

Signaler & System – Föreläsning 7: DFT – Diskret Fourier Transform

Del 1

DFT – DISKRETA FOURIERTRANSFORMEN

IKKE-PERIODISK

KONTINUERLIG

DISKRET

FT

S

P

PERIODISK

PERIODISK

Periodisering

Alternativ $\bar{X}(\omega)$:

$\bar{X}(\omega) = \mathcal{F}\{\bar{x}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-nT)\right\}$

$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \mathcal{F}\{\delta(t-nT)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega nT}$

$\bar{X}(\omega + \omega_s) = \sum_n x[n] \cdot e^{-j(\omega + \omega_s)nT} = \sum_n x[n] e^{-j\omega nT} \cdot e^{-j\omega_s nT} = \sum_n x[n] e^{-j\omega nT} \cdot (e^{-j2\pi})^n = \sum_n x[n] e^{-j\omega nT} = \bar{X}(\omega)$

$x(t)$

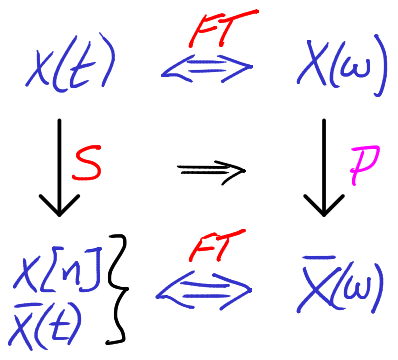
Sample T

$x[n]$

$X(\omega)$

$\bar{X}(\omega)$

$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T} \propto \frac{1}{\text{sampelper.}}$



Sampling av $x(t)$ till $x[n] = x(nT)$, vilket resulterar i en periodisering av $X(\omega)$ till $\bar{X}(\omega)$, med period $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. $\omega_s \propto \frac{1}{T}$

(Perioden \propto $\frac{1}{\text{Sampelperioden}}$)

DFT - DISKRETA FOURIERTRANSFORMEN

Del 2

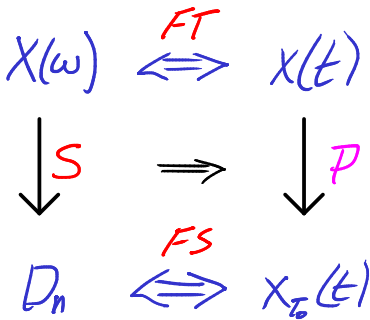
ICKE-PERIODISK PERIODISK
 KONTINUERLIG DISKRET
 $X(t) \xrightarrow{FT} X(\omega)$
 $X(\omega) \xrightarrow{S} X[n]$
 $X[n] \xrightarrow{D_n} X_T(t)$
 $X_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - mT_0)$
 $D_n = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0)$
 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$
 Periodtid $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_s} \propto \frac{1}{\text{sampelpr}$
 $D_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

Spektersamplingsteoremet:
 Låt $x(t)$ vara en tidsbegränsad signal med tidsutbredning τ , vars spektrum $X(\omega)$ samplas med samplingsakten $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_s}$ sampel/Hz, vilket ger $X(n\omega_0)$, där $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_s$.
 Om $T_0 > \tau$ så kan $X(\omega)$ återskapas från $X(n\omega_0)$.

$$T_0 > \tau$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$< \frac{2\pi}{\tau}$$



Sampling av $X(\omega)$ till $D_n = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0)$, vilket resulterar i en periodisering av $x(t)$ till $x_{T_0}(t)$, med period $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. $T_0 \propto \frac{1}{\omega_0}$

$x[n] = x(nT) \Rightarrow \bar{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT)$
 $\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$

1. Sampla
2. Periodiskt
I. Sampla (& ampl.skala)
II. Periodiskt

$f_s > 2B$
 ÖV: $f_s \gg 2B$

DFT - DISKRETA FOURIERTRANSFORMEN

$$D_r = \frac{1}{T} X(\omega_0)$$

KONTINUERLIG PERIODISK $X(t)$ \xrightarrow{FT} $X(\omega)$

DISKRET PERIODISK X_n \xrightarrow{DFT} X_r

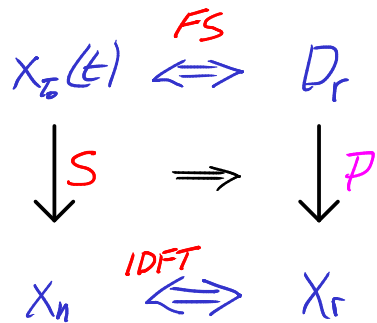
Sampling med N_0 sampel/period
 $T_0 = T \cdot N_0$

$X_n = X_{T_0}(nT) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} D_r \cdot e^{j\omega_r nT} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} D_r \cdot e^{j\Omega_0 n}$
 $\Omega_0 = \omega_0 T = \frac{2\pi}{T_0}$

