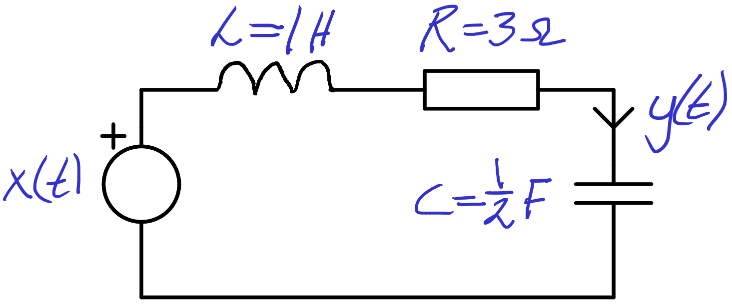
Signaler & System – Föreläsning 3:
* Avslutning Tidsdomänanalys av tidskontinuerliga LTI-system
* LTI-system med periodisk insignal – Fourierserieanalys

Tidigare exempel:



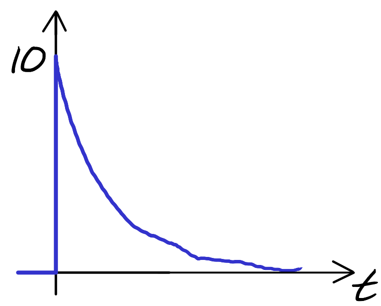
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$y(0^-)=0,\quad y'(0^-)=-5$$

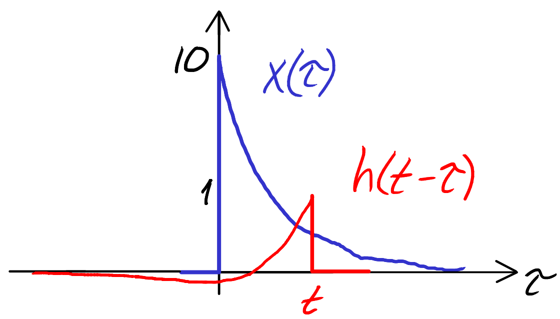
$$\Rightarrow \quad y_{zi}(t)=-5e^{-t}+5e^{-2t};\quad t\geq 0$$

Man kan visa att detta LTI-system har impulssvar $h(t)=(2e^{-2t}-e^{-t})u(t)$

Låt insignalen vara $x(t)=10e^{-3t}\cdot u(t)$



Beräkna den totala utsignalen $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$



$$y_{zs}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau=\Big/\ x(t<0)=0 \ \int_0 \ ;\ h(t<0)=0 \Rightarrow h(t-\tau<0)=0,\ \text{dvs. } h(\tau>t)=0 \Rightarrow \int^t \Big/$$

$$= \int_0^t 10e^{-3\tau}\left(2e^{-2(t-\tau)} - e^{-(t-\tau)}\right)d\tau = 20e^{-2t}\int_0^t e^{-\tau}d\tau - 10e^{-t}\int_0^t e^{-2\tau}d\tau$$

$$= \left(\underbrace{-5e^{-t} + 20e^{-2t}}_{\substack{\text{h-termer} \\ = \text{kan. termer}}} \underbrace{-15e^{-3t}}_{\text{x-term}}\right)u(t)$$

Total utsignal

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$$

$$= \left(\overbrace{-5e^{-t} + 5e^{-2t}} \overbrace{-5e^{-t} + 20e^{-2t} - 15e^{-3t}}\right)u(t)$$

$$= \left(\underbrace{-10e^{-t} + 25e^{-2t}}_{y_{hom}(t)} \underbrace{-15e^{-3t}}_{y_{part}(t)}\right)u(t)$$

Kursboken: $y_n(t)$ $\quad$ $y_\phi(t)$

Klassisk differentialekvationslösning

$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI-system}} \longrightarrow y(t)$

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \qquad (1)$$

Vid differentialekvationsbeskrivning: $$y(t) = y_n(t) + y_\phi(t) \qquad (2)$$

- $y_n(t)$ = *"Natural response"* = ***Homogen lösning*** $y_{hom}(t)$, *oberoende av* $x(t)$
- $y_\phi(t)$ = *"Forced response"* = ***Partikulärlösning*** $y_{part}(t)$, *beror på* $x(t)$

Oftast är (1) att föredra framför (2):

- (1) $\Longrightarrow$ initialtillstånden för $y_{zi}(t)$ krävs vid $t = 0-$ (2) $\Longrightarrow$ initialtillstånd krävs vid $t = 0+$
- $y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$ kan delas upp i $y_n(t) + y_\phi(t)$, men inte tvärtom
- (2) är begränsad till vissa insignalstyper, med kända ansättningar av $y_\phi(t)$
- Dock: $y_\phi(t)$ är mycket intressant & lätt att beräkna för vissa centrala insignalstyper!

Stabilitet – för LTI-system

Stabilt system:

Varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal. $\Leftrightarrow$ $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty}$ 1

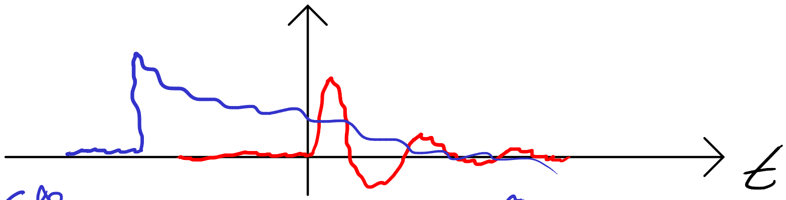
Marginellt stabilt system:

De flesta begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler. $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \nless \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{cases}$ 2

Instabilt system:

Ingen begränsad nollskild insignal kan ge upphov till en begränsad utsignal. $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \nless \infty \\ |h(t)| \nless \infty \quad \forall t \end{cases}$ 3

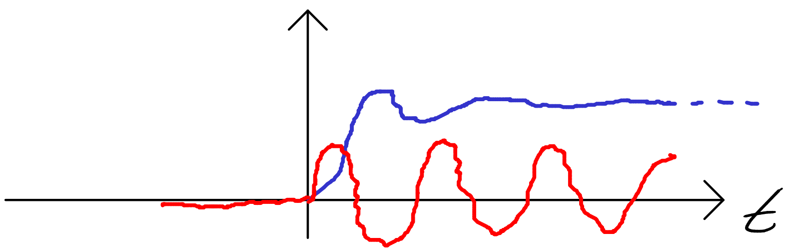
1 Ex. på impulssvar h(t) för stabilt system:



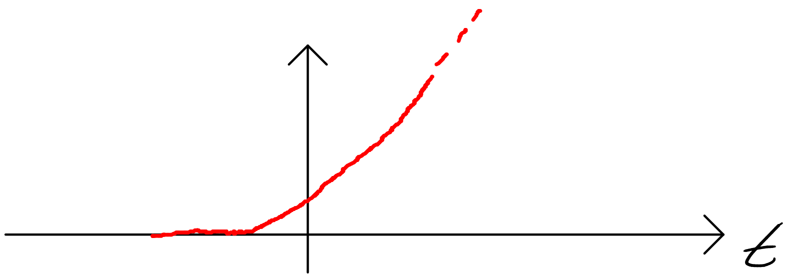
$$|y_{zs}(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x(t-\tau)|}_{\leq M < \infty} \cdot |h(\tau)|\,d\tau \leq M \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau \underbrace{\leq}_{\text{om stabilt}} N < \infty$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty$$

