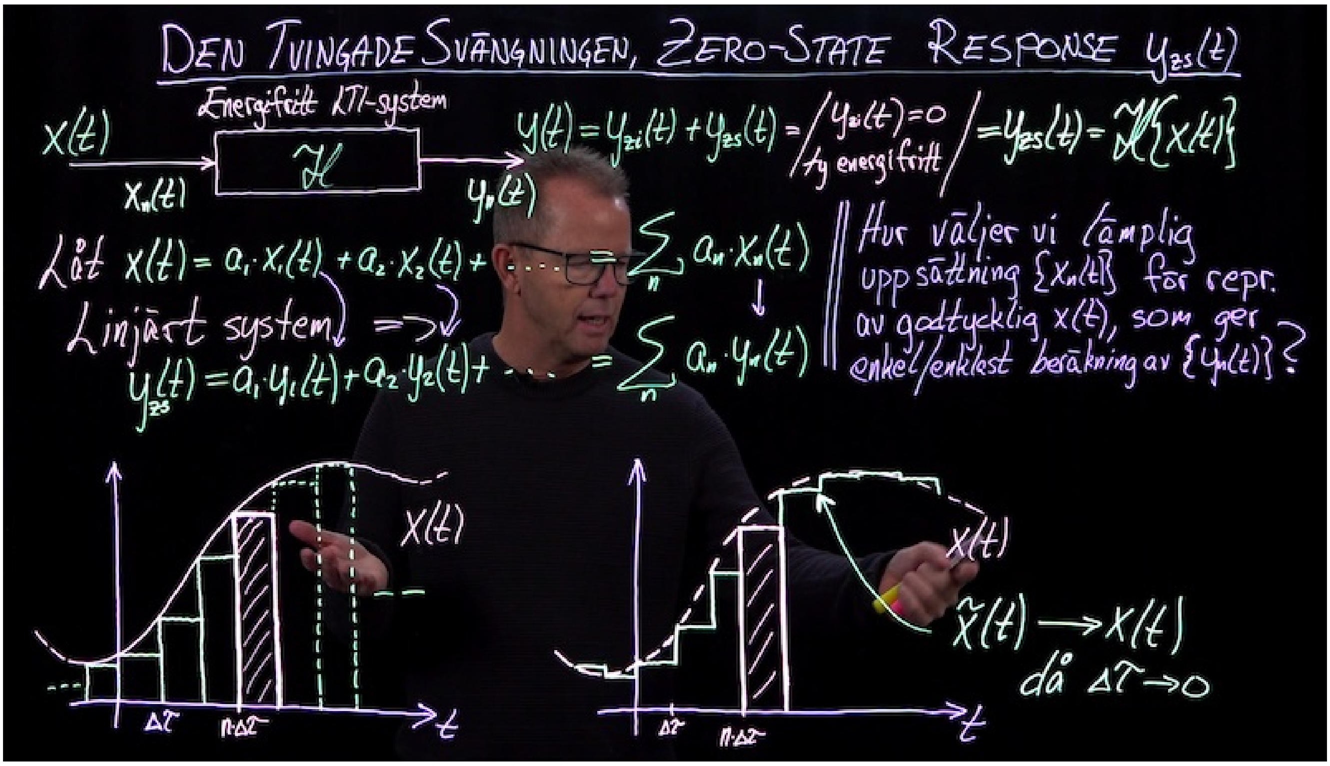
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$y(0^-) = 0$, $y'(0^-) = -5$

