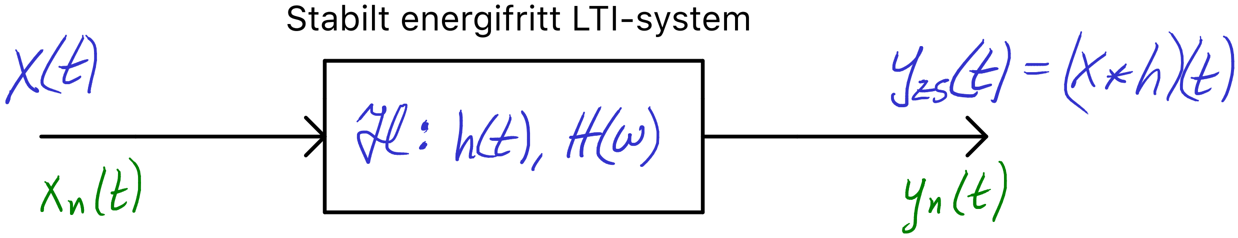
Signaler & System – Föreläsning 4:
Fouriertransformanalys av signaler och system

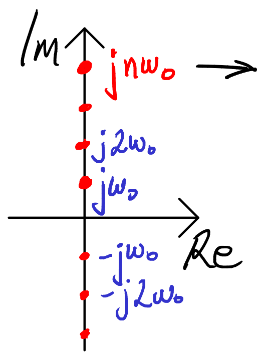


$$x(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t) \xrightarrow{\text{Linjärt}} y_{zs}(t) = \sum_n a_n \cdot y_n(t)$$

- T_0 – periodisk insignal $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right)$:

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \xrightarrow{\text{Linjärt}} y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$\hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0)$$



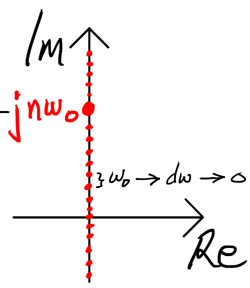
$$jn\omega_0 \rightarrow x_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$$

- Energisignal (icke-periodisk): $x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} x_{T_0}(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_0 \rightarrow d\omega \\ n\omega_0 \rightarrow \omega \\ \sum \rightarrow \int \\ T_0 D_n \rightarrow X(\omega) \end{cases}$$