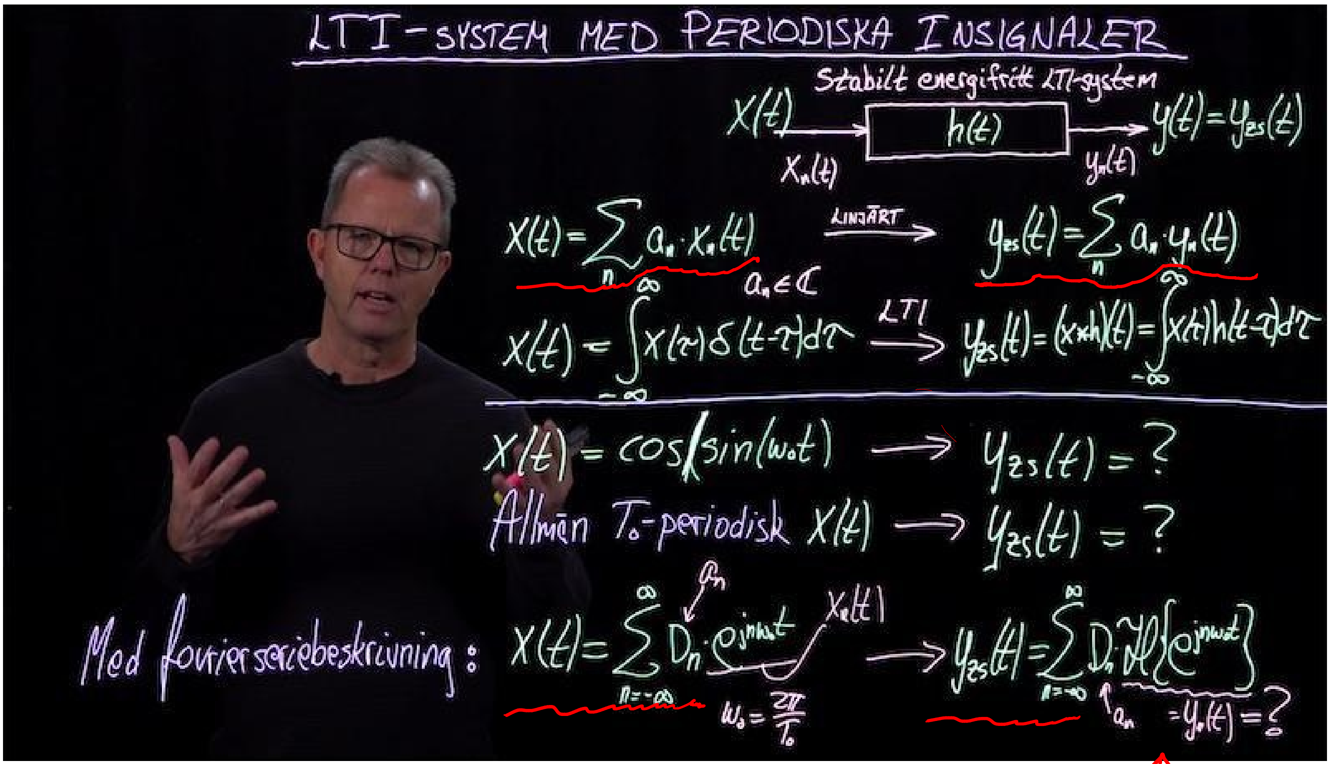
2 Ex. på impulssvar h(t) för marginellt stabilt system:



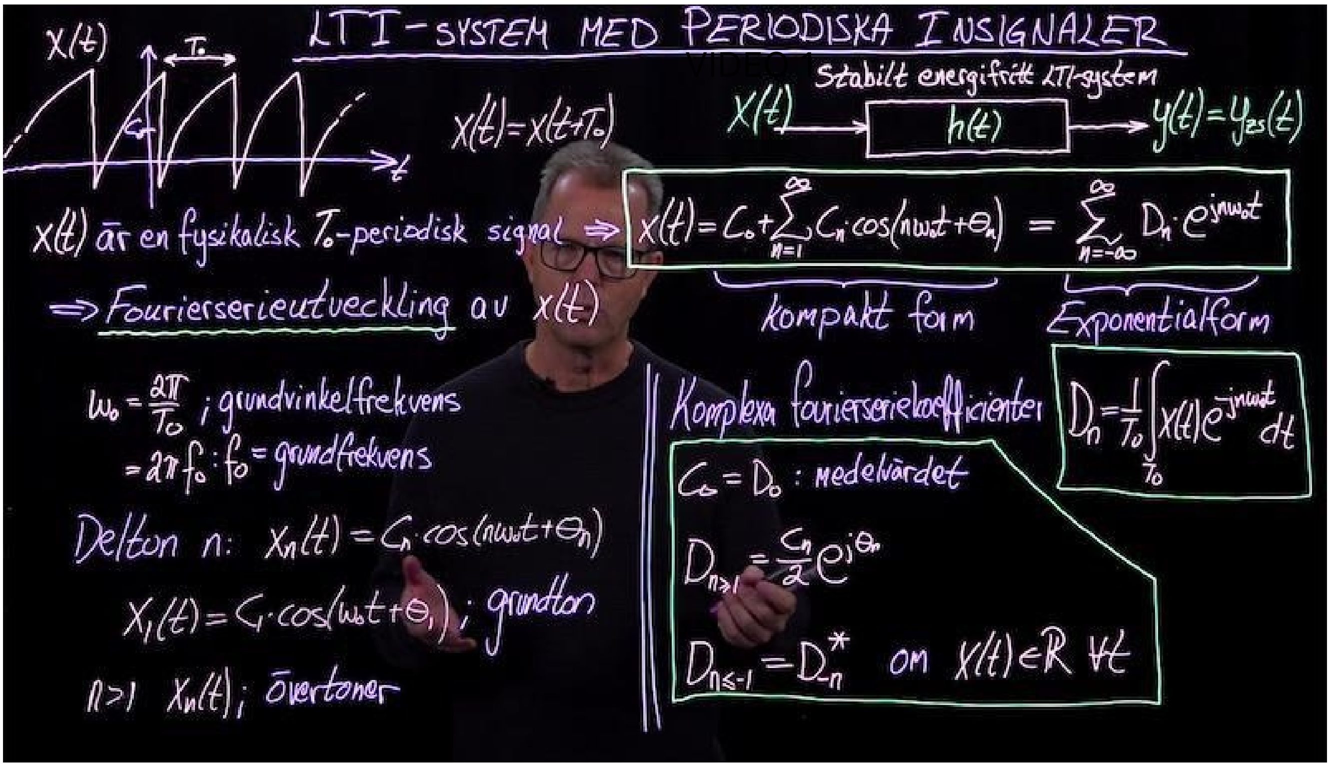
3 Ex. på impulssvar h(t) för instabilt system:



