

Signaler & System – Föreläsning 2: Tidsdomänanalys av tidskontinuerliga LTI-system

VIDEO 1

UTSIGNALEN FRÅN KAUSALA LTI-SYSTEM

Kausalt LTI-system

$x(t) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow y(t) = \mathcal{L}\{\text{lagrad energi \& } x(t)\} = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

Zero-input response (fria svängingen) + zero-state response (zvingad svängning)

Låt $x(t < 0) = 0$

$x(t) = u(t)$

$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

- $y_{zi}(t) = \mathcal{L}\left\{ \begin{array}{l} \text{Energilagrad} \\ \text{i systemet} \\ \text{vid } t=0^- \end{array} \right\} \Big|_{x(t)=0} = y(t) \Big|_{x(t)=0}$
- $y_{zs}(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} \Big|_{\text{Energifritt system}} = y(t) \Big|_{\text{Init-tillst. vid } t=0} = 0$

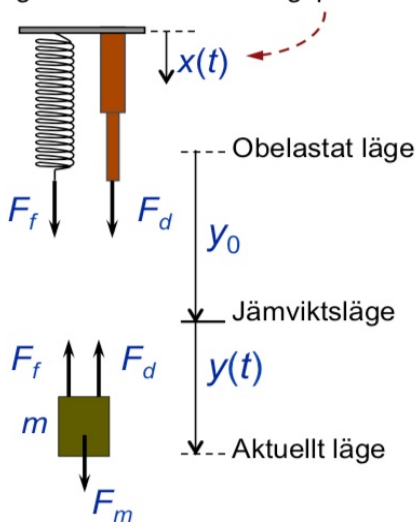
Med byggmatsenergi (Energilagrad) + Energifritt system

$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

Systemexempel 1 – Mekaniskt svängningssystem, massa i dämpad fjäder

Svängande dämpad fjäder – frilägg och sätt ut krafter:

Insignal: ändrad infästningspunkt



Fjäderkraften $F_f = k \cdot y_{\text{tot}}(t) = k \cdot (y_0 + y(t) - x(t))$

Dämpkraften $F_d = c \cdot (y_{\text{tot}}(t))' = c \cdot (y'(t) - x'(t))$

Tyngdkraften $F_m = m \cdot g$ ($g =$ tyngdaccelerationen)

Newtons 2:a lag: $F_m - F_f - F_d = m \cdot y''(t)$

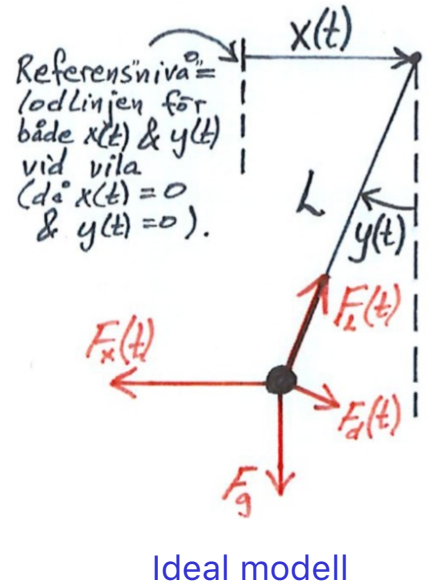
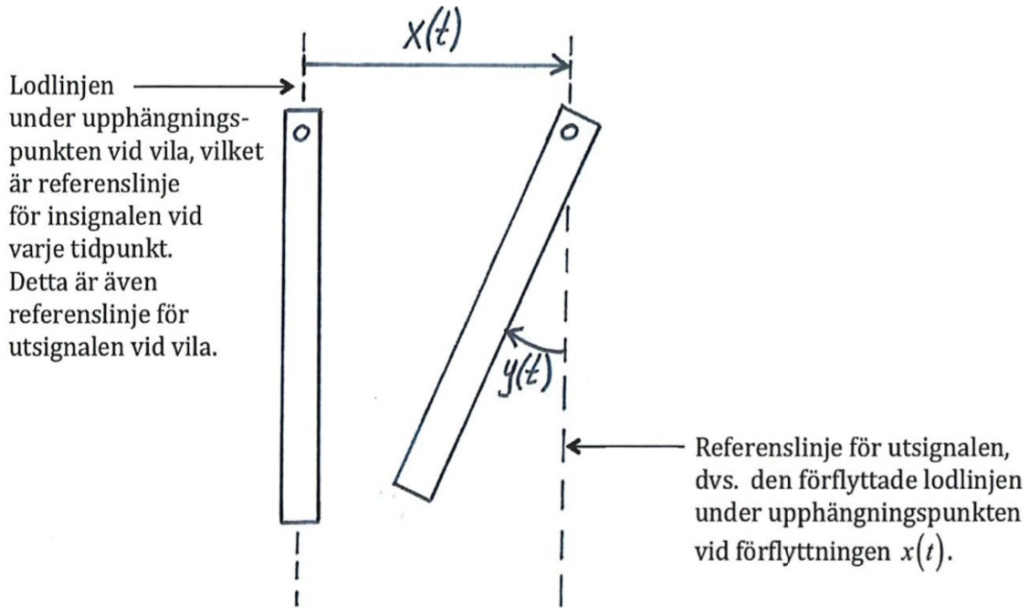
$\Rightarrow m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = m \cdot g - k \cdot y_0 + c \cdot x'(t) + k \cdot x(t)$