$j\omega_0 \leftarrow jn\omega_0$

"$x_n(t)$" $= e^{j\omega t}$

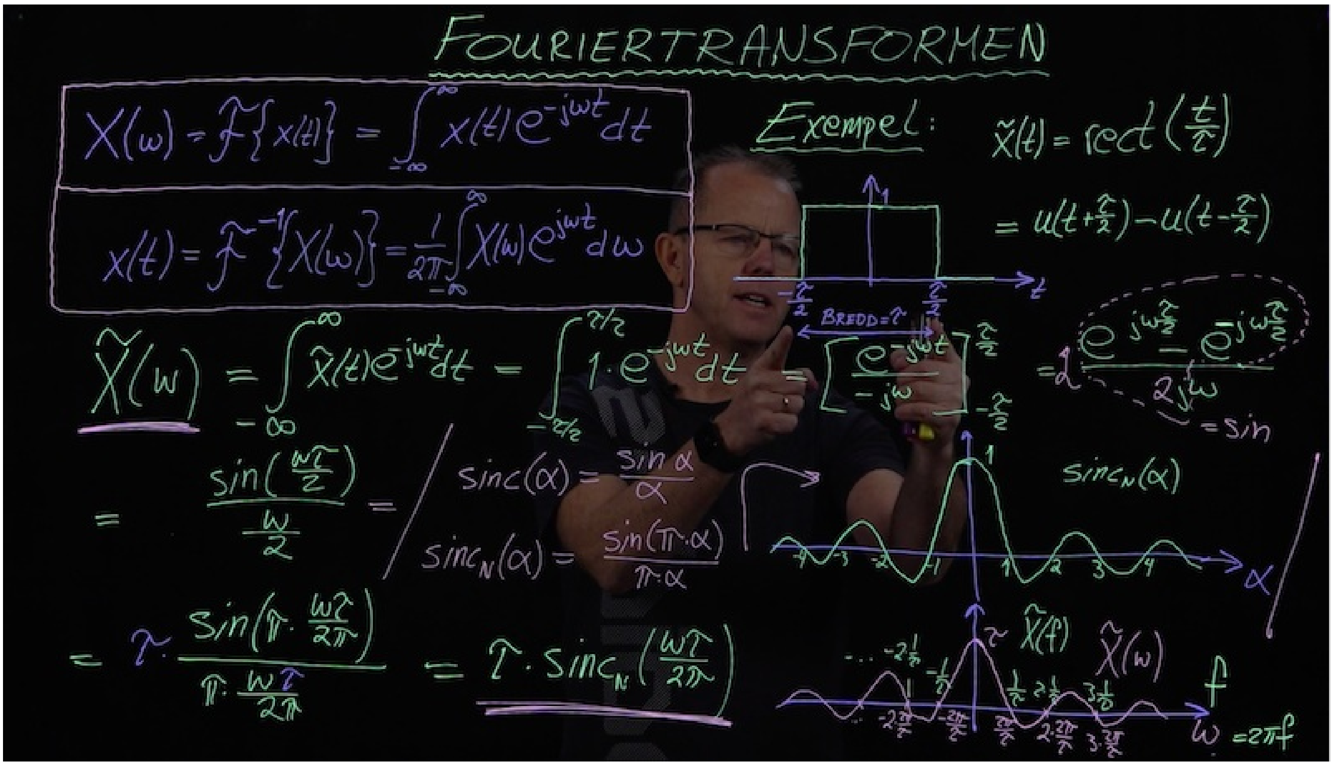


dvs. $x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$

$$\downarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

Fouriertransformanalys av signaler

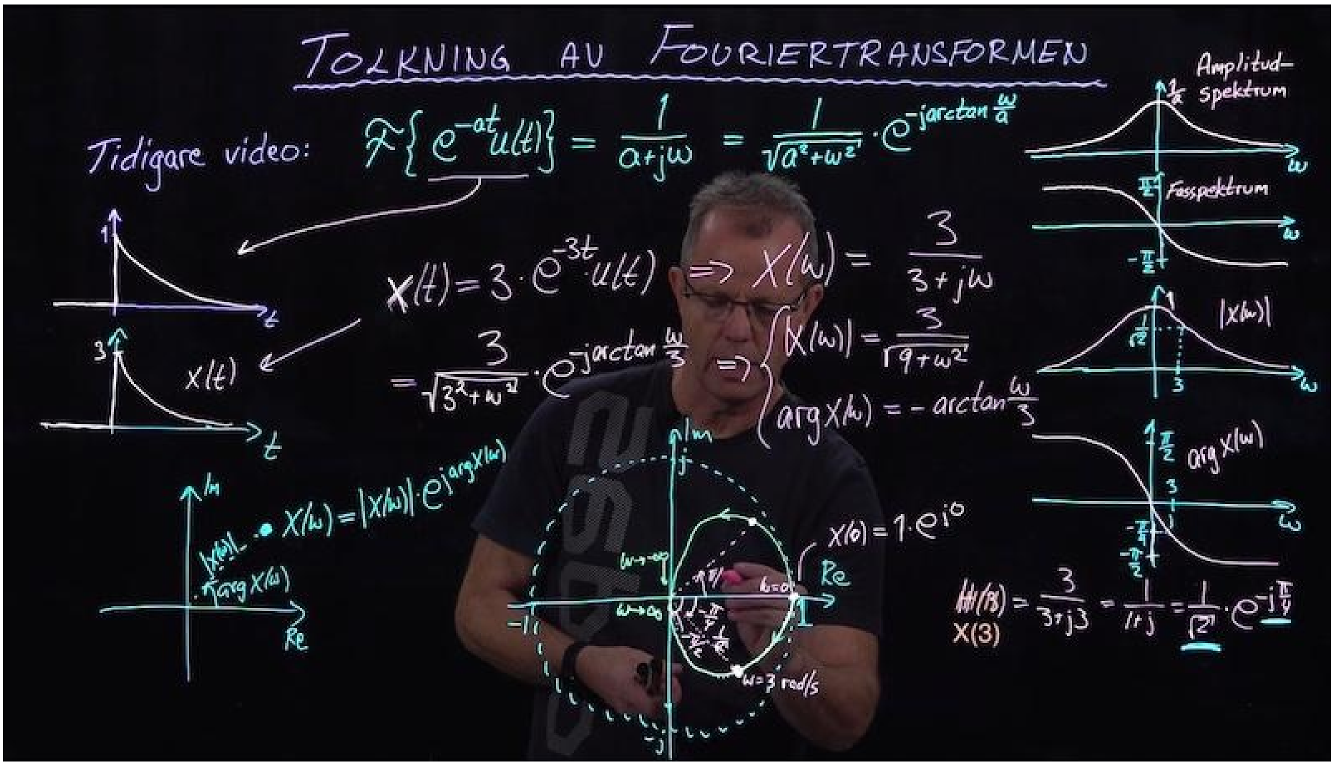


VIDEO 1

* Fouriertransformen av en fyrkantpuls (rect).
* Definition av sinc-funktionen.