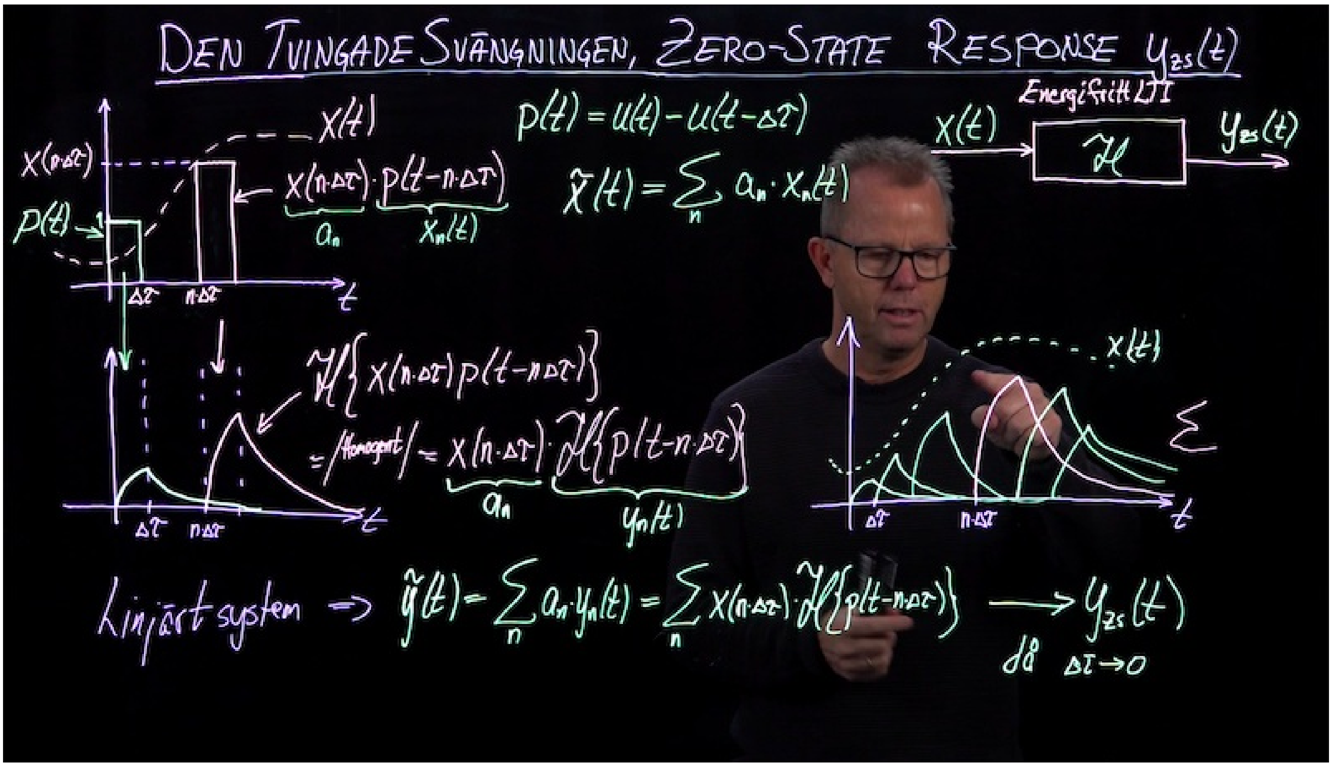
Beräkna $y_{zi}(t)$

Ekvivalent krets:

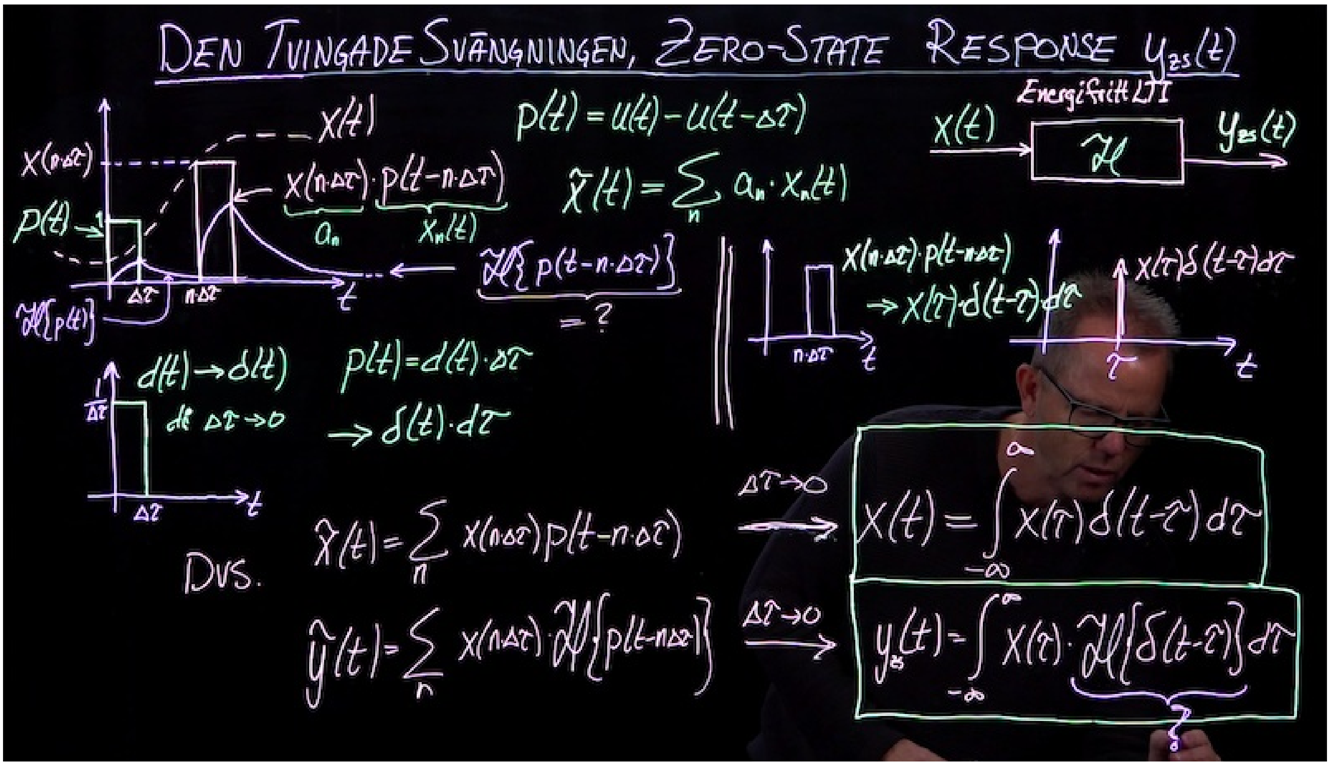




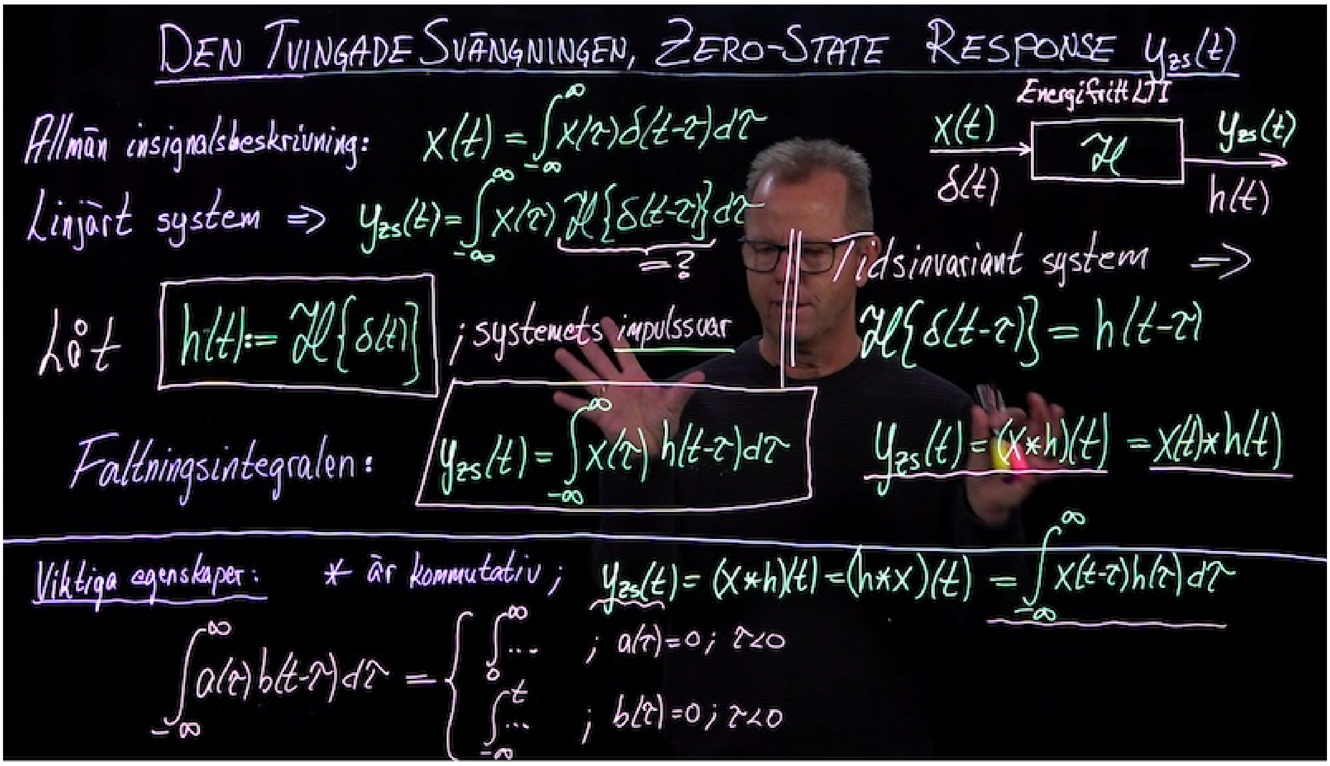
VIDEO 3.1



VIDEO 3.2



VIDEO 3.3



VIDEO 3.4

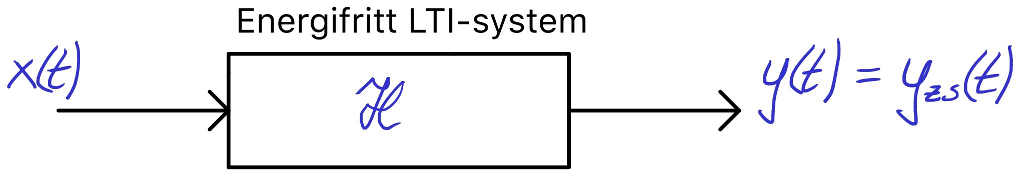
Notera: Om vi utgår från $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \Rightarrow$

$$y_{zs}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \mathcal{H}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau\right\} = \Big/\ \text{Linjärt system}\ \Big/$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\mathcal{H}\{\delta(t-\tau)\}\,d\tau = \Big/\ \mathcal{H}\{\delta(t)\} = h(t)\ \&\ \text{Tidsinvariant system} \Rightarrow \mathcal{H}\{\delta(t-\tau)\} = h(t-\tau)\ \Big/ = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

Slutsats efter videon ovan:

Utsignalens zero-statekomponent (den tvingade svängningen):



där

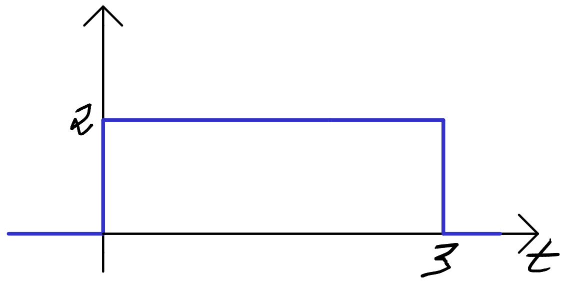
$$y_{zs}(t) = (x*h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

Eller $x(t)*h(t)$

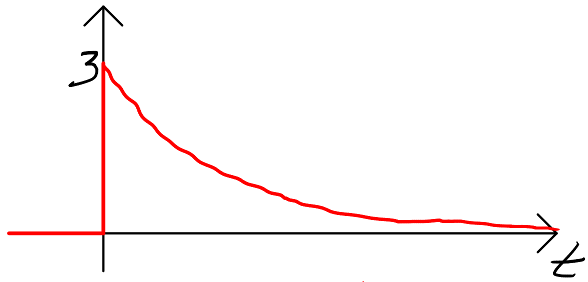
Faltningsintegralen/-erna

där $h(t) = \mathcal{H}\{\delta(t)\}$ är LTI-systemets impulssvar

Exempel:



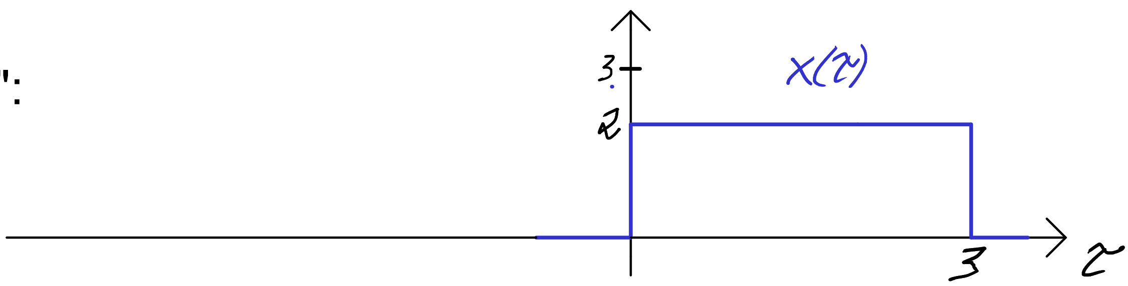
$x(t) = 2(u(t) - u(t-3))$



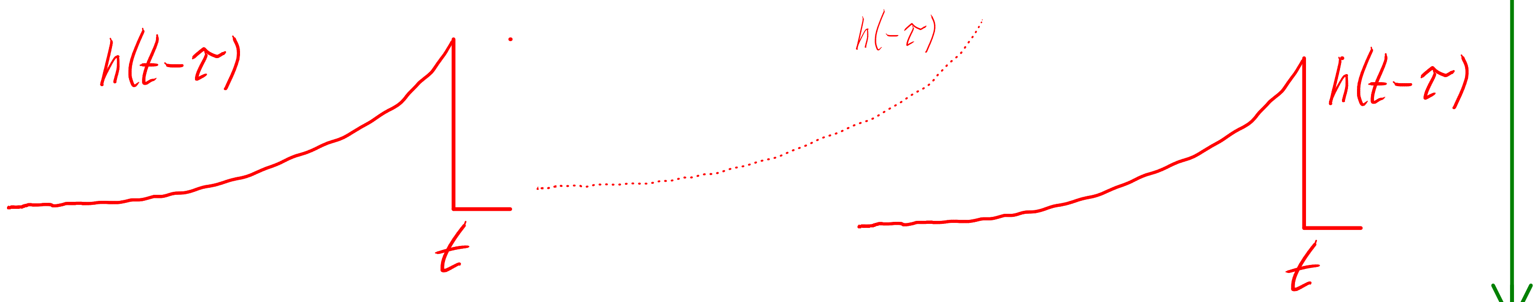
$h(t) = 3e^{-\frac{1}{2}t}\cdot u(t)$

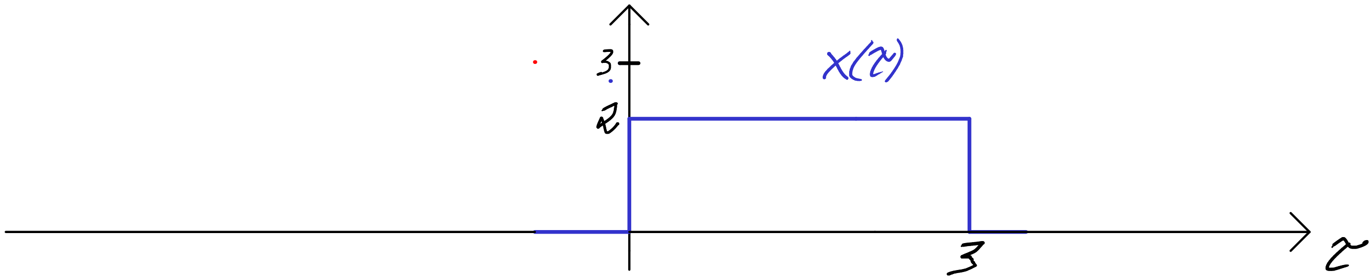
$$y_{zs}(t) = (x*h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

