Signaler & System – Föreläsning 4:
Fouriertransformanalys av signaler och system

Stabilt energifritt LTI-system

$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}: h(t),\ H(\omega)} \longrightarrow y_{zs}(t) = (x * h)(t)$

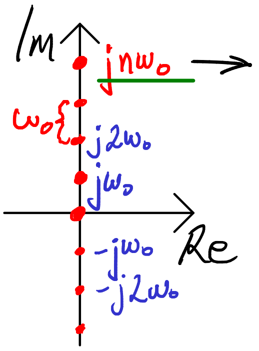
$x_n(t) \longrightarrow \qquad\qquad\qquad \longrightarrow y_n(t)$

$x(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t) \quad \xrightarrow{\text{Linjärt}} \quad y_{zs}(t) = \sum_n a_n \cdot y_n(t)$

- T_0 – periodisk insignal $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right)$:

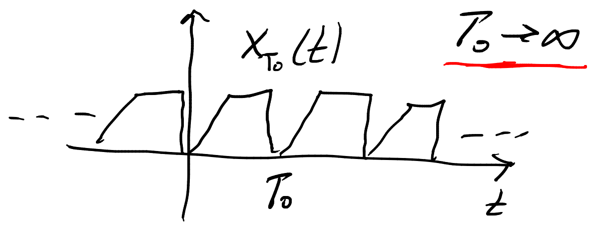
$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad \xrightarrow{\text{Linjärt}} \quad y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$

$\hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0)$

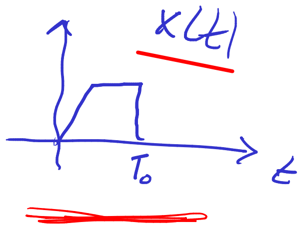


$jn\omega_0 \longrightarrow x_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

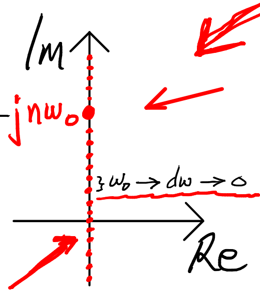


$T_0 \to \infty$



- Energisignal (icke-periodisk): $x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_0 \to d\omega \\ n\omega_0 \to \omega \\ \sum \to \int \\ T_0 D_n \to X(\omega) \end{cases}$$



dvs. $x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$

"$x_n(t)$"

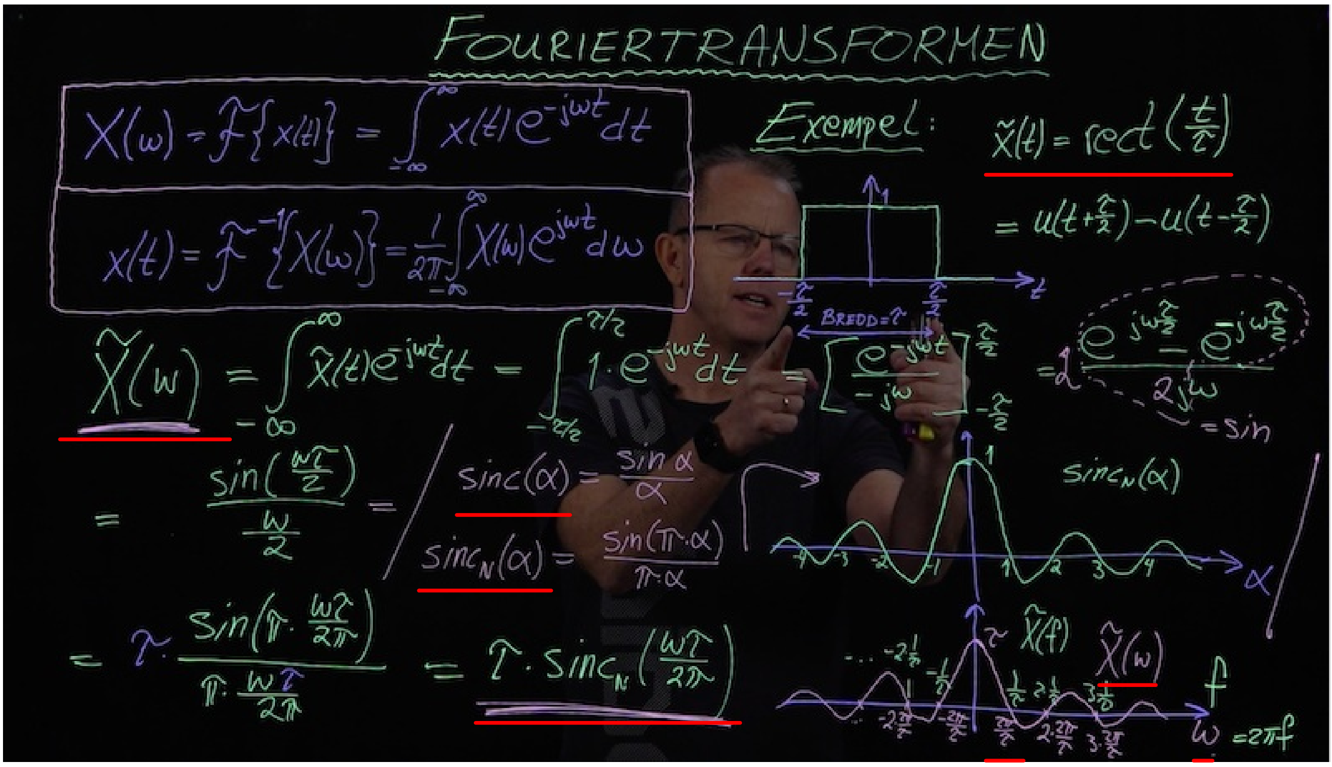
$$\downarrow$$

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \longrightarrow y_{zs}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \underbrace{\mathcal{H}\{e^{j\omega t}\}}_{= H(\omega) \cdot e^{j\omega t}} d\omega$