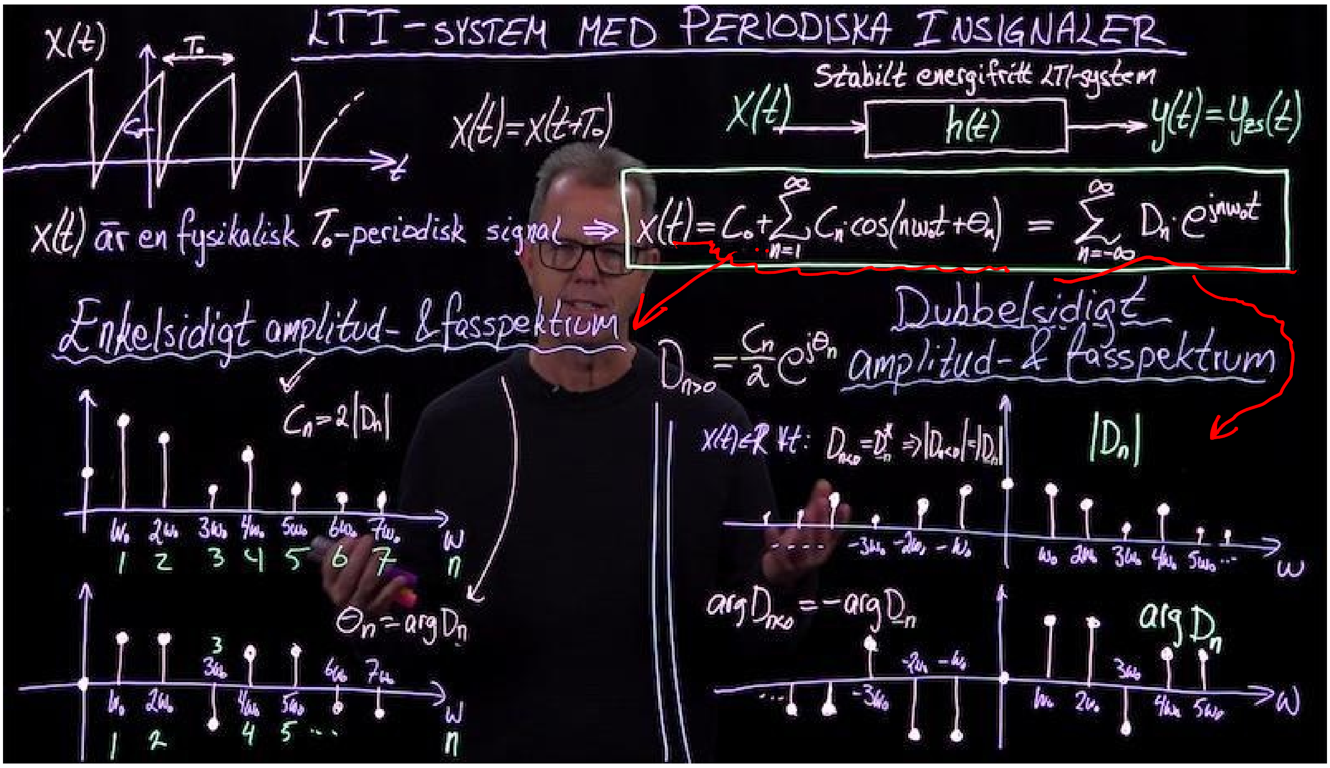
LTI-system med periodisk insignal – Fourierserieanalys



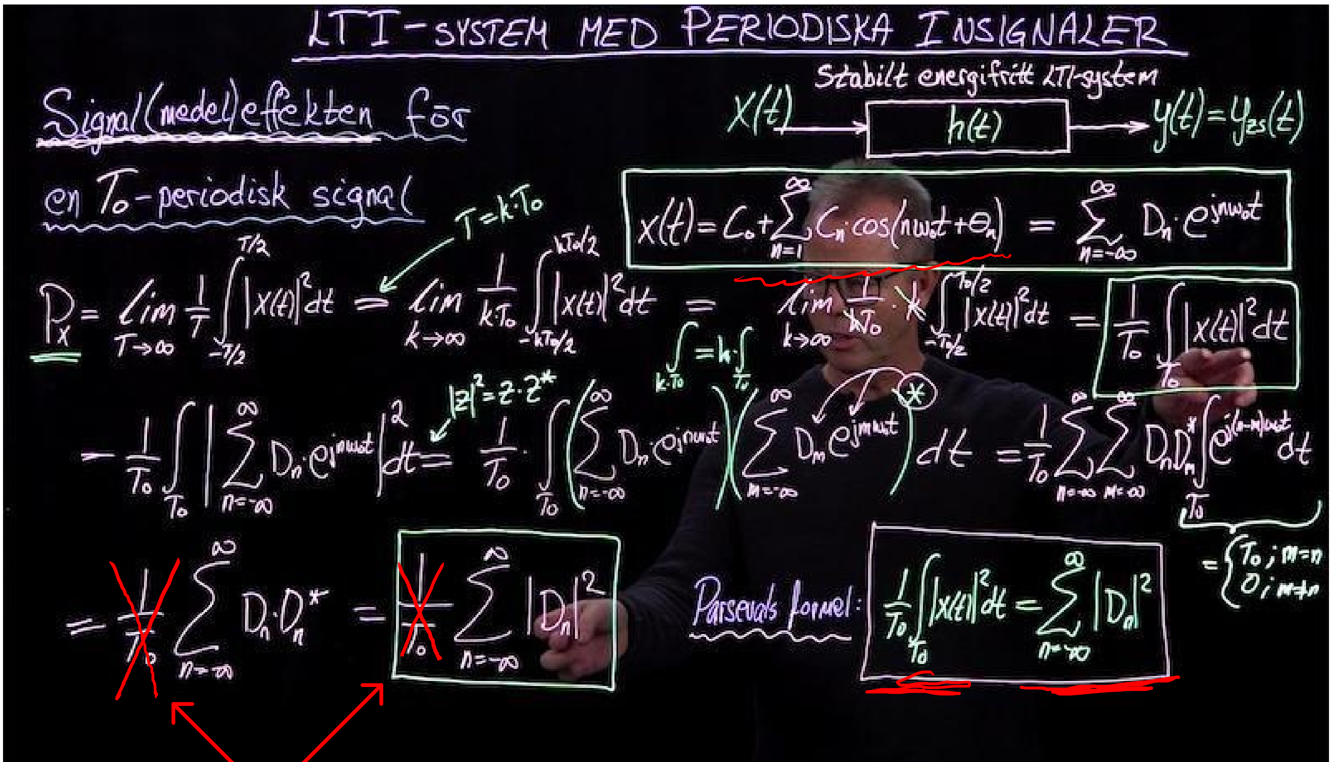
VIDEO 1



VIDEO 2.1



VIDEO 2.2



VIDEO 2.3

Som jag skriver i videobeskrivningen, så ska 1/To bort!