Vid vila är $x=0, x'=0, y=0, y'=0, y''=0 \Rightarrow m \cdot g = k \cdot y_0$

\Rightarrow

$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \frac{dy(t)}{dt} + k \cdot y(t) = c \frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t)$

Systemexempel 2 – Mekaniskt svängningssystem, pendlande linjal



Newtons 2:a lag $\Rightarrow y'' + \frac{c}{m}y' + \frac{g}{l}\sin(y) = \frac{\cos(y)}{l} \cdot x''$

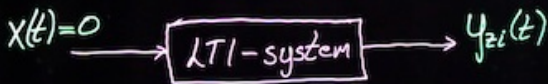
Icke-linjärt system, p.g.a. $\sin(y)$ och $\cos(y)$

\Rightarrow Linjärisera, dvs. approximera med linjär modell:

Om vinkeln y är liten $\Rightarrow \sin(y) \approx y, \cos(y) \approx 1$

$$\Rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{c}{m} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{g}{l} y(t) = \frac{1}{l} \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

DEN FRIA SVÄNGNINGEN, ZERO-INPUT RESPONSE $y_{zi}(t)$



Differenialekvationsbeskrivning:

$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

(Vanligen: $N > M$)

Deriveringsoperatör D : $Dy(t) = \frac{dy(t)}{dt}$, $D^i y(t) = \frac{d^i y(t)}{dt^i}$

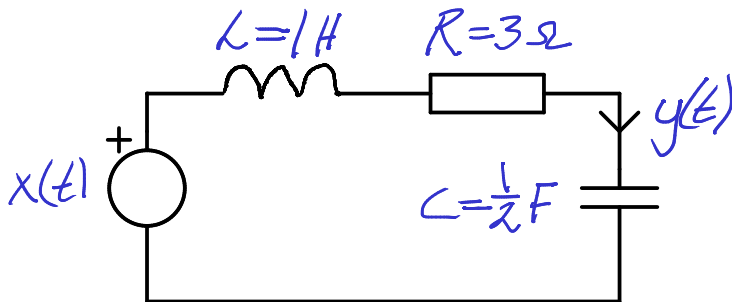
$$\Rightarrow Q(D)y(t) = P(D)x(t) \quad \text{där} \quad \begin{cases} Q(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 \\ P(D) = b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_1 D + b_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{lös } \boxed{Q(D)y_{zi}(t) = 0} \Rightarrow y_{zi}(t) = \sum (\text{karaktäristiska termer})$$

$$e^{at}, t^n e^{at}, e^{at} \cdot \cos(\beta t)$$

OBS: $y_{zi}(t)$ betecknas $y_0(t)$ i kursboken!