$X_r = N_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{r-mN_0}$

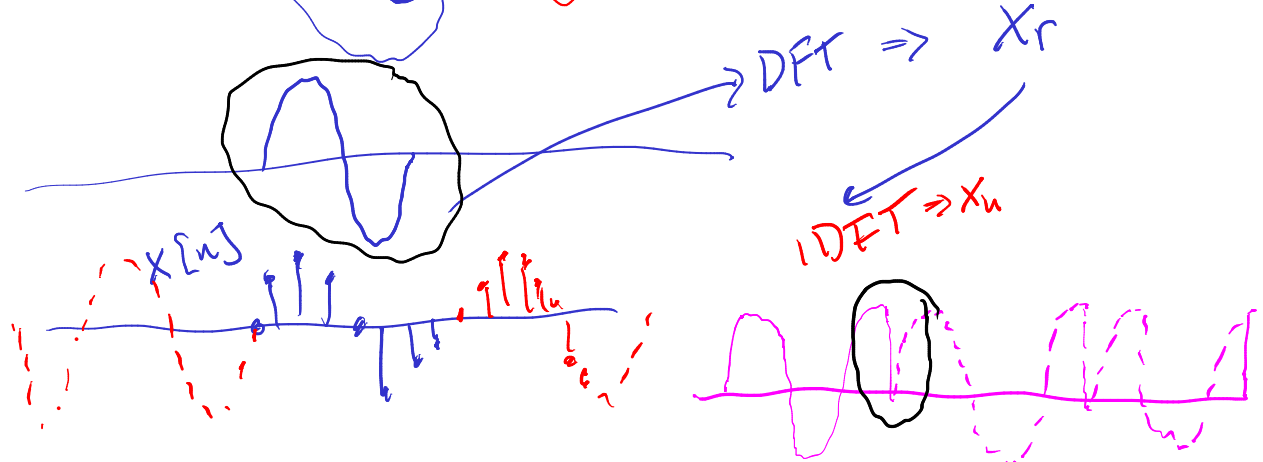
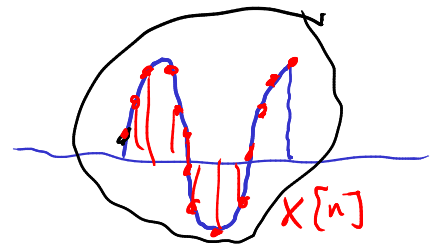
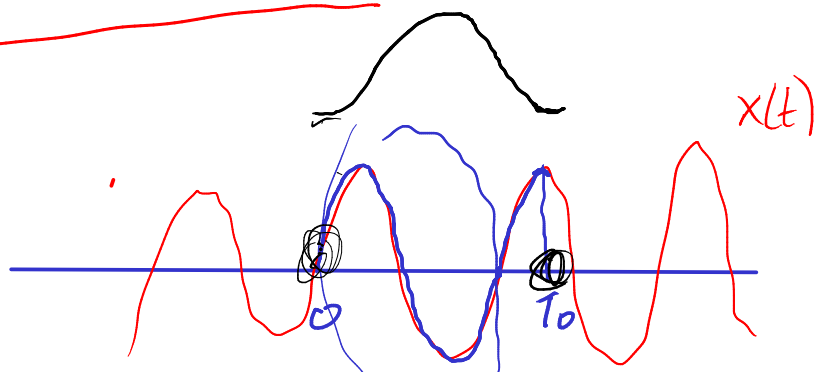
$X_n = \sum_{r=N_0}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} D_{r-mN_0} \right) \cdot e^{j\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} X_r e^{j\Omega_0 n} = \text{IDFT}\{X_r\}$

$N_0 = \frac{T_0}{T} \propto \frac{1}{\text{sampling per.}}$
 $\frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_s} \cdot N_0 \Rightarrow \omega_s = N_0 \cdot \omega_0$
 $f_s = N_0 \cdot f_0$



Sampling av $X_{T_0}(t)$ till $X_n = X_{T_0}(nT)$, vilket resulterar i en periodisering av D_r till X_r , med period $N_0 = \frac{T_0}{T}$. $N_0 \propto \frac{1}{T}$

$$\left(\dots + D_{r-2N_0} + D_{r+2N_0} + D_{r-N_0} + D_{r+N_0} + D_r \right) e^{j\Omega_0 n}$$



DFT - DISKRETA FOURIERTRANSFORMEN

KONTINUERLIG / **DISKRET**

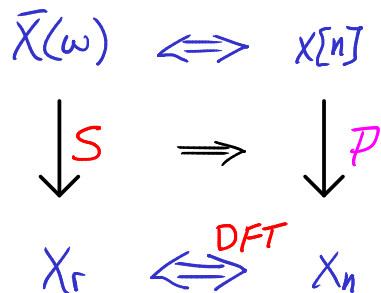
PERIODISK / **PERIODISK**

$X(\omega) \xrightarrow{FT} X_r(\omega)$
 $X_r(\omega) \xrightarrow{DFT} X_r$
 $X_r \xrightarrow{IDFT} X_r(\omega)$
 $X_r(\omega) \xrightarrow{FT} X(\omega)$