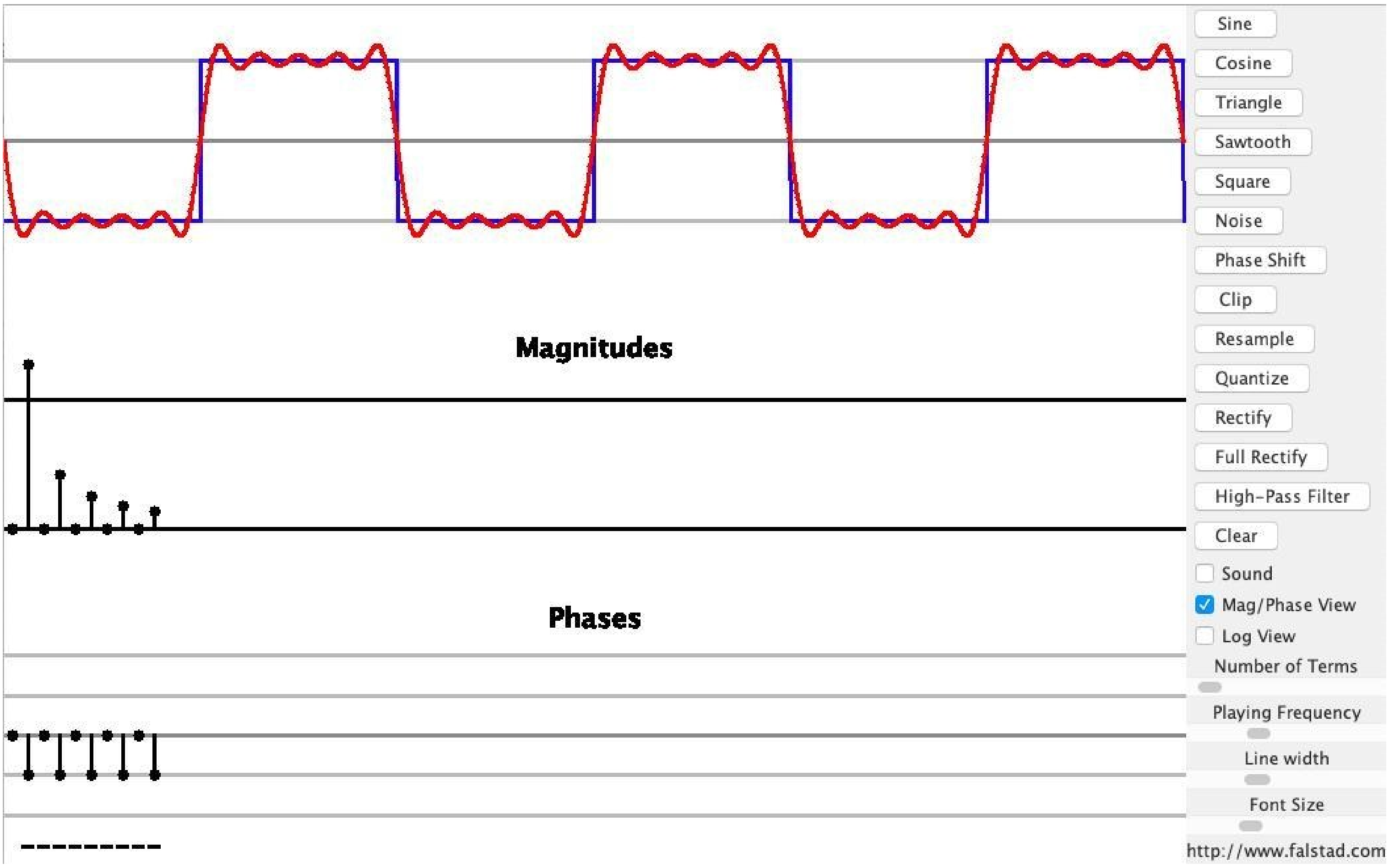
Parsevals formel/teorem: $P_x = \boxed{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2}$

Signaleffekten till och med delton M (vinkelfrekvens $M\omega_0$): $P_M = \sum_{n=-M}^{M} |D_n|^2$

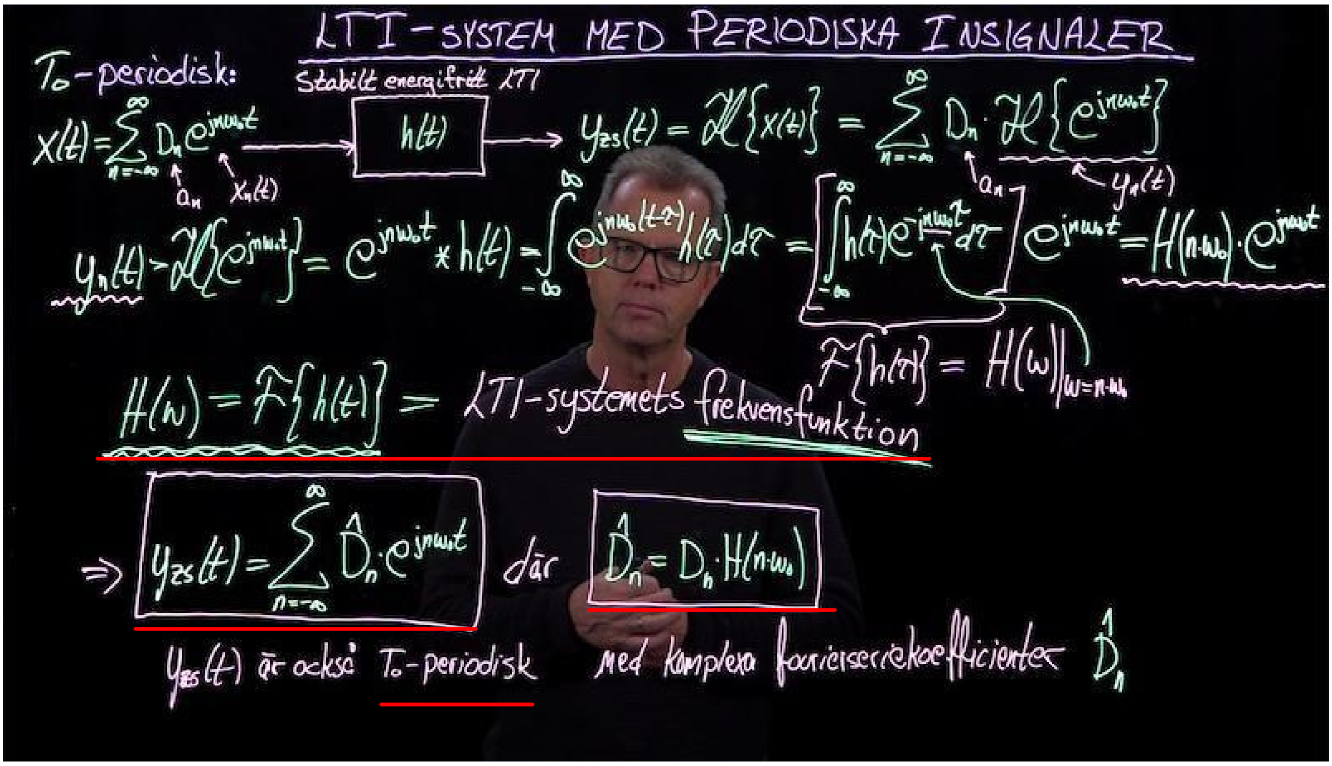
vinkelfr. $0 \leq \omega \leq M\omega_0$

DEMO – enkelsidigt spektrum för olika signaler

(Testa själv på www.falstad.com/fourier)



Du kommer själv att få undersöka något liknande i Laboration 1!