"a_n" $= \frac{1}{2\pi} X(\omega)\, d\omega$ $= \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(\omega) \cdot H(\omega)}_{= Y_{zs}(\omega) = ??} e^{j\omega t} d\omega$

Fouriertransformanalys av signaler



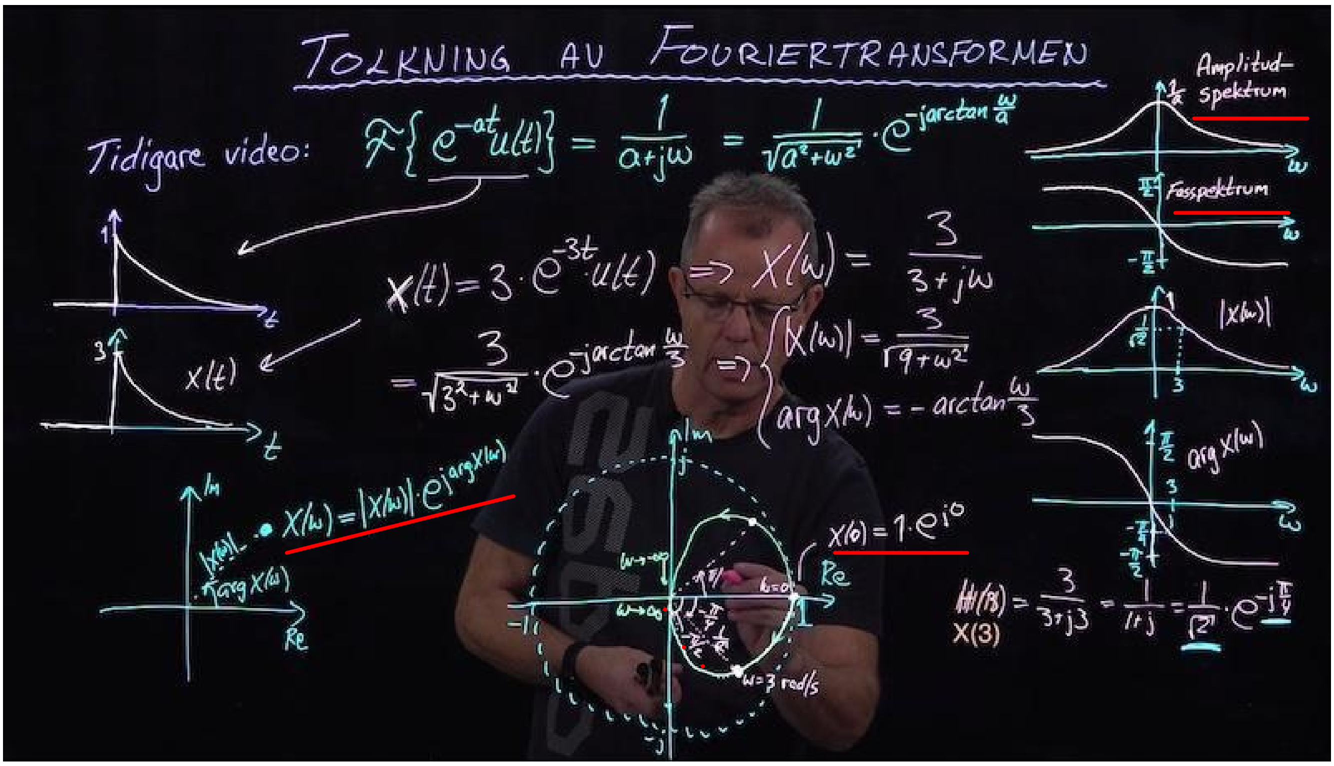
VIDEO 1

* Fouriertransformen av en fyrkantpuls (rect).
* Definition av sinc-funktionen.

$$\tilde{X}(f) = \tau \cdot \mathrm{sinc}_N\left(\frac{2\pi f \cdot \tau}{2\pi}\right) = \tau \cdot \mathrm{sinc}_N(f \cdot \tau)$$