Exempel:

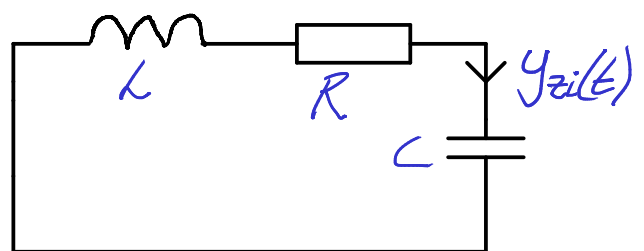


$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

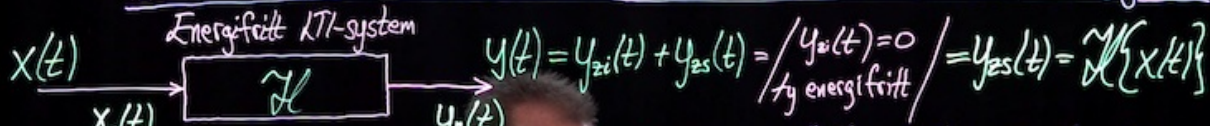
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -5$$

Beräkna $y_{zi}(t)$

Ekvivalent krets:

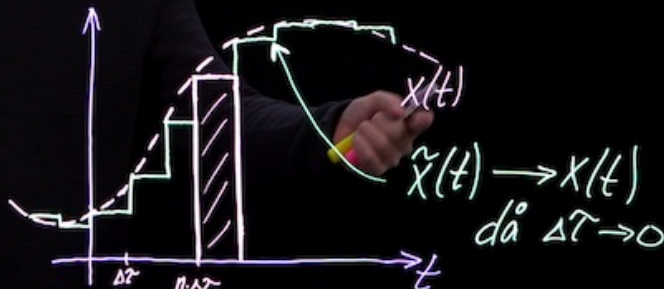
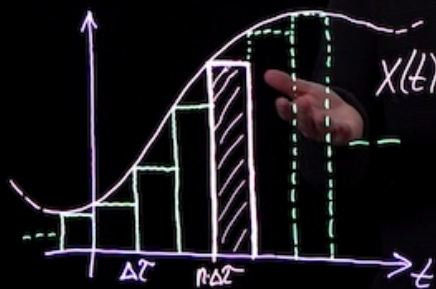


DEN TVINGADE SVÄNGNINGEN, ZERO-STATE RESPONSE $y_{zs}(t)$

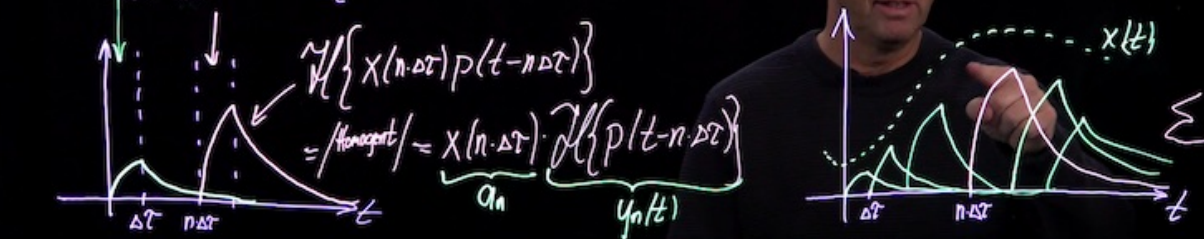
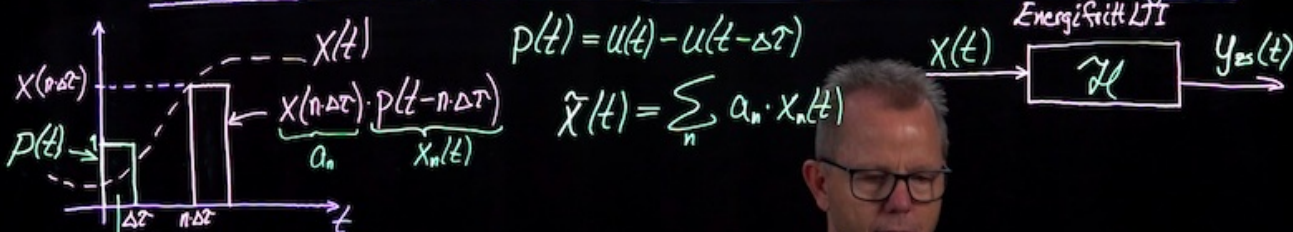


Låt $x(t) = a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t) + \dots = \sum_n a_n \cdot x_n(t)$
 Linjärt system $\Rightarrow y(t) = a_1 \cdot y_1(t) + a_2 \cdot y_2(t) + \dots = \sum_n a_n \cdot y_n(t)$

Hur väljer vi lämplig uppsättning $\{x_n(t)\}$ för repr. av godtycklig $x(t)$, som ger enkel/enklast beräkning av $\{y_n(t)\}$?