VIDEO 3

Stabilt energifritt LTI-system

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}:\ h(t),\ H(\omega)} \longrightarrow y_{zs}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$$

Videon:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad y_{zs}(t) = H(\omega_0)\, e^{j\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n\, e^{jn\omega_0 t}$$

där $\boxed{\hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0)}$

$$x(t) = C_0 = C_0 \cdot e^{j0\cdot t} \quad (\omega_0 = 0) \quad \Rightarrow \quad y_{zs}(t) = C_0 \cdot H(0)\, e^{j0\cdot t} = C_0 \cdot H(0)$$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad y_{zs}(t) = |H(\omega_0)| \cdot \cos(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))$$

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$\Rightarrow \quad y_{zs}(t) = \underbrace{C_0 \cdot H(0)}_{\hat{C}_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_n \cdot |H(n\omega_0)|}_{\hat{C}_n} \cos(n\omega_0 t + \underbrace{\theta_n + \arg H(n\omega_0)}_{\hat{\theta}_n})$$

$$\underline{x(t) = \cos(\omega_0 t)} = Re\{e^{j\omega_0 t}\}$$

$$\Rightarrow \underline{y_{zs}(t)} = Re\{e^{j\omega_0 t}\} * h(t) = Re\{e^{j\omega_0 t} * h(t)\} =$$

$$= Re\{\cos\omega_0 t * h(t) + j\sin\omega_0 t * h(t)\}$$

$$= Re\{\underbrace{H(\omega_0)}_{|H(\omega_0)| \cdot e^{j\arg H(\omega_0)}} \cdot e^{j\omega_0 t}\} = |H(\omega_0)| \cdot Re\{e^{j(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))}\}$$

$$= \underline{|H(\omega_0)| \cdot \cos(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))}$$

Beräkningsvägar vid beräkning av utsignalen och dess spektrum för LTI-system med periodisk insignal

T_0-periodisk insignal, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Stabilt (energifritt) LTI-system

$$\longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow$$

T_0-periodisk utsignal

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n e^{jn\omega_0 t} = \hat{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \hat{\theta}_n)$$

$x(t)$ (given grafiskt eller analytiskt under en period)

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt \longrightarrow \hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0) \longrightarrow \begin{cases} \hat{C}_0 = \hat{D}_0 \\ \hat{C}_n = 2|\hat{D}_n| \\ \hat{\theta}_n = \arg \hat{D}_n \end{cases}$$

$H(\omega)$

$$\begin{cases} C_0 = D_0 \\ C_n = 2|D_n| \\ \theta_n = \arg D_n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \hat{C}_0 = C_0 \cdot H(0) \\ \hat{C}_n = C_n \cdot |H(n\omega_0)| \\ \hat{\theta}_n = \theta_n + \arg H(\omega_0) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \hat{D}_0 = \hat{C}_0 \\ \hat{D}_{n>0} = \frac{\hat{C}_n}{2} e^{j\hat{\theta}_n} \\ \hat{D}_{n<0} = \hat{D}_{-n}^{*} \end{cases}$$

(Jag sa på föreläsningen att det saknades $|\hat{D}_n|$ & $\arg \hat{D}_n$ utgående från $\hat{D}_n$ $(= D_n \cdot H(n\omega_0))$ ovan, men det är ändå så självklart, så jag ändrar inget ovan.)

Några EXEMPEL, LTI-system med periodisk insignal

T_0 -periodisk insignal, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

Stabilt (energifritt)
LTI-system

T_0 -periodisk utsignal

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n \, e^{jn\omega_0 t}$$

$$\boxed{\hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0)}$$

Ex. 1

$$y_{zs}(t) = x(t-t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 (t-t_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{D_n \cdot e^{-jn\omega_0 t_0}}_{\hat{D}_n} \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$; \; H(\omega) = e^{-j\omega t_0}$

Ex 2:

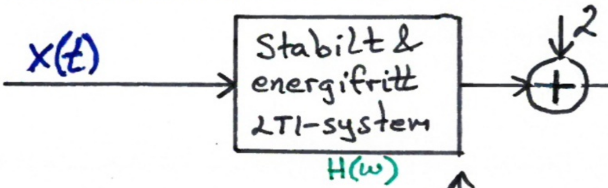
$$y_{zs}(t) = x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot \frac{d}{dt} e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{D_n \cdot jn\omega_0}_{\hat{D}_n} \cdot e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow \boxed{D_n = \frac{\hat{D}_n}{jn\omega_0}}$$

$; \; H(\omega) = j\omega$

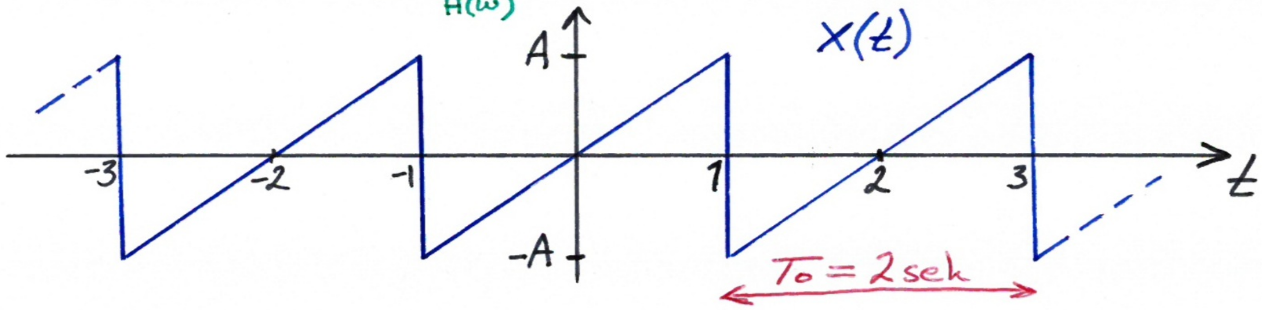
Allmänt: D_n för en T_0-periodisk signal $x(t)$ kan erhållas från $D_{nx'}$ för $x'(t)$