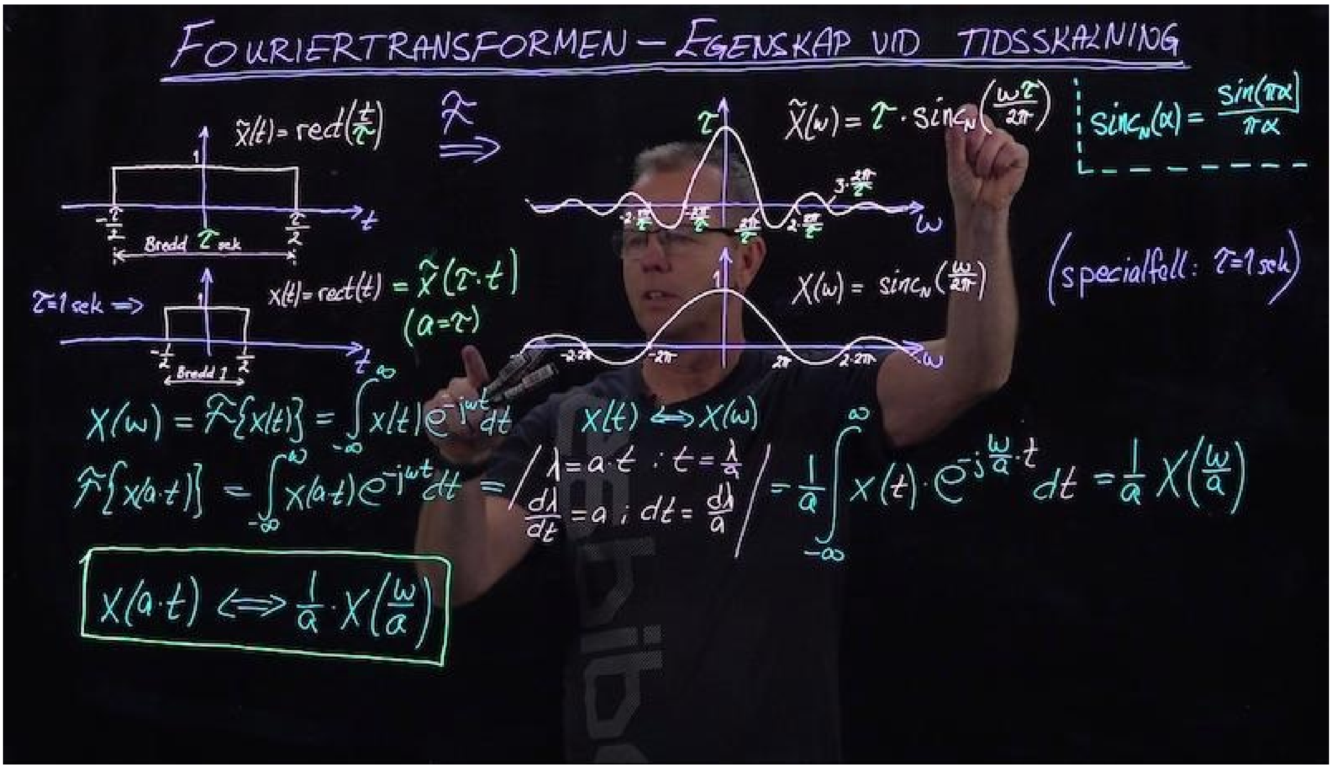
$$\boxed{X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt}$$

$$\boxed{x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$



VIDEO 2

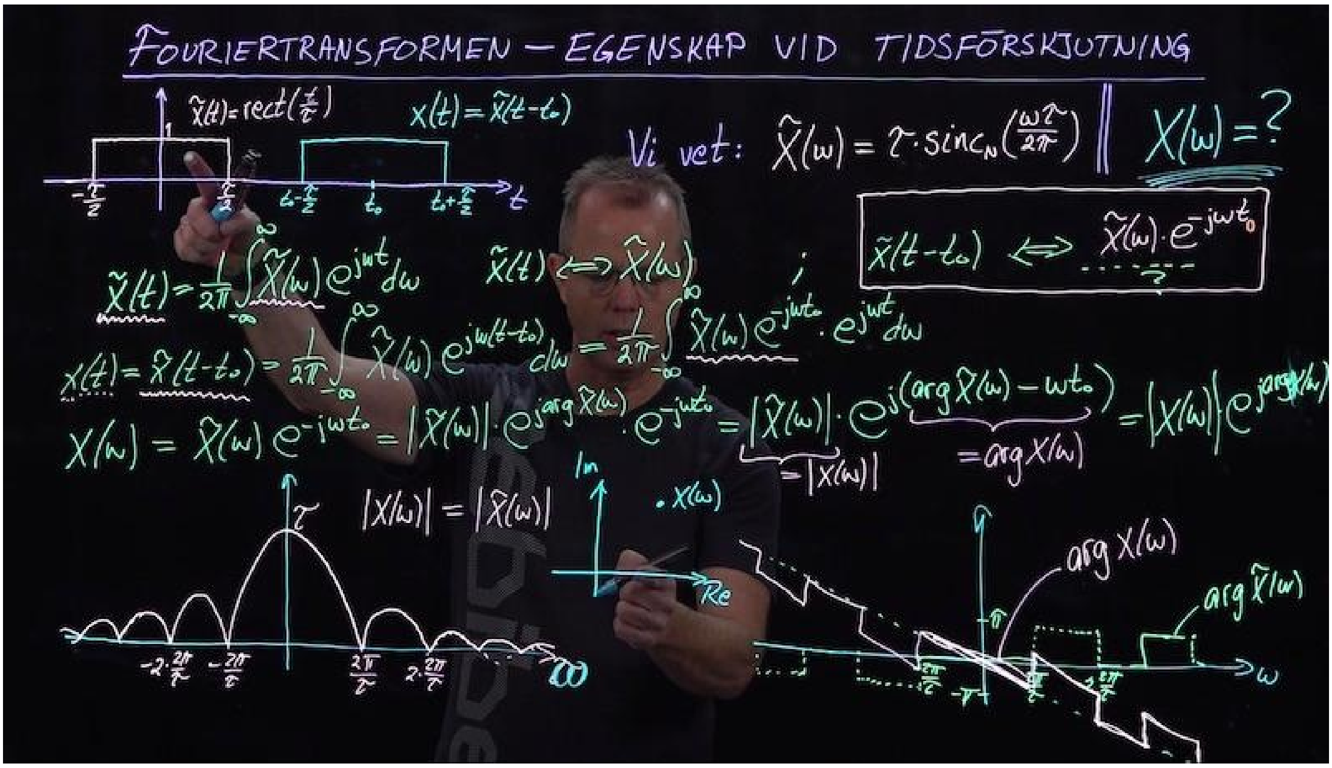
* Tolkning av fouriertransformen – amplitudspektrum & fasspektrum.
* Nyquistdiagrammet.



VIDEO 3

Fouriertransformens egenskap vid tidsskalning.