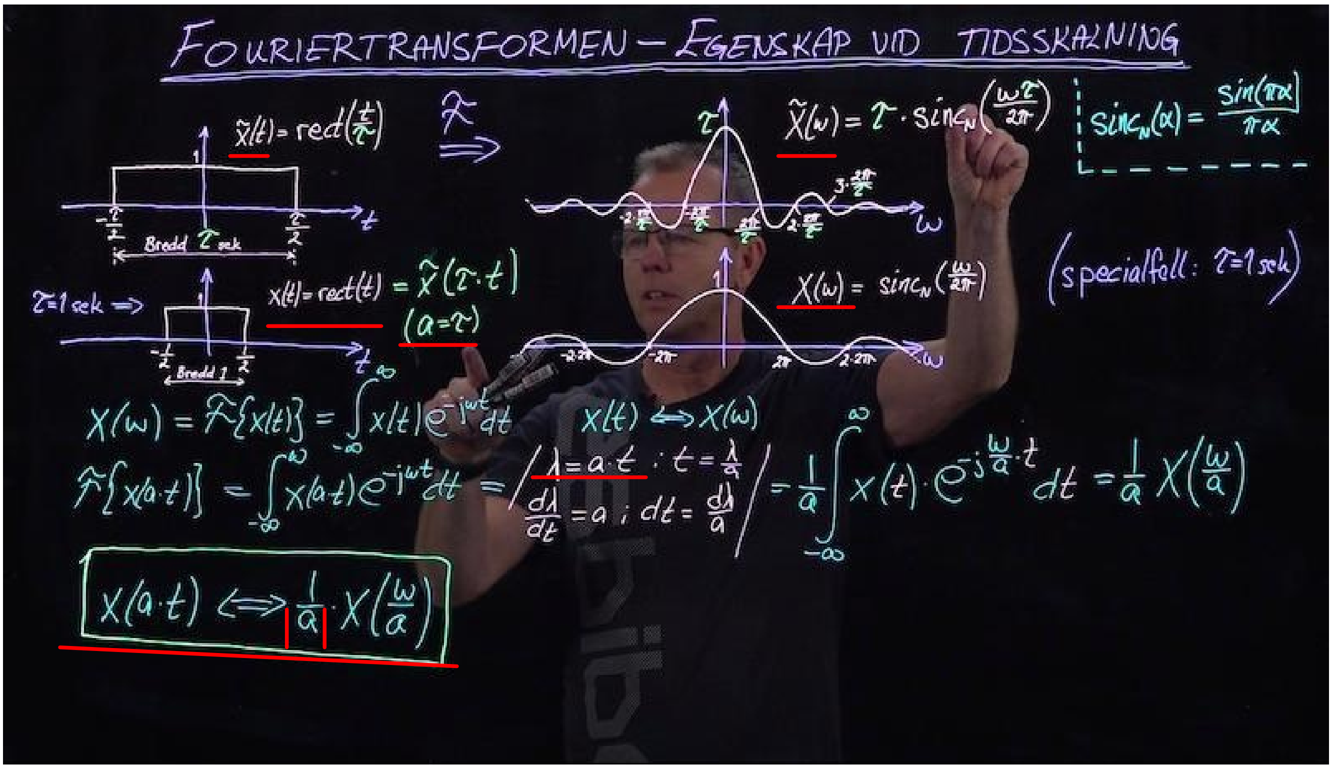
$$\boxed{X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$

$$\boxed{x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$



VIDEO 2

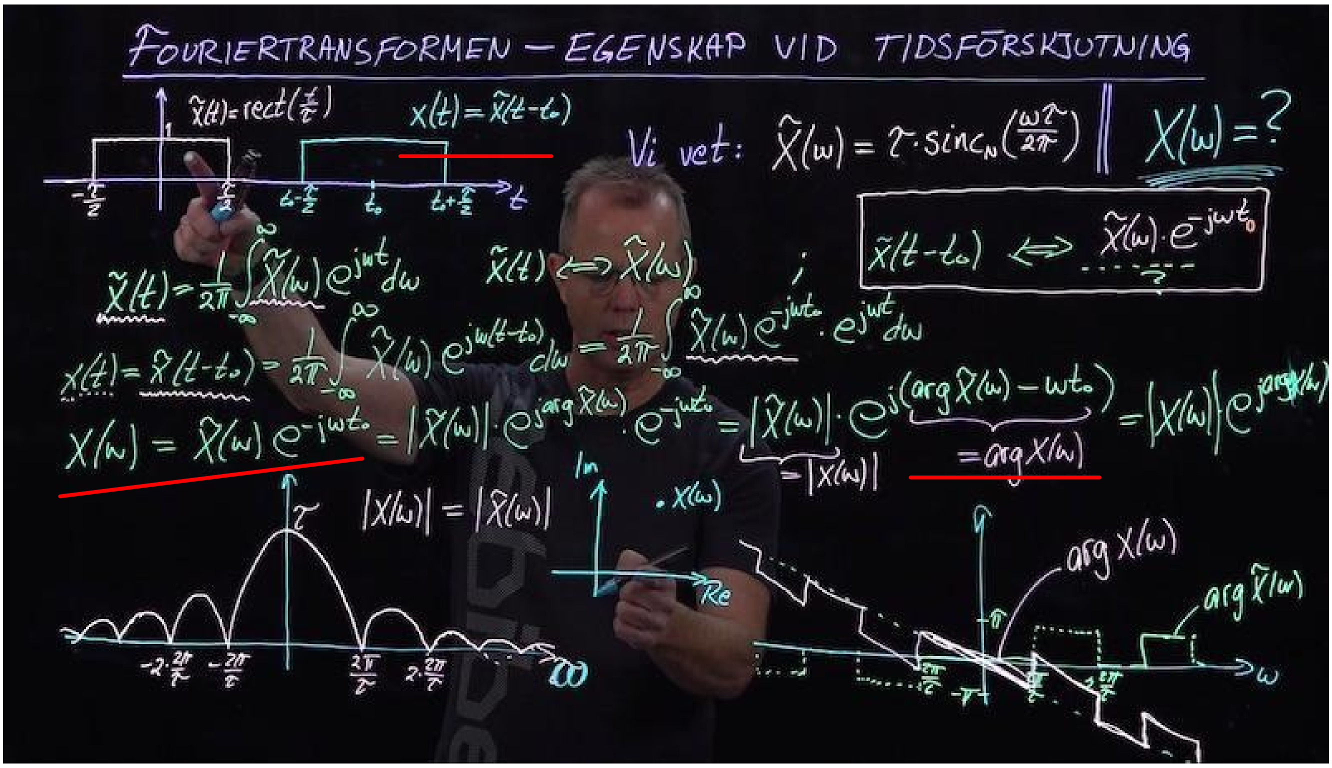
* Tolkning av fouriertransformen – amplitudspektrum & fasspektrum.
* Nyquistdiagrammet.



VIDEO 3

Fouriertransformens egenskap vid tidsskalning.