$$\boxed{D_n = \frac{D_{nx'}}{jn\omega_0}}$$

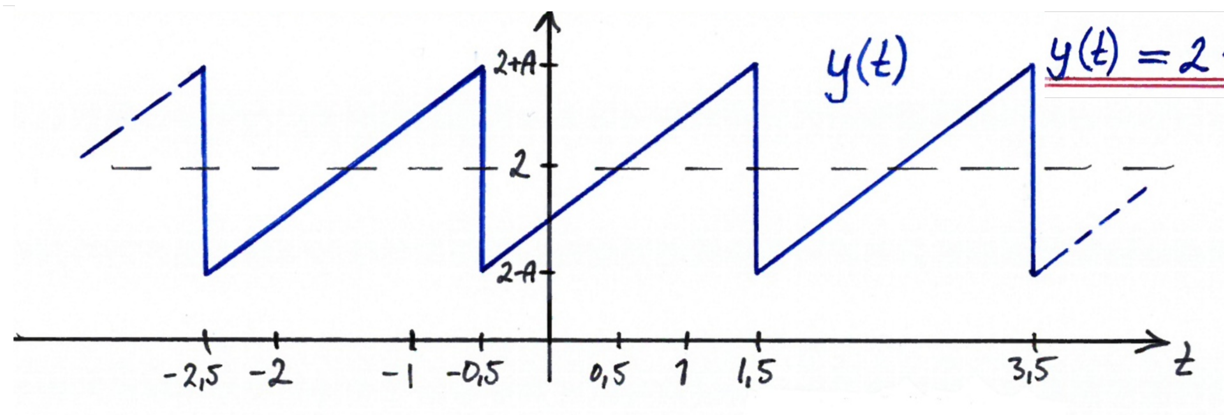
Exempel, LTI-system & periodisk insignal



$$y(t) = 2 + x\left(t - \tfrac{1}{2}\right)$$



Beräkna och rita både enkelsidigt och dubbelsidigt amplitudspektrum och fasspektrum för $y(t)$.



$$y(t) = 2 + x\left(t - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \text{där } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

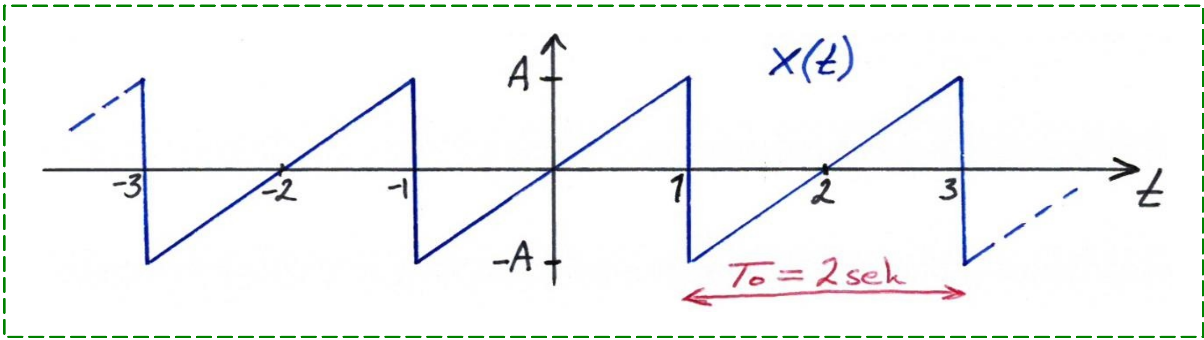
$$\Rightarrow y(t) = 2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{D_n \cdot e^{jn\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}}_{= D_n \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jn\pi t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n e^{jn\pi t}$$

$y(t) = 2 + x\left(t - \tfrac{1}{2}\right)$

$y(t)$ är också T_0-periodisk

$$\text{där} \begin{cases} \hat{D}_0 = 2 + D_0 \cdot e^{-j0\cdot\frac{\pi}{2}} = 2 + D_0 \\ \hat{D}_n = \underbrace{D_n \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}}}_{= D_n \cdot H(n\omega_0),\ \text{där } H(n\omega_0) = e^{-jn\frac{\pi}{2}}} \quad ; \quad n \neq 0 \end{cases} \qquad (\star)$$

$\left(H(\omega) = e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)$



där $\underline{D_n} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} A\cdot t \cdot e^{-jn\pi t}\, dt$

$=$ / Partiell integration – se formelsamlingen, sid 3:
$\underline{\int t\cdot e^{at}\, dt = \frac{e^{at}}{a^2}(at-1)}$; Här: $a = -jn\pi$ /

$$= \frac{A}{2}\left[\frac{e^{-jn\pi t}}{(-jn\pi)^2}\left(-jn\pi t - 1\right)\right]_{-1}^{1}$$

($n \neq 0$, ty division med n^2)

$$= \frac{A}{-2n^2\pi^2}\left(e^{-jn\pi}\left(-jn\pi - 1\right) - e^{jn\pi}\left(jn\pi - 1\right)\right) =$$

/ $e^{\pm jn\pi} = \left(e^{\pm j\pi}\right)^n = (-1)^n$ /

$$= \frac{A}{-2n^2\pi^2}\left(-jn\pi 2(-1)^n + 0\right) = \underline{\frac{jA(-1)^n}{n\pi}} \; ; \; \underline{n \neq 0}$$

$$\underline{D_0} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\underbrace{e^{-j0\cdot\omega_0 t}}_{=1}\, dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} A\cdot t\, dt = \underline{0}$$

(Erhålls även direkt från grafen; D_0 = medelvärdet)

---

dvs. $\underline{D_n} = \begin{cases} \frac{jA(-1)^n}{\pi n} \; ; \; n \neq 0 \\ 0 \; ; \; n = 0 \end{cases} = \begin{cases} j\cdot\frac{A}{\pi n} = \frac{A}{\pi n} e^{j\frac{\pi}{2}} \; ; & \text{jämna } n > 0 \\ -j\cdot\frac{A}{\pi n} = \frac{A}{\pi n}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \; ; & \text{udda } n > 0 \\ D_{-n}^{*} = |D_n| e^{-j\arg D_n} \; ; & \text{alla } n < 0 \\ 0 \; ; & n = 0 \end{cases}$

T.ex. $D_{-7} = D_7^{*} = |D_7|\cdot e^{-j\arg D_7}$

$\hat{D}_0$ & $\hat{D}_n$ från $(\ast)$ ovan $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{\hat{D}_0}} = 2 + D_0 = 2 + 0 = \underline{\underline{2}} = 2 \cdot e^{j0} \Rightarrow \begin{cases} |\hat{D}_0| = 2 \\ \arg \hat{D}_0 = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

$\underline{n \neq 0} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\hat{D}_n}} = D_n \cdot e^{j n \frac{\pi}{2}} = \frac{jA(-1)^n}{\pi n} \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}}$$

$$= \Big/ \begin{matrix} j = e^{j\frac{\pi}{2}} \\ (-1)^n = e^{jn\pi} \end{matrix} \Big/ = \underline{\underline{\frac{A}{\pi n} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}(n+1)}}}$$