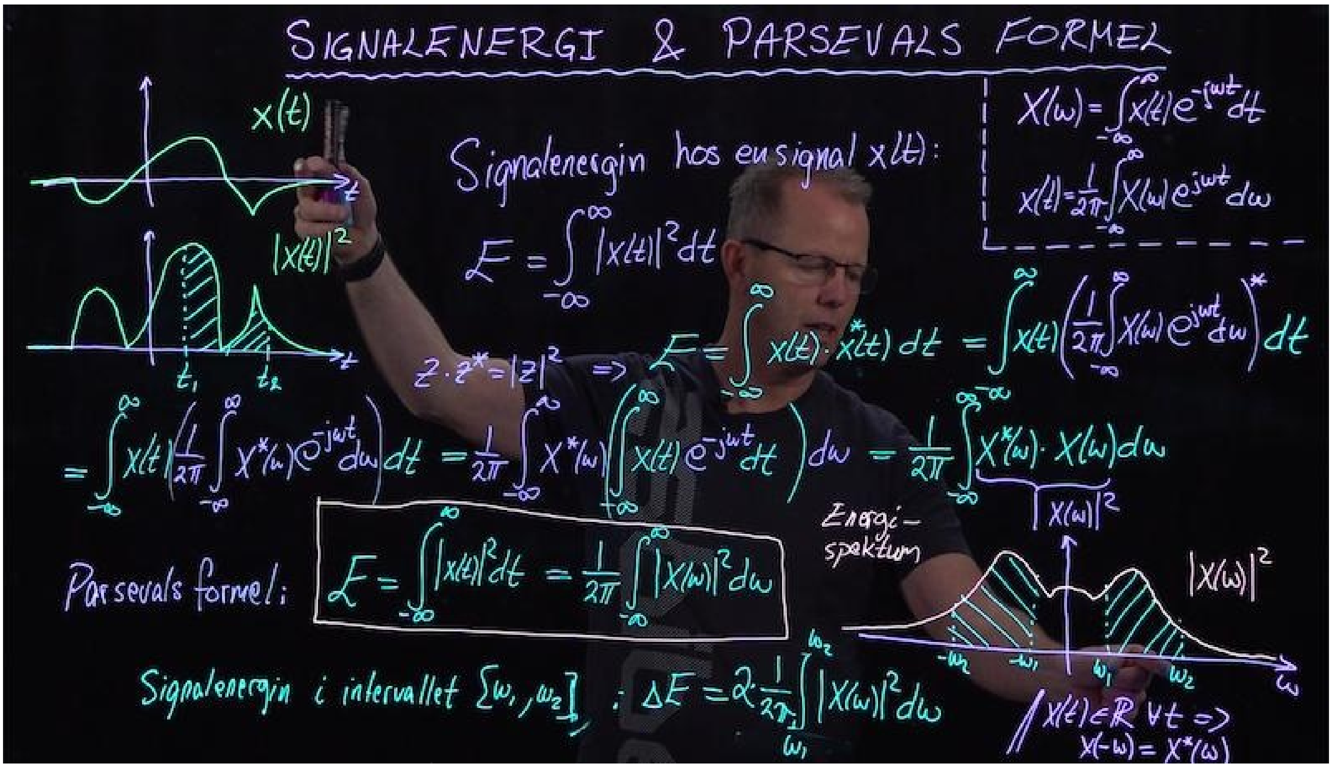
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Tidsskalning} \propto \dfrac{1}{\text{Frekvensskalning}}}$ Demonstration i Matlab!



VIDEO 4

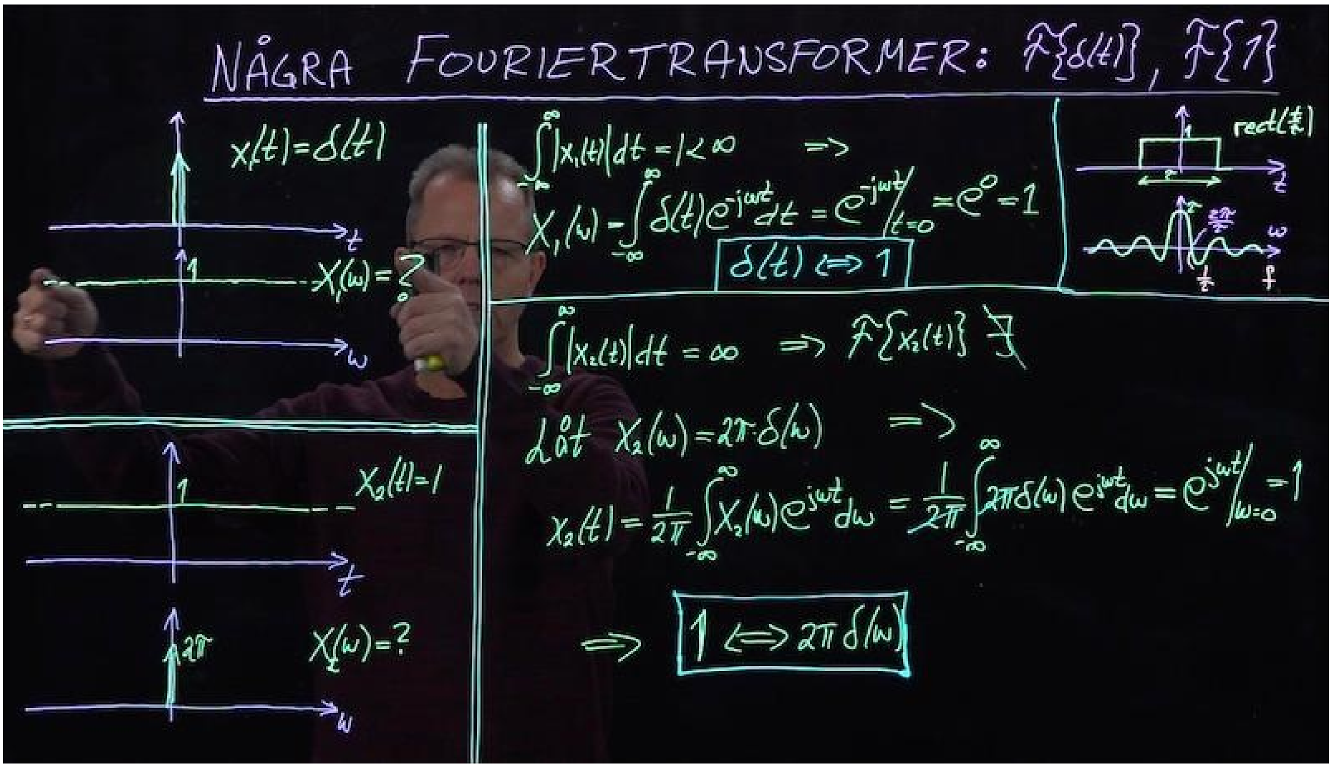
Fouriertransformens egenskap vid tidsförskjutning.