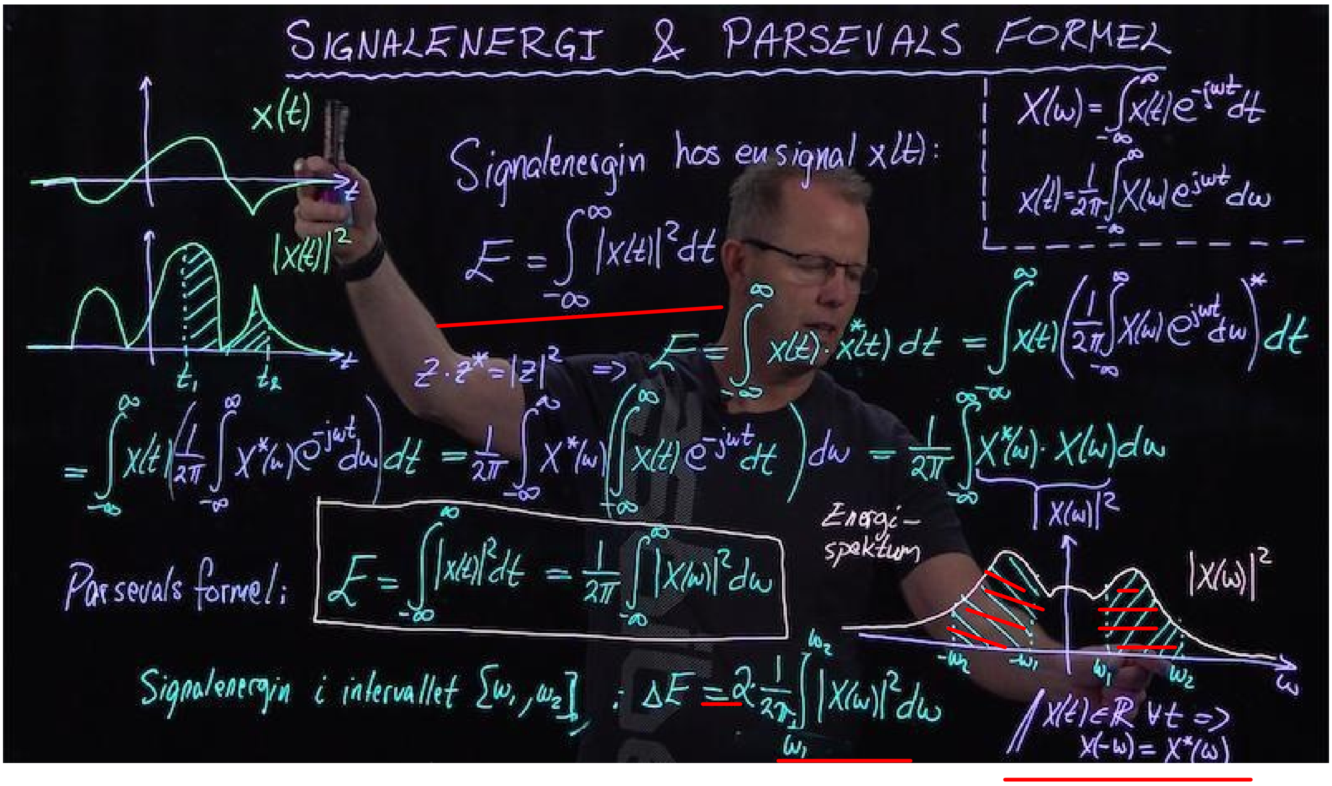
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Tidsskalning} \propto \dfrac{1}{\text{Frekvensskalning}}}$ Demonstration i Matlab!



VIDEO 4

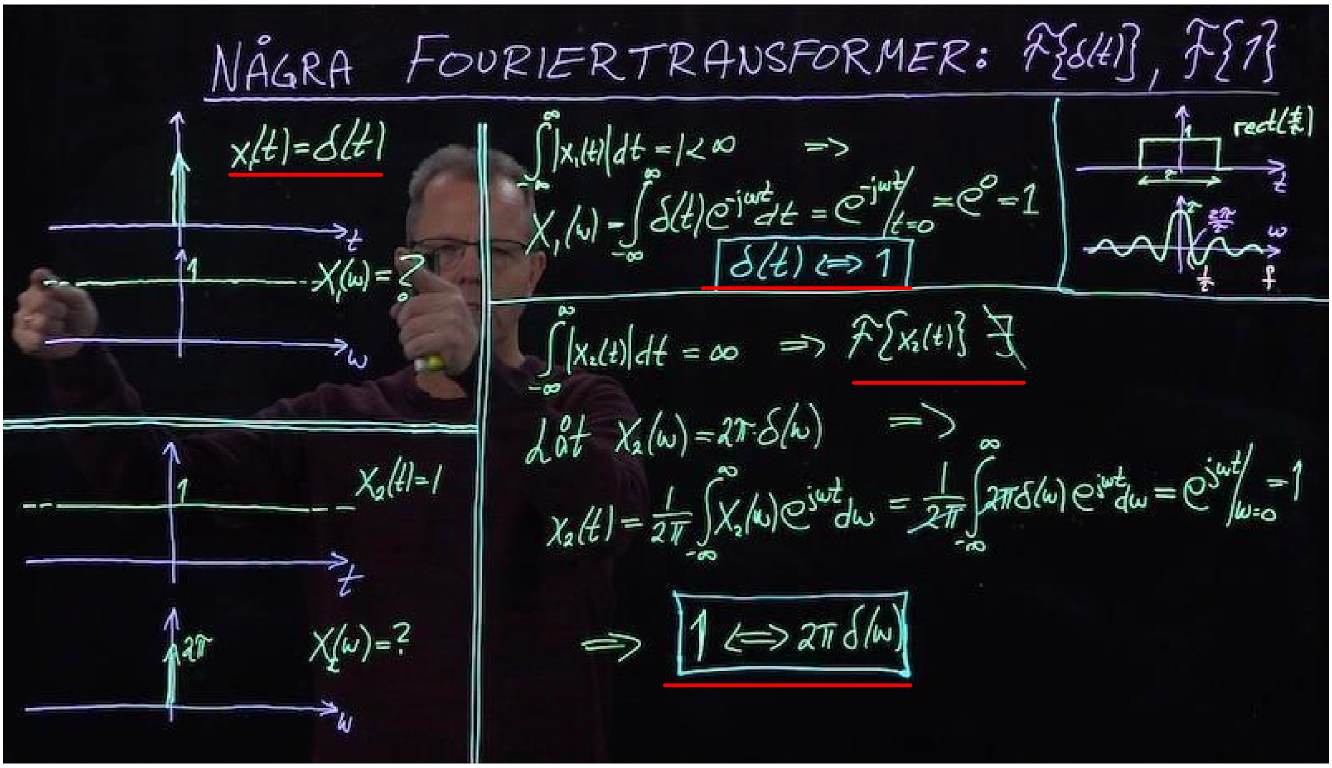
Fouriertransformens egenskap vid tidsförskjutning.