DEN TVINGADE SVÄNGNINGEN, ZERO-STATE RESPONSE $y_{zs}(t)$



Linjärt system $\Rightarrow \tilde{y}(t) = \sum_n a_n y_n(t) = \sum_n x(n\Delta\tau) \cdot \mathcal{H}\{p(t - n\Delta\tau)\} \rightarrow y_{zs}(t)$ då $\Delta\tau \rightarrow 0$

DEN Tvingade Svängningen, ZERO-STATE RESPONSE $y_{zs}(t)$

$p(t) = u(t) - u(t - \Delta\tau)$
 $\hat{x}(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t)$
 $\mathcal{L}\{p(t - n \cdot \Delta\tau)\} = ?$
 $d(t) \rightarrow \delta(t)$ $p(t) = d(t) \cdot \Delta\tau$
 $de \Delta\tau \rightarrow 0 \rightarrow \delta(t) \cdot d\tau$
 Dvs. $\hat{x}(t) = \sum_n x(n\Delta\tau) p(t - n\Delta\tau)$
 $\hat{y}(t) = \sum_n x(n\Delta\tau) \mathcal{L}\{p(t - n\Delta\tau)\}$
 $\Delta\tau \rightarrow 0 \rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$
 $\Delta\tau \rightarrow 0 \rightarrow y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} d\tau$

DEN Tvingade Svängningen, ZERO-STATE RESPONSE $y_{zs}(t)$

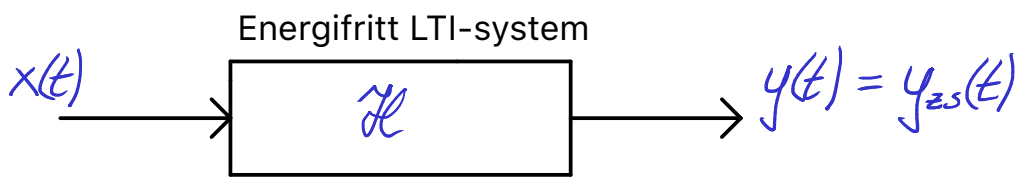
Allmän signalsbeskrivning: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$
 Linjärt system $\Rightarrow y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} d\tau$
 Låt $h(t) := \mathcal{L}\{\delta(t)\}$; systemets impulssvar
 Tidsinvariant system $\Rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} = h(t - \tau)$
 Faltningintegralen: $y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$ $y_{zs}(t) = (x * h)(t) = x(t) * h(t)$
 Viktiga egenskaper: * är kommutativ; $y_{zs}(t) = (x * h)(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau$
 $\int_{-\infty}^{\infty} a(\tau) b(t - \tau) d\tau = \begin{cases} \int_{\dots}^{\infty} \dots; & a(\tau) = 0; \tau > 0 \\ \int_{-\infty}^t \dots; & b(\tau) = 0; \tau > 0 \end{cases}$

Notera: Om vi utgår från $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \Rightarrow$

$y_{zs}(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\right\} = \text{Linjärt system}$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} d\tau = \text{Tidsinvariant system} \Rightarrow \mathcal{L}\{\delta(t - \tau)\} = h(t - \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$

Slutsats efter videon ovan:

Utsignalens zero-statekomponent (den tvingade svängningen):



där

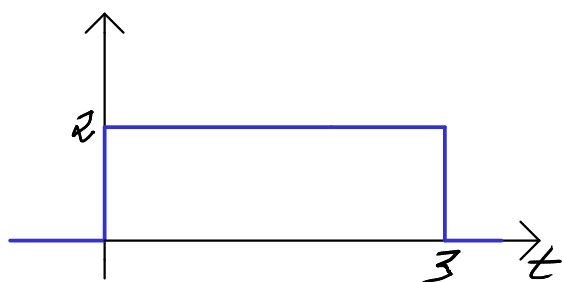
$$y_{zs}(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