$\Rightarrow$ Påverkar bara fasspektrumet, inte amplitudspektrumet.



VIDEO 5

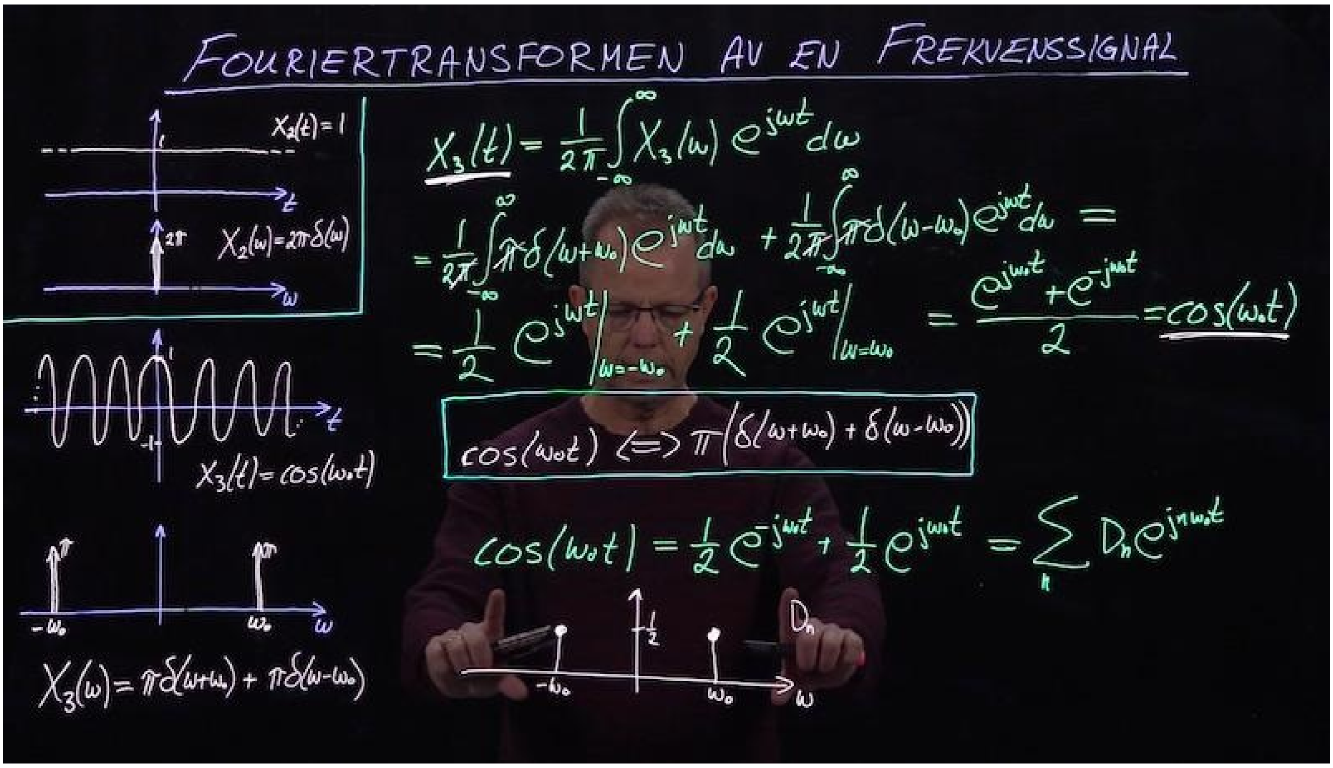
Energisignal, signalenergi och Parsevals formel.



VIDEO 6

Fouriertransformen av en dirac-impuls och av en konstant.