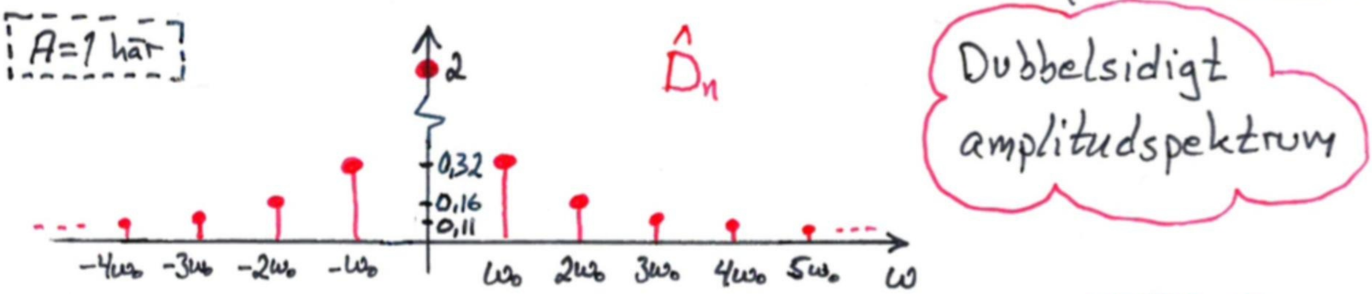
$$\Rightarrow \underline{\underline{|\hat{D}_n|}} = |D_n| = \underline{\underline{\frac{A}{\pi \cdot |n|}}} \quad ; \quad n \neq 0$$

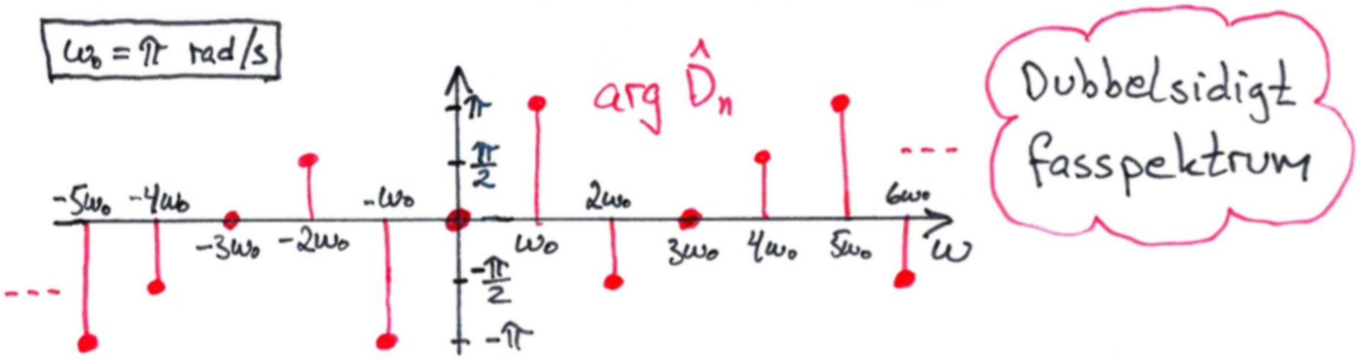
och

$$\begin{cases} \underline{\underline{\arg \hat{D}_n = \frac{\pi}{2}(n+1)}} = \begin{cases} \pi & ; n = 1, 5, 9, \ldots \\ \frac{3\pi}{2}, \text{ dvs. } \underline{\underline{\frac{-\pi}{2}}} & ; n = 2, 6, 10, \ldots \\ 2\pi, \text{ dvs. } \underline{\underline{0}} & ; n = 3, 7, 11, \ldots \\ \frac{5\pi}{2}, \text{ dvs. } \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}} & ; n = 4, 8, 12, \ldots \end{cases} \\ \text{då } n > 0 \\ \underline{\underline{\arg \hat{D}_n = -\arg \hat{D}_{-n}}} \quad \text{då } n < 0 \end{cases}$$

Dvs. $|\hat{D}_n|$ och $\arg \hat{D}_n$ ovan är de dubbelsidiga amplitud- och fasspektrumen som efterfrågas i uppgiften.

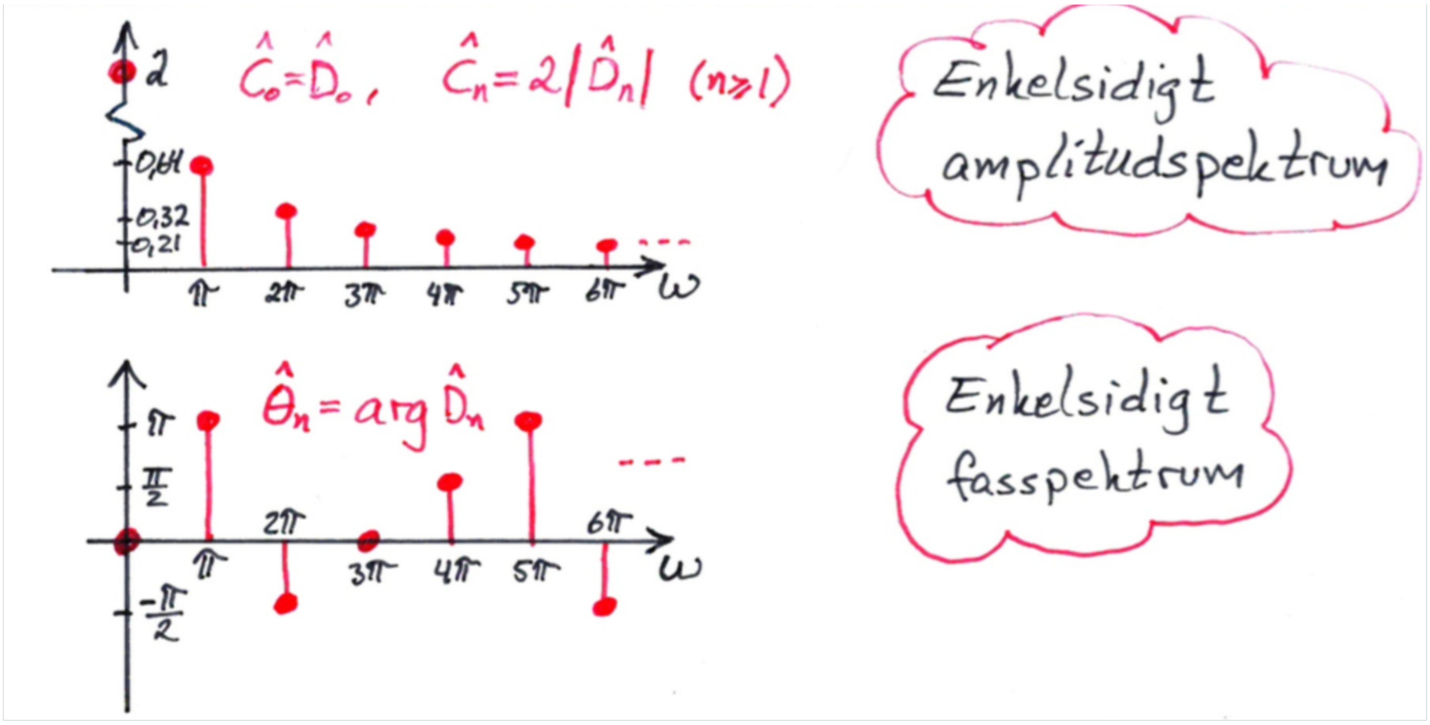
FREKVENSSPEKTRUM FÖR SÅGTANDSVÅGEN/-FUNKTIONEN





Enkelsidigt amplitudspektrum & fasspektrum:

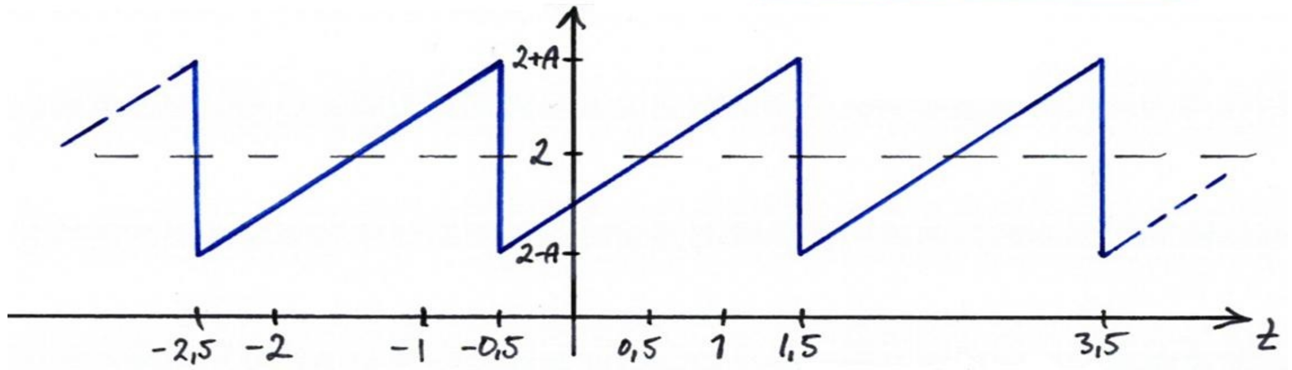
$$
\begin{cases}
\hat{C}_0 = \hat{D}_0 = 2 \\
\hat{C}_n = 2|\hat{D}_n| = \dfrac{2A}{\pi n} \quad ; \quad n \geq 1 \\
\hat{\theta}_n = \arg \hat{D}_n \quad ; \; n \geq 1 \text{ , enligt ovan}
\end{cases}
$$

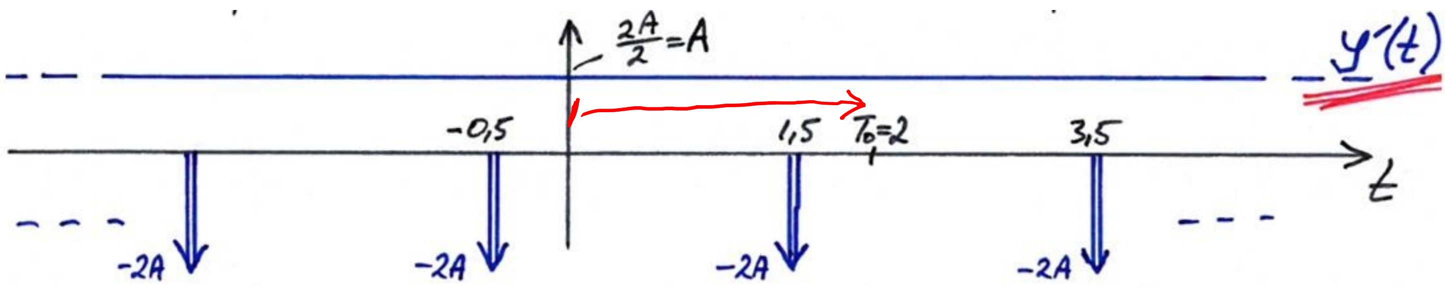


Alternativ Lösning för beräkning av $\hat{D}_n$ baserat på sambandet

$D_n = \frac{D_{nx'}}{jn\omega_0}$, där D_n & $D_{nx'}$ är de komplexa fourierseriekoefficienterna för $x(t)$ resp. $x'(t)$:

$y(t) = 2 + x(t-\frac{1}{2})$





$$\hat{D}_{ny'} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y'(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(A - 2A\delta(t-\tfrac{3}{2})\right)e^{-jn\pi t}dt$$

$$= \frac{A}{2}\underbrace{\int_0^2 e^{-jn\pi t}dt}_{=0} - A\int_0^2 \delta(t-\tfrac{3}{2})e^{-jn\pi t}dt$$

$$= -A\cdot e^{-jn\pi t}\Big|_{t=\frac{3}{2}} = -Ae^{-jn\frac{3\pi}{2}} = -Ae^{jn\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \hat{D}_n = \frac{\hat{D}_{ny'}}{jn\omega_0} \underset{n\neq 0}{=} \frac{-Ae^{jn\frac{\pi}{2}}}{jn\pi} = \ldots = \frac{A}{n\pi}\left(e^{j\frac{\pi}{2}(n+1)}\right), \; n\neq 0$$

$$\frac{-1}{j} = j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

En fråga ställdes i slutet: När denna metod lämplig? Det är den om derivatasignalen, eller kanske andraderivatan, innehåller dirac:er. Då blir det enklast att beräkna Dn-integralen. Om man gör det för andraderivatan så får man dela med jnwo två gånger för att få de komplexa fourierseriekoefficienterna för själva signalen.

Kretsberäkningar med allmän periodiska ström- eller spänningskälla.

Bestäm en ström/spänning $y(t)$ i kretsen (=LTI-systemet):

1. Den elektriska kretsen $\Rightarrow$
   a. **Komplexschema** $\Rightarrow$ *frekvensfunktion* $H(\omega)$ (kap.7)
   eller
   b. **Laplaceoperatorschema** $\Rightarrow$ *systemfunktion* $H(s)$ (kap.4)
   $\Rightarrow$ $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ (kap.4)

2. **Fourierserieutveckla källan** $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

3. Betrakta medelvärdet C_0 och varje delton separat (med **likströmsteori** resp. $j\omega$**-metoden**)

   RLC-nät = **LTI-system** $\Rightarrow$ **Summera delkomponenterna!!**

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n e^{jn\omega_0 t} = \hat{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_n \cos(n\omega_0 t + \hat{\theta}_n)$$

där $\hat{D}_n = D_n H(n\omega_0)$ och/alt. $\begin{cases} \hat{C}_0 = C_0 H(0) \\ \hat{C}_n = C_n \left|H(n\omega_0)\right| \end{cases}$, $\hat{\theta}_n = \theta_n + \arg H(n\omega_0)$

.

Behöver du repetera grunderna i elektriska kretsar?
Se examinatorns "Extra kursmaterial om elektriska kretsar" (9 sidor)
som kan laddas ned från kurswebbsidan