Eller $x(t) * h(t)$

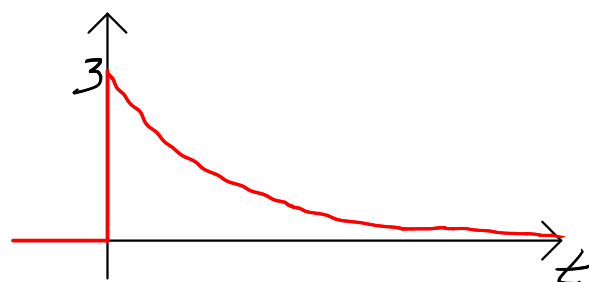
Faltningintegralen/-erna

där $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\delta(t)\}$ är LTI-systemets impulssvar

Exempel:



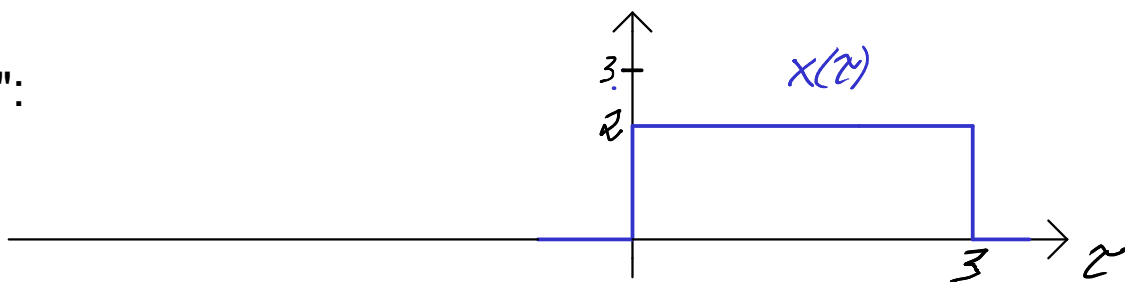
$$x(t) = 2(u(t) - u(t-3))$$



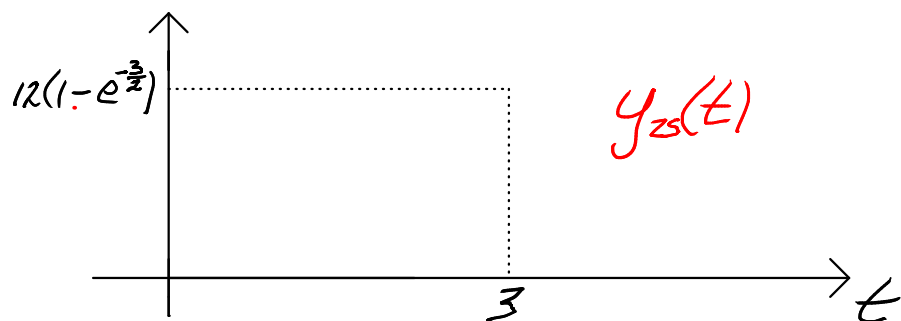