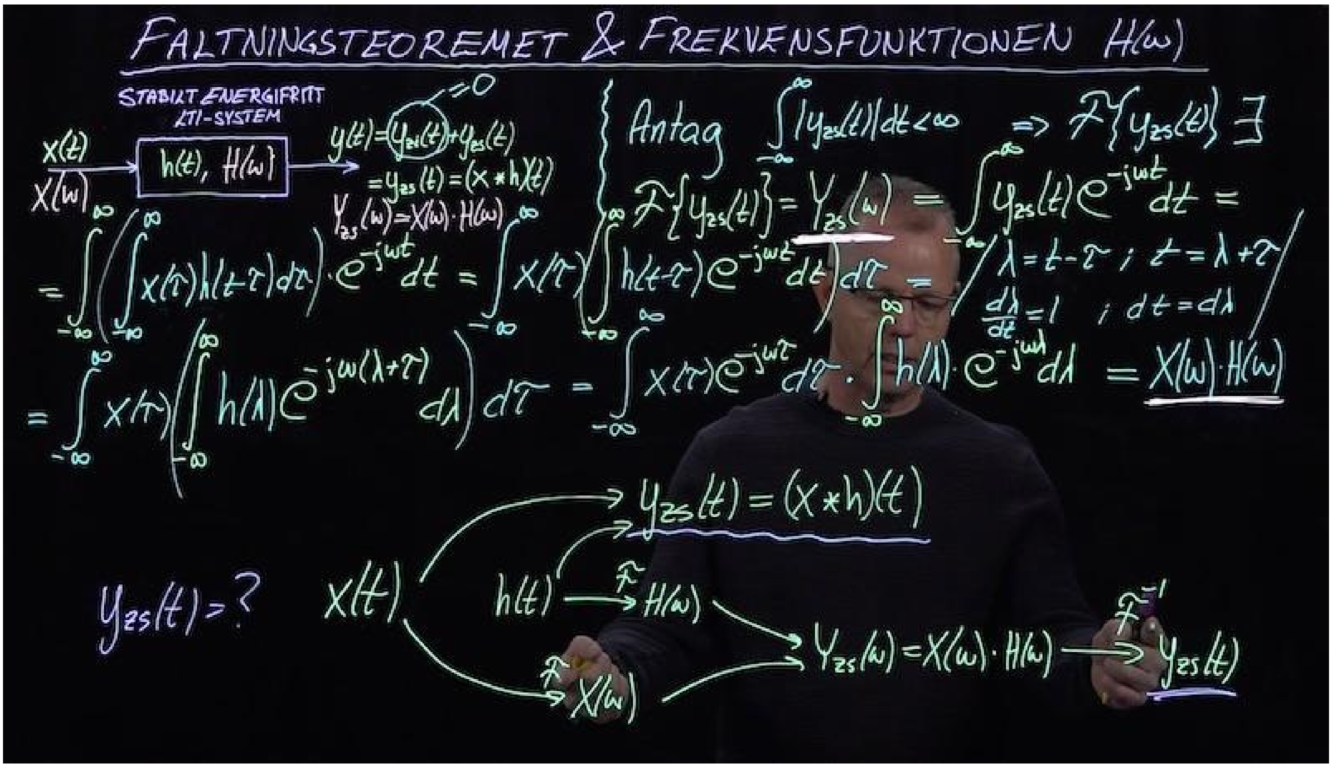
VIDEO 7



Fouriertransformen av en cosinus & sinus samt
jämförelse med fourierserieutvecklingen av en cosinus.