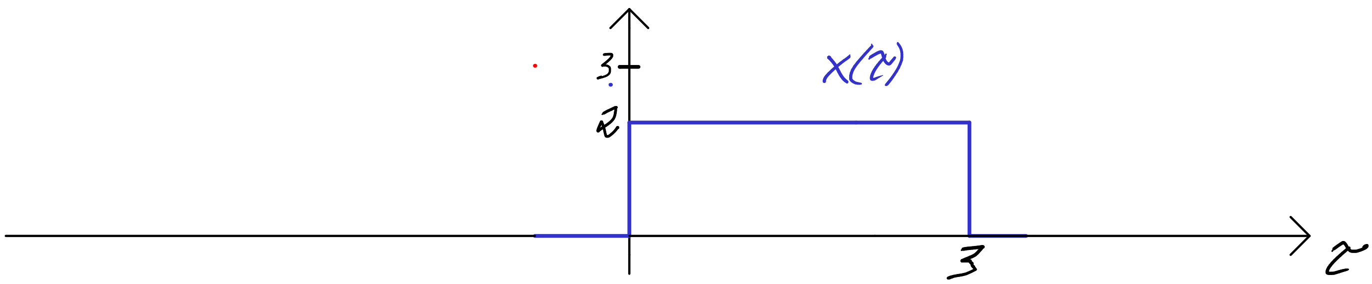
"Grafisk faltning":

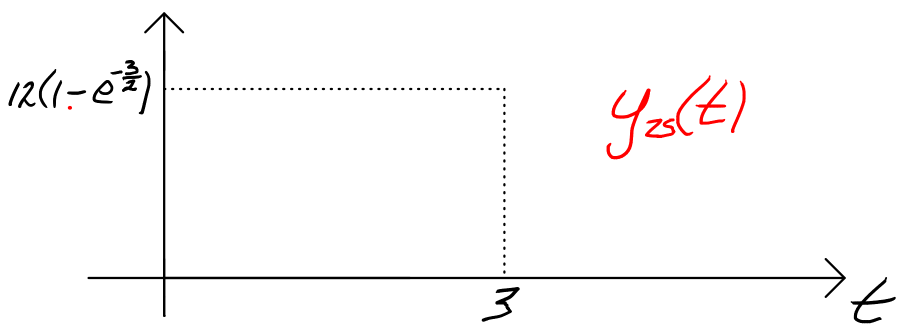


Lasses demo-material under föreläsningen – ingår ej i studentmaterialet:

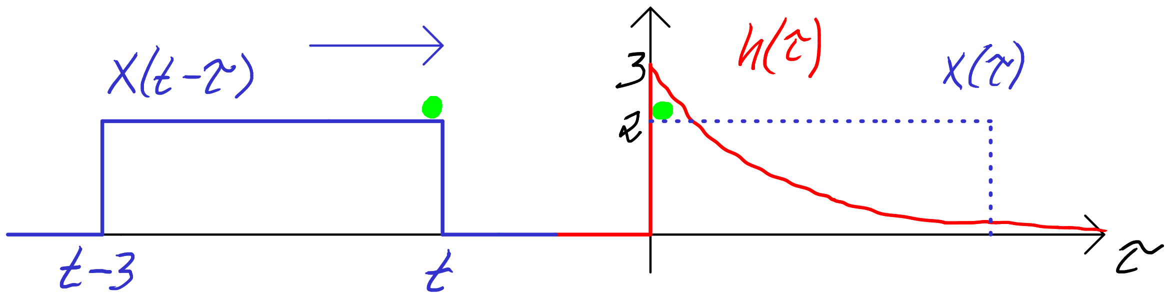








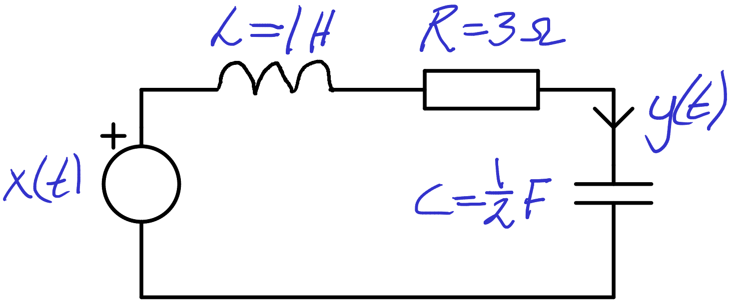
Testa gärna själv att beräkna $y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$!