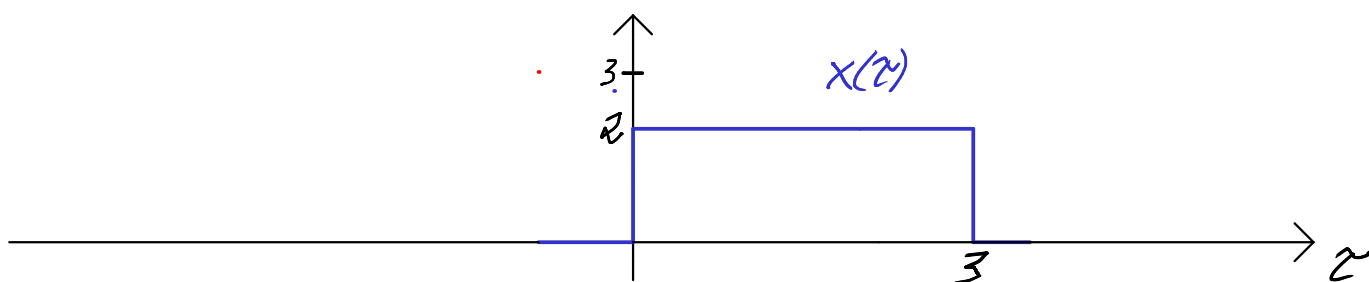
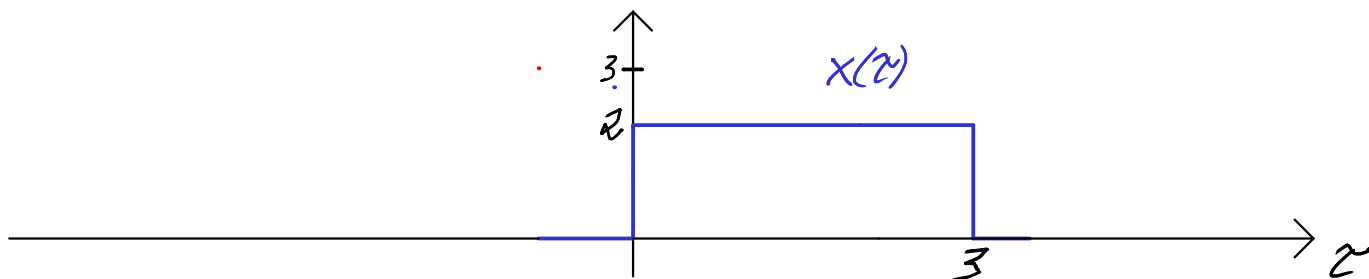
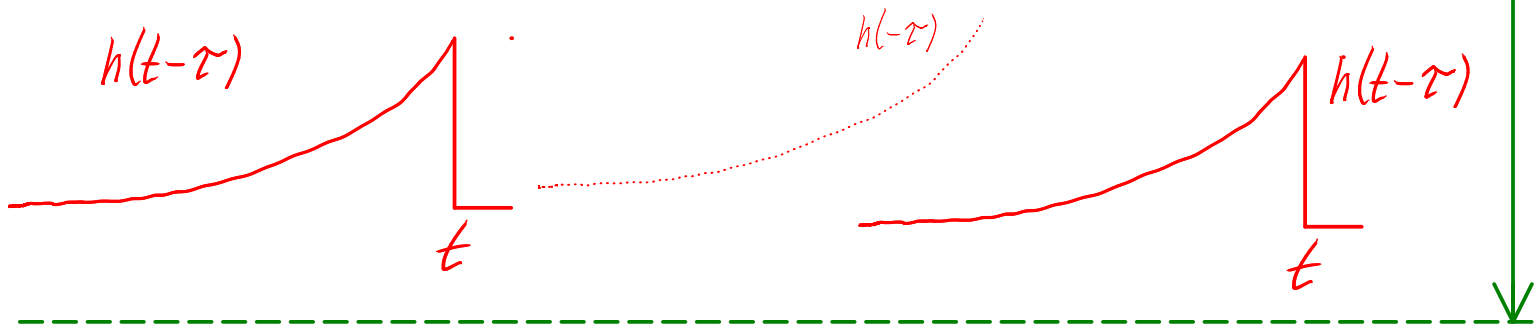
$$h(t) = 3e^{-\frac{1}{2}t} \cdot u(t)$$

$$y_{zs}(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

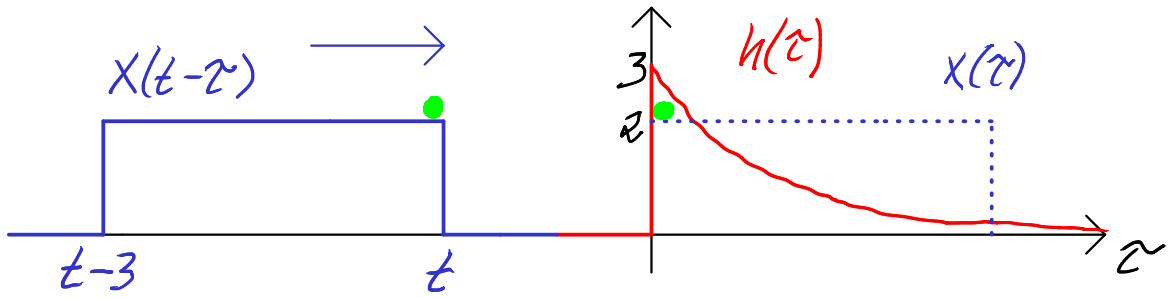
"Grafisk faltning":