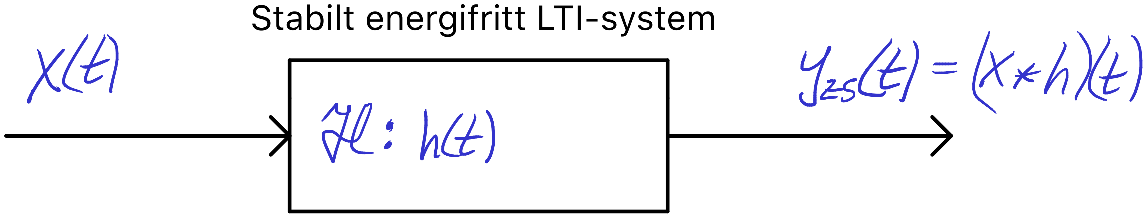
Fouriertransformanalys av LTI-system

VIDEO 8

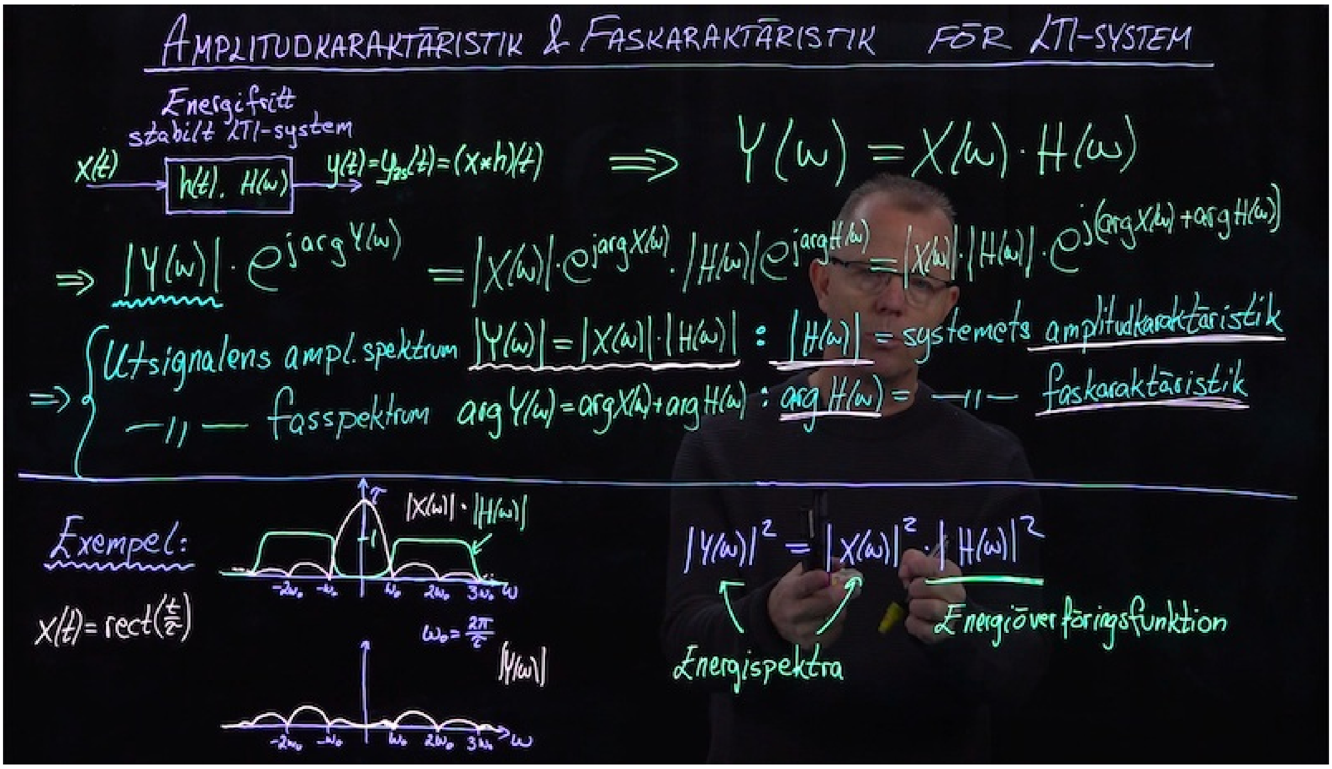


* Härledning av faltningsteoremet.
* Definition av frekvensfunktionen.
* Lösningsvägar för beräkning av utsignalen, i tidsdomänen eller via frekvensdomänen.