$\Rightarrow$ Påverkar bara fasspektrumet, inte amplitudspektrumet.



VIDEO 5

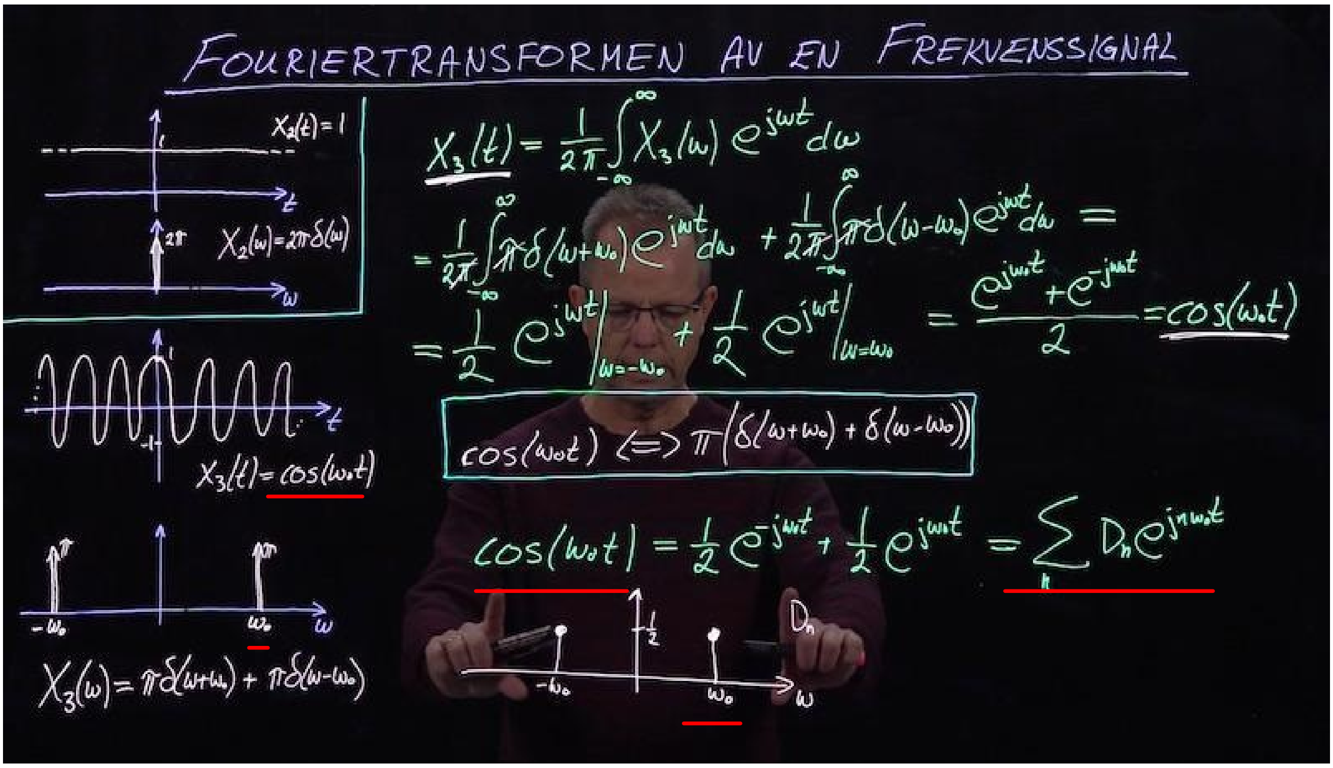
Energisignal, signalenergi och Parsevals formel.