Lasses demo-material under föreläsningen – ingår ej i studentmaterialet:



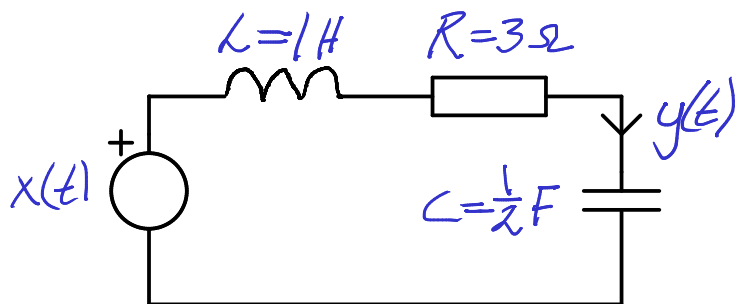
Testa gärna själv att beräkna $y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau) d\tau$!



Impulssvaret $h(t)$ och kausalitet

Stegsvar för LTI-system

Tidigare exempel:



$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -5$$

$$\Rightarrow \underline{y_{zi}(t) = -5e^{-t} + 5e^{-2t}; \quad t \geq 0}$$

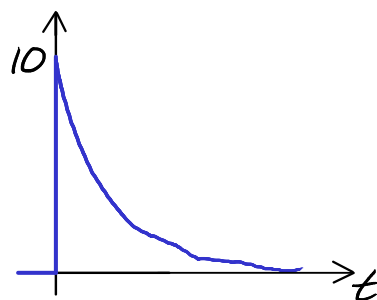
Man kan visa att detta LTI-system

har impulssvar $\underline{h(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)}$

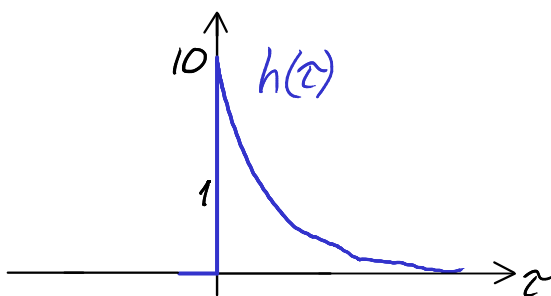


Låt insignalen vara

$$\underline{x(t) = 10e^{-3t} \cdot u(t)}$$



Beräkna den totala utsignalen $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$



$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

Klassisk differentialekvationslösning

$x(t)$ → LTI-
system → $y(t)$ $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$ (1)

Vid differentialekvationsbeskrivning: $y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$ (2)

- $y_n(t)$ = "Natural response" = **Homogen lösning** $y_{\text{hom}}(t)$, oberoende av $x(t)$
- $y_\phi(t)$ = "Forced response" = **Partikulärlösning** $y_{\text{part}}(t)$, beror på $x(t)$

Oftast är (1) att föredra framför (2):

- (1) \Rightarrow initialtillstånden för $y_{zi}(t)$ krävs vid $t = 0^-$ (2) \Rightarrow initialtillstånd krävs vid $t = 0^+$
- $y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$ kan delas upp i $y_n(t) + y_\phi(t)$, men inte tvärtom
- (2) är begränsad till vissa insignalstyper, med kända ansättningar av $y_\phi(t)$
- Dock: $y_\phi(t)$ är mycket intressant & lätt att beräkna för vissa centrala insignalstyper!

Stabilitet – för LTI-system

Stabilt system:

Varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal.

⇔

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Marginellt stabilt system:

De flesta begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler.

⇔

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{array} \right.$$

Instabilt system:

Ingen begränsad nollskild insignal kan ge upphov till en begränsad utsignal.

⇔

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{array} \right.$$