Stabilt energifritt LTI-system

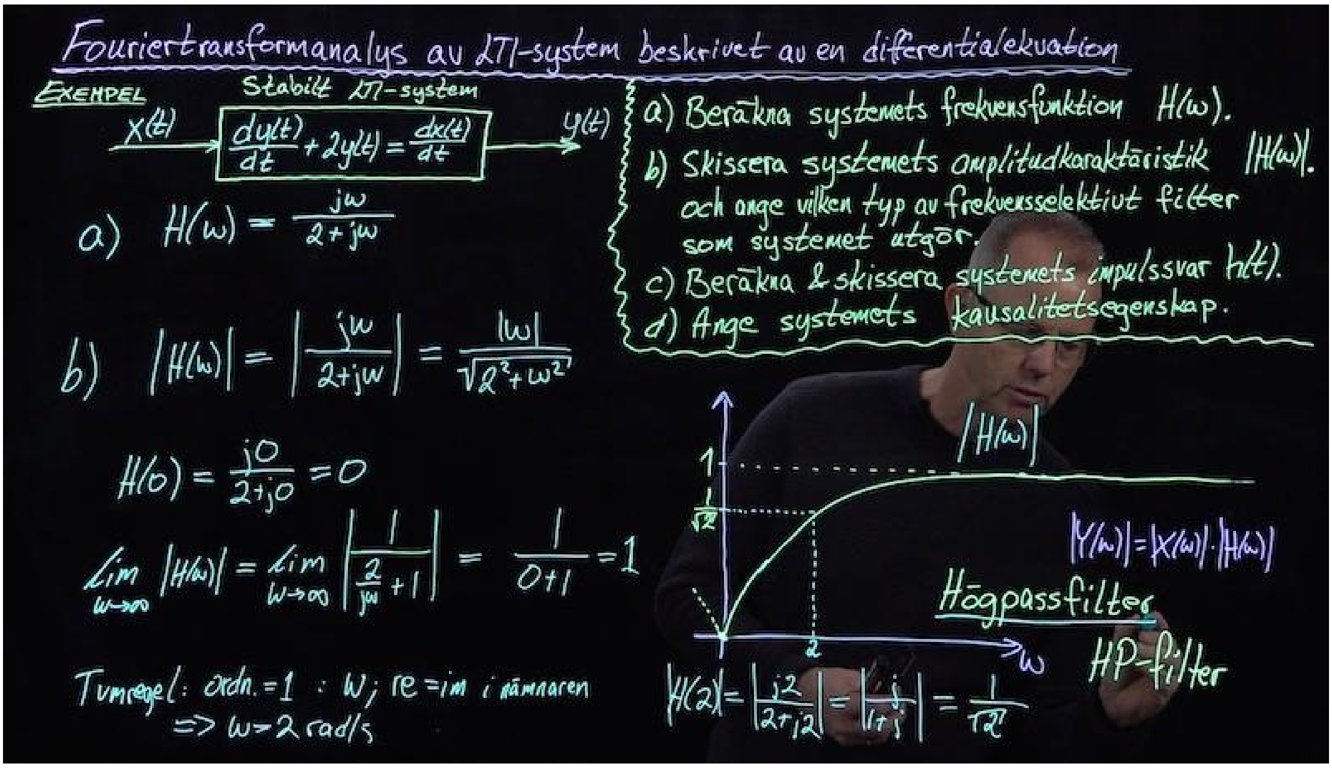


VIDEO 9



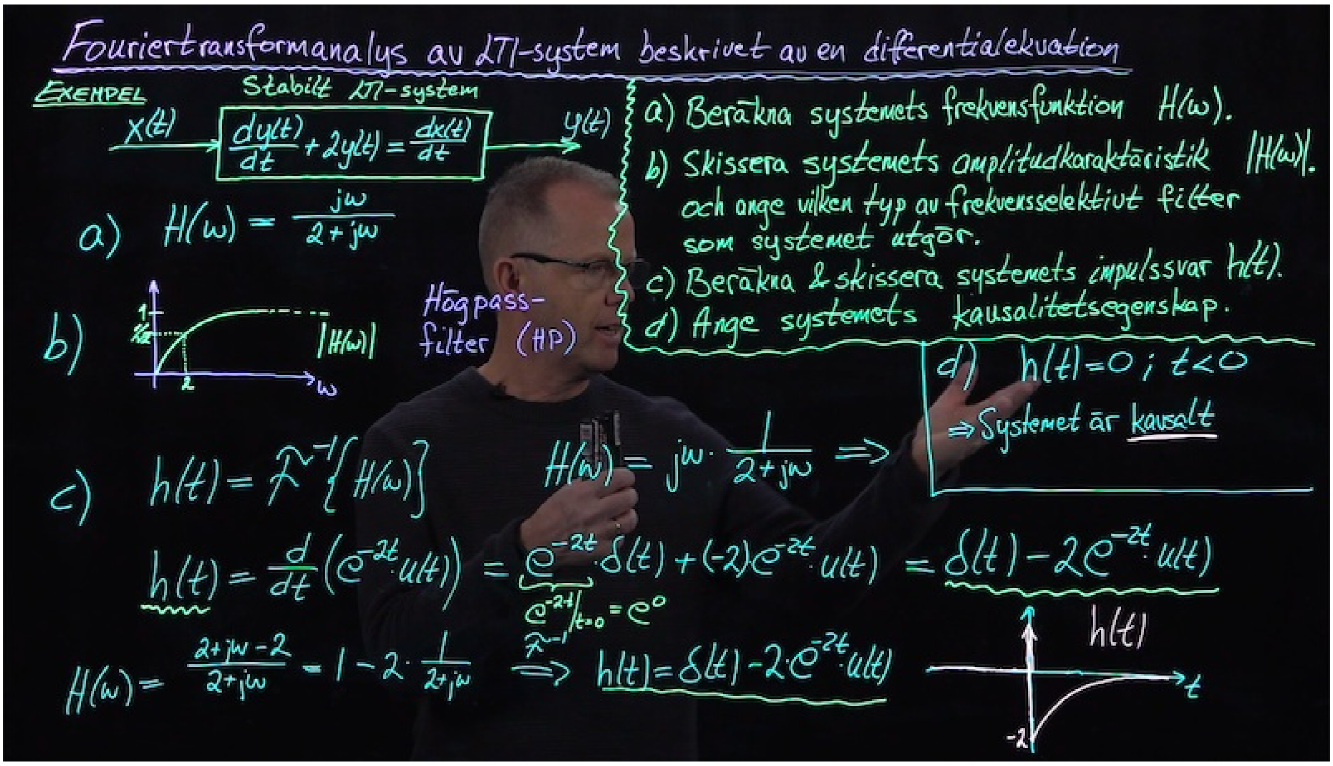
* Amplitudkaraktäristiken |H(w)| och faskaraktäristiken arg H(w) för LTI-system.
* Energispektrum för en signal & energiöverföringsfunktionen för LTI-system.

VIDEO 10



Ett räkneexempel: För ett LTI-system, där förhållandet mellan utsignalen och insignalen beskrivs av en differentialekvation, så visas följande för LTI-systemet.

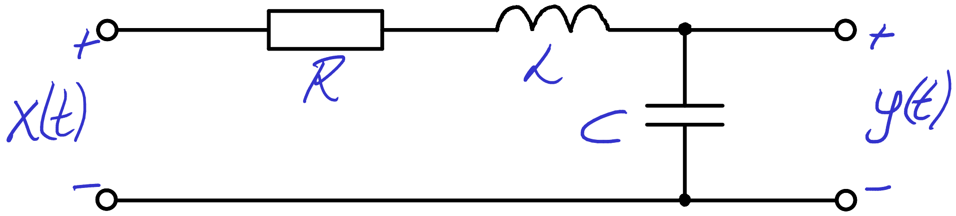
a) Beräkna systemets frekvensfunktionen H(w).
b) Skissera systemets amplitudkaraktäristik |H(w)| och ange filtertyp.



c) Beräkna och skissera systemets impulssvar h(t).
d) Ange systemets kausalitetsegenskap.

Nästa föreläsning – ett större representativt räkneexempel:

(plus lite till – speciellt digital kommunikation amplitudmodulering som tillämpningsområde)



$R = 1\,\Omega$
$L = 1\,H$
$C = 1\,F$

a) Beräkna/bestäm LTI-systemets
   * frekvensfunktion $H(\omega)$
   * impulssvar $h(t)$, samt skissera detta.
   * kausalitetsegenskap & stabilitetsegenskap.
   * systembeskrivande differentialekvation.
   * ordning.
   * amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$

b) Skissera amplitudkaraktäristiken och ange/motivera vilken typ av frekvens-selektivt filter (LP, BP, HP osv.) det elektriska systemet utgör.

c) Beräkna utsignalen $y_1(t)$ då insignalen är
$x_1(t) = 3 \cdot e^{-2t} \cdot u(t)$ [V]
och systemet är energifritt.

d) Beräkna utsignalen $y_2(t)$ då insignalen är
$x_2(t) = 4 + 3\cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right)$ [V]

e) Beräkna systemets stegsvar $g(t)$