VIDEO 6

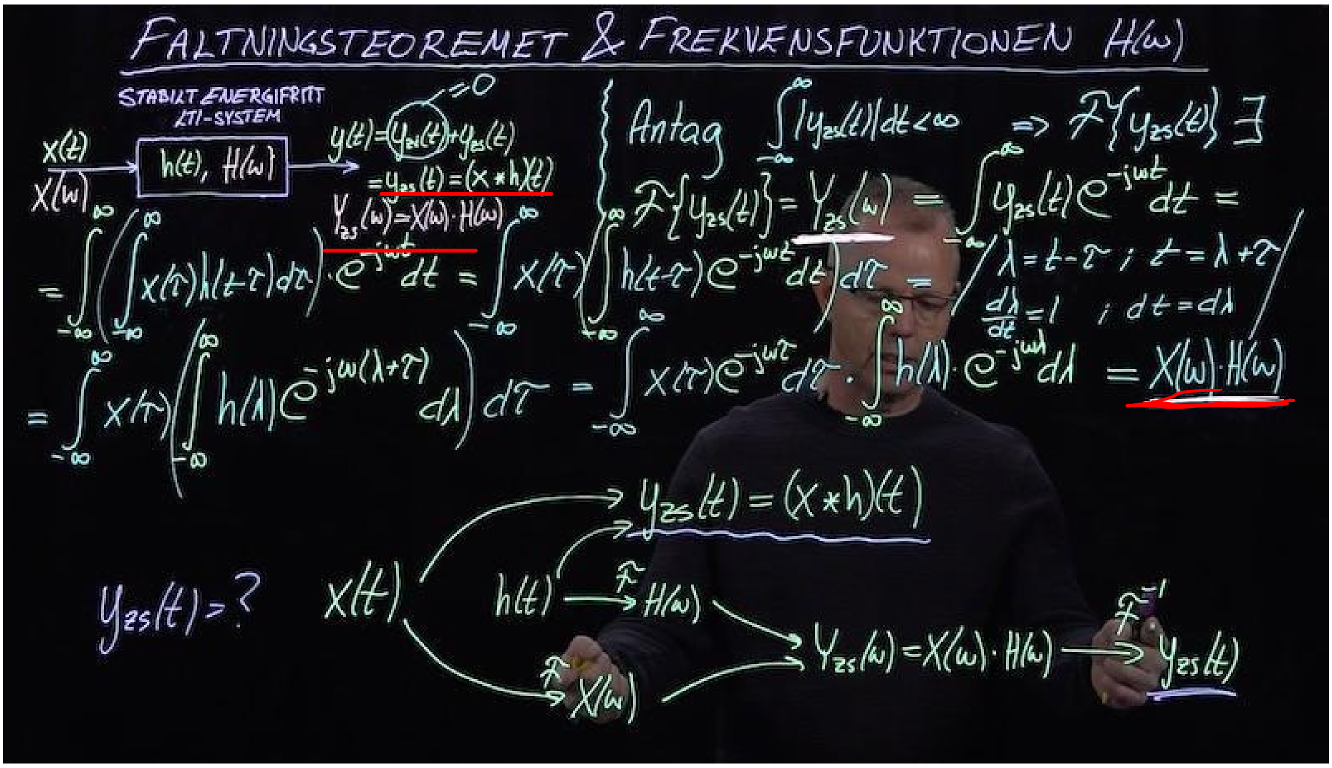
Fouriertransformen av en dirac-impuls och av en konstant.

VIDEO 7



Fouriertransformen av en cosinus & sinus samt
jämförelse med fourierserieutvecklingen av en cosinus.

Fouriertransformanalys av LTI-system



VIDEO 8

* Härledning av faltningsteoremet.
* Definition av frekvensfunktionen.
* Lösningsvägar för beräkning av utsignalen, i tidsdomänen eller via frekvensdomänen.

Stabilt energifritt LTI-system

$$x(t),\ X(\omega) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}:\ h(t),\ H(\omega)} \longrightarrow$$

$$y_{zs}(t) = (x*h)(t) = x(t)*h(t)$$

$$Y_{zs}(\omega) = X(\omega)\cdot H(\omega)$$

Alt: f f f

$$\text{Stabilt LTI-system} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty \Rightarrow H(\omega)\ \exists$$

$$\Rightarrow Y_{zs}(\omega)\ \exists \text{ för alla } x(t) \text{ där } X(\omega)\ \exists$$

$$\Rightarrow y_{zs}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y_{zs}(\omega)\}$$

Föreläsningens inledning:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \xrightarrow{LTI} y_{zs}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(\omega)\cdot H(\omega)}_{= Y_{zs}(\omega)\ \cancel{??}\ !} e^{j\omega t}\,d\omega$$

JA!

Jämför:

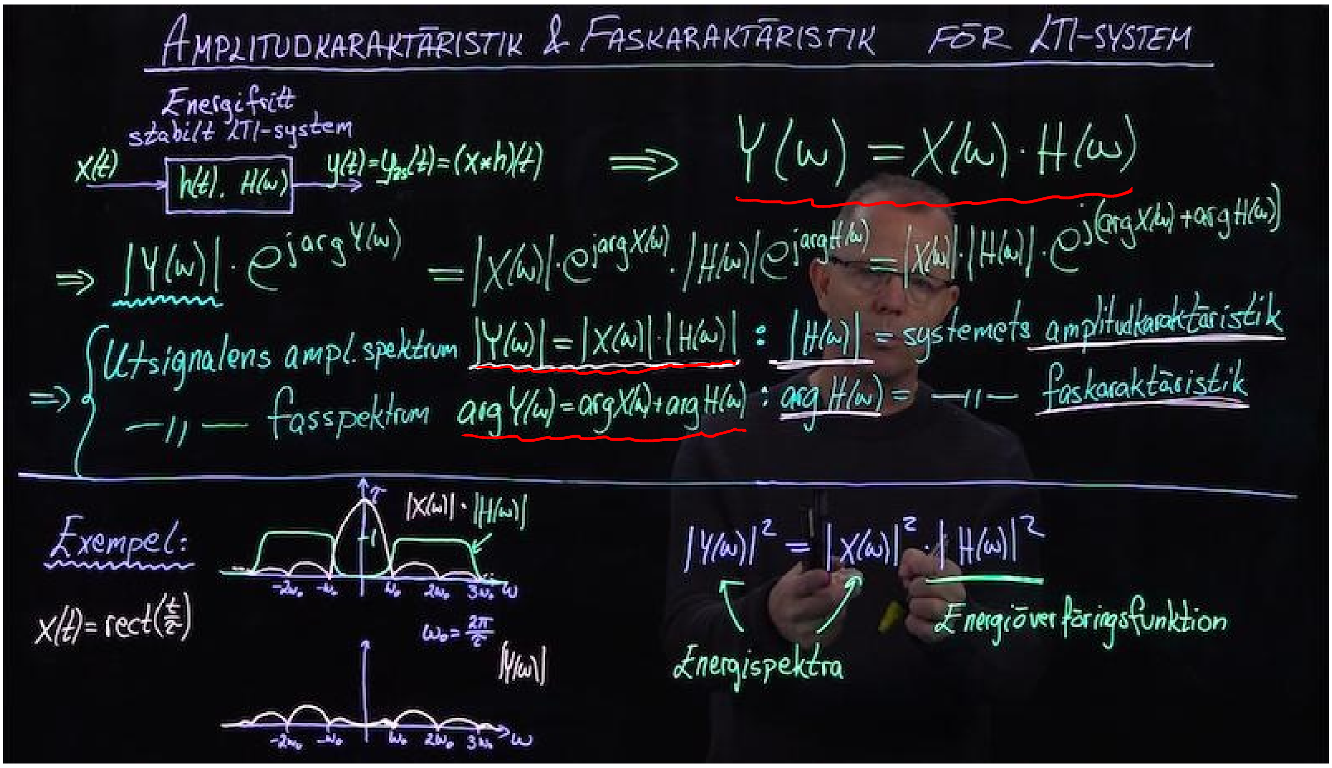
$$y_{zs}(t) = x(t) * h(t)$$

Faltning i tidsdomänen

$$\hat{D}_n = D_n \cdot H(n \cdot \omega_0)$$

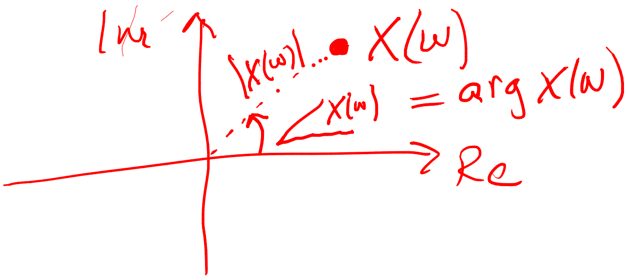
$$Y_{zs}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Multiplikation i frekvensdomänen



VIDEO 9

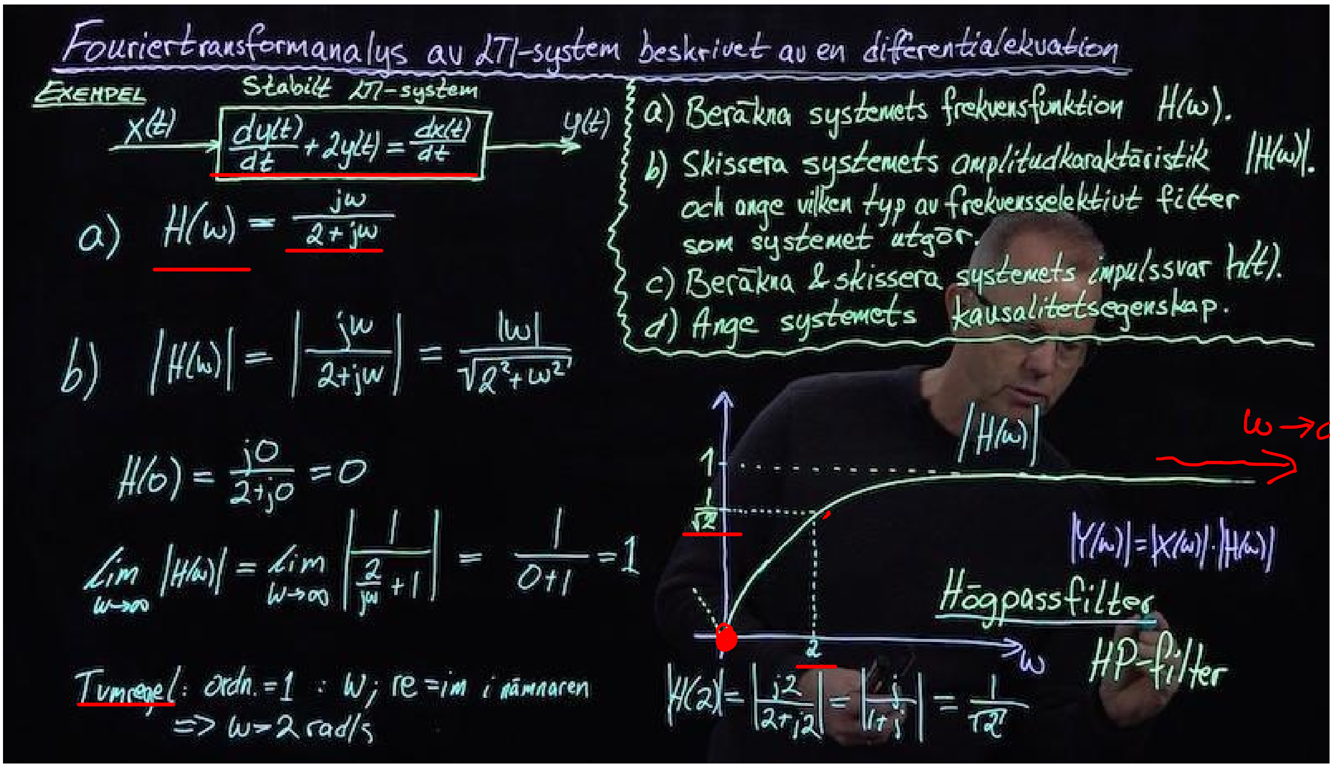
* Amplitudkaraktäristiken |H(w)| och faskaraktäristiken arg H(w) för LTI-system.
* Energispektrum för en signal & energiöverföringsfunktionen för LTI-system.