Impulssvaret h(t) och kausalitet

Stegsvar för LTI-system

Tidigare exempel:



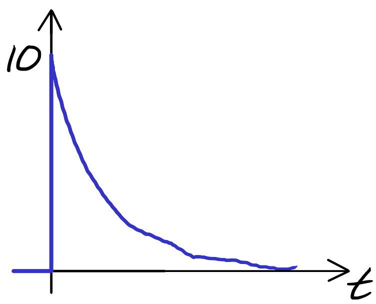
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$y(0^-) = 0, \quad y'(0^-) = -5$$

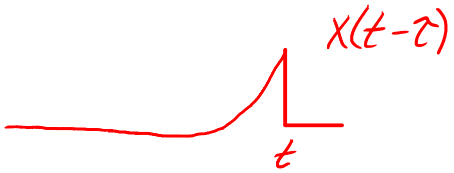
$$\Rightarrow \quad \underline{y_{zi}(t) = -5e^{-t} + 5e^{-2t}; \quad t \geq 0}$$

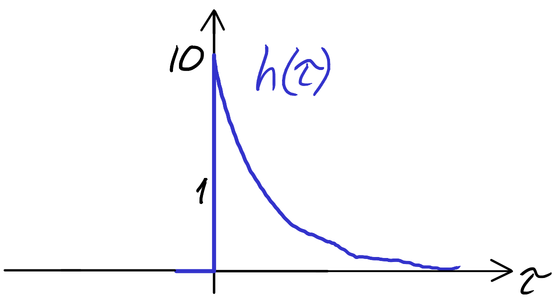
Man kan visa att detta LTI-system har impulssvar $\underline{h(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)}$

Låt insignalen vara $\underline{x(t) = 10e^{-3t} \cdot u(t)}$



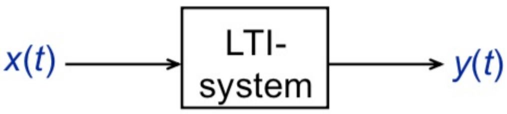
Beräkna den totala utsignalen $\underline{y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)}$





$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

Klassisk differentialekvationslösning



$$y(t) = y_{\text{zi}}(t) + y_{\text{zs}}(t) \qquad (1)$$

Vid differentialekvationsbeskrivning: $$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t) \qquad (2)$$

- $y_n(t)$ = *"Natural response"* = ***Homogen lösning*** $y_{\text{hom}}(t)$, *oberoende* av $x(t)$
- $y_\phi(t)$ = *"Forced response"* = ***Partikulärlösning*** $y_{\text{part}}(t)$, *beror* på $x(t)$

Oftast är (1) att föredra framför (2):

- (1) $\Longrightarrow$ initialtillstånden för $y_{\text{zi}}(t)$ krävs vid $t = 0-$ (2) $\Longrightarrow$ initialtillstånd krävs vid $t = 0+$
- $y_{\text{zi}}(t) + y_{\text{zs}}(t)$ kan delas upp i $y_n(t) + y_\phi(t)$, men inte tvärtom
- (2) är begränsad till vissa insignalstyper, med kända ansättningar av $y_\phi(t)$
- Dock: $y_\phi(t)$ är mycket intressant & lätt att beräkna för vissa centrala insignalstyper!

Stabilitet – för **LTI-system**

Stabilt system:

Varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal. $\Leftrightarrow$ $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty}$

Marginellt stabilt system:

De flesta begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler. $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \nless \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{cases}$$

Instabilt system:

Ingen begränsad nollskild insignal kan ge upphov till en begränsad utsignal. $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \nless \infty \\ |h(t)| \nless \infty \quad \forall t \end{cases}$$