$$z = r \cdot e^{j\varphi}$$

$$X(\omega) = |X(\omega)| \cdot e^{j \arg X(\omega)}$$

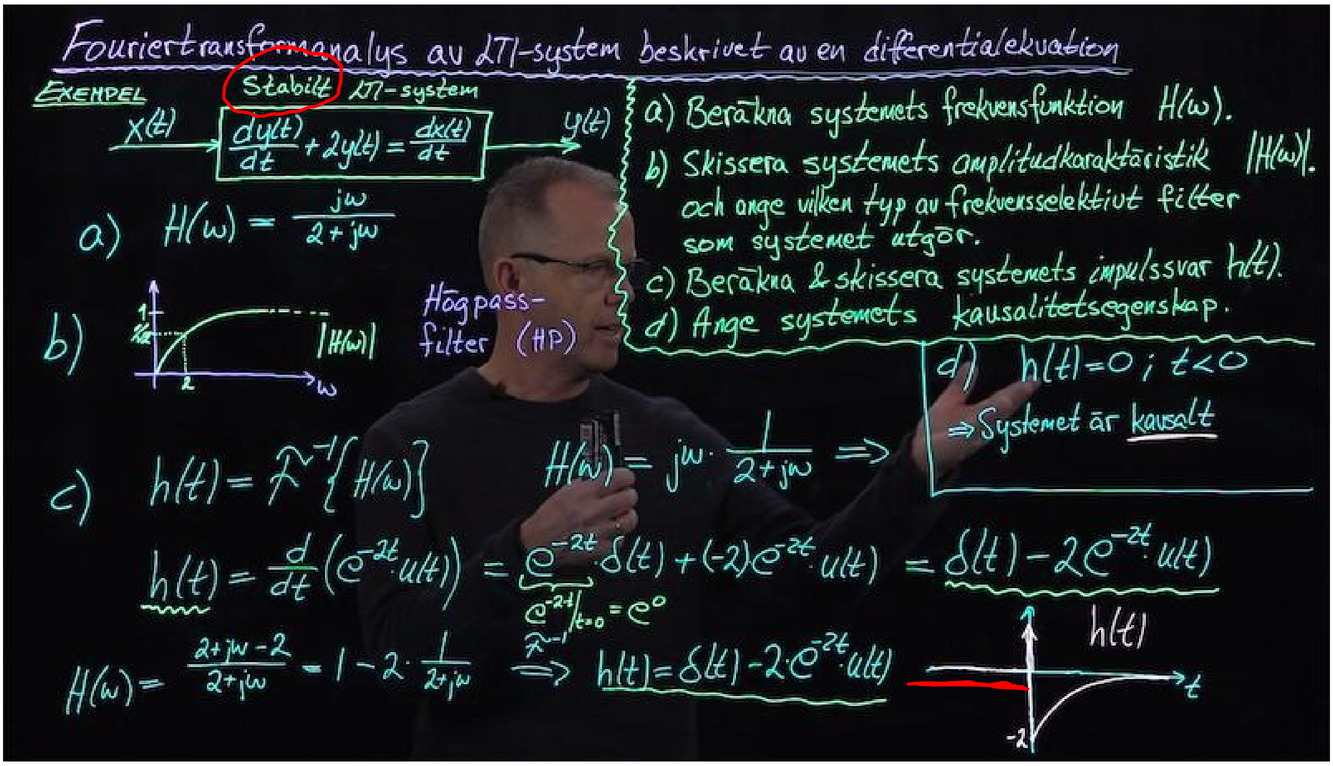
VIDEO 10



Ett räkneexempel: För ett LTI-system, där förhållandet mellan utsignalen och insignalen beskrivs av en differentialekvation, så visas följande för LTI-systemet.

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

a) Beräkna systemets frekvensfunktionen H(w).
b) Skissera systemets amplitudkaraktäristik |H(w)| och ange filtertyp.

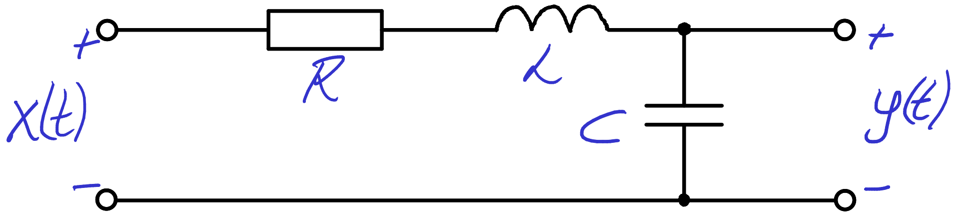


c) Beräkna och skissera systemets impulssvar h(t).
d) Ange systemets kausalitetsegenskap.

e) Stabilitet? $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$ OK!

Nästa föreläsning – ett större representativt räkneexempel:

(plus lite till – speciellt digital kommunikation amplitudmodulering som tillämpningsområde)



$R = 1\,\Omega$
$L = 1\,H$
$C = 1\,F$

a) Beräkna/bestäm LTI-systemets
   * frekvensfunktion $H(\omega)$
   * impulssvar $h(t)$, samt skissera detta.
   * kausalitetsegenskap & stabilitetsegenskap.
   * systembeskrivande differentialekvation.
   * ordning.
   * amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$

b) Skissera amplitudkaraktäristiken och ange/motivera vilken typ av frekvens-selektivt filter (LP, BP, HP osv.) det elektriska systemet utgör.

c) Beräkna utsignalen $y_1(t)$ då insignalen är

$$x_1(t) = 3 \cdot e^{-2t} \cdot u(t) \;\; [V]$$

och systemet är energifritt.

d) Beräkna utsignalen $y_2(t)$ då insignalen är

$$x_2(t) = 4 + 3\cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \;\; [V]$$

e) Beräkna systemets stegsvar $g(t)$