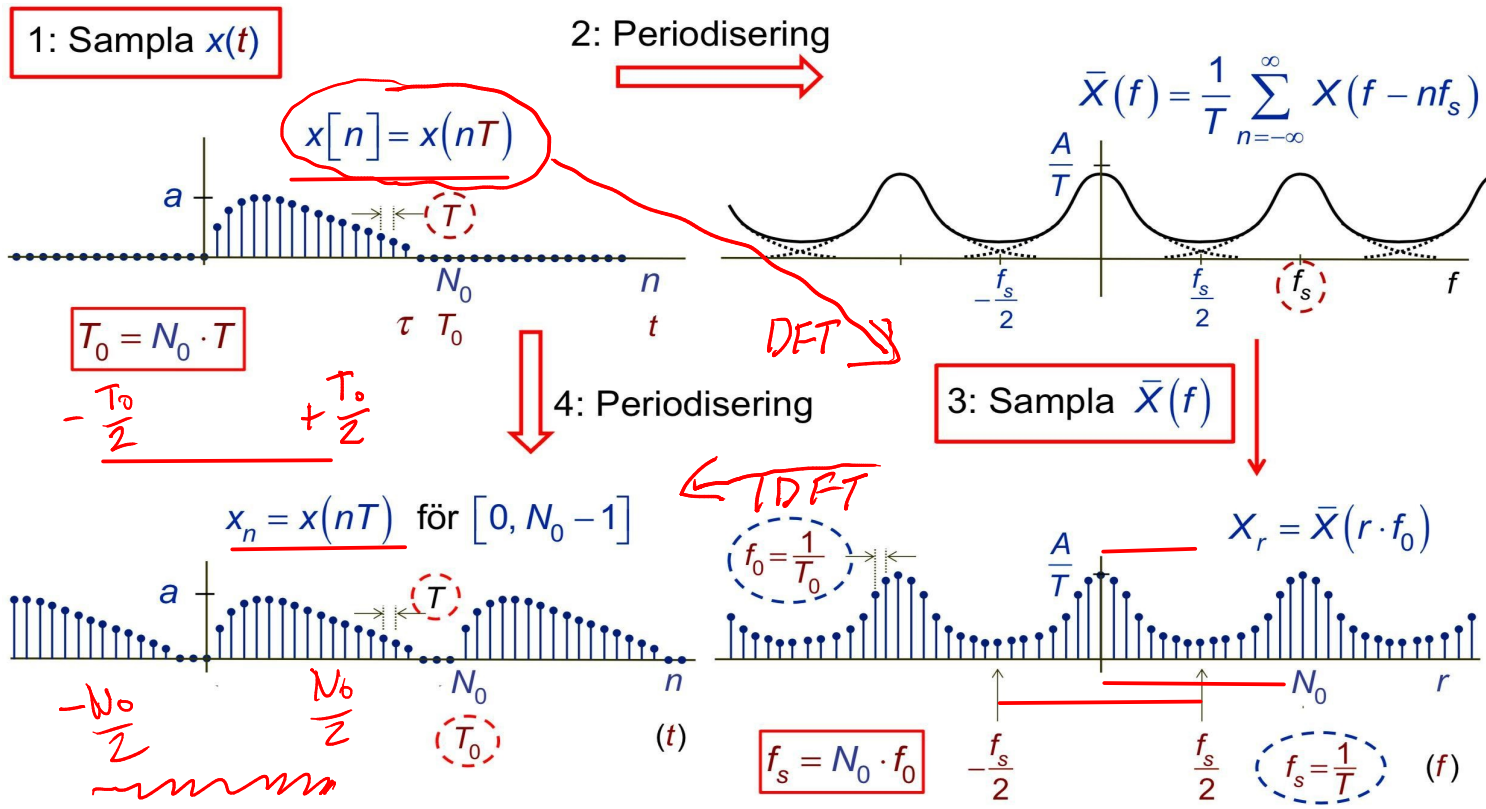
$X_r = \text{DFT}\{x_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j\omega n T}$
 $X_r = \bar{X}(r \cdot \omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-j2\pi r n / N_0}$
 $X_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_r e^{j2\pi k n / N_0}$

$X_n = \text{IDFT}\{X_r\} = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} X_r e^{j2\pi r n / N_0}$; $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$; $n=0,1,2,\dots,N_0-1$

$\text{Period} = N_0 = \frac{\omega_s}{\omega_0} \propto \frac{1}{\text{sampel/par}}$
 $\omega_s = N_0 \cdot \omega_0$
 $f_s = N_0 \cdot f_0$



Sampling av $\bar{X}(\omega)$ till $X_r = \bar{X}(r\omega_0)$, vilket resulterar i en periodisering av $x[n]$ till x_n , med period $N_0 = \frac{\omega_s}{\omega_0}$. $N_0 \propto \frac{1}{\omega_0}$



$\left(X_r \approx \frac{1}{T} X(r \cdot f_0) \text{ f\u00f6r } |(r \cdot f_0)| < \frac{f_s}{2} \text{ vid f\u00f6rsumbar v\u00edkning i frekvensdom\u00e4nen vid sampling av } x(t)! \right)$

$$x_n = \text{IDFT} \{X_r\} = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} X_r e^{jr\Omega_0 n}$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N_0 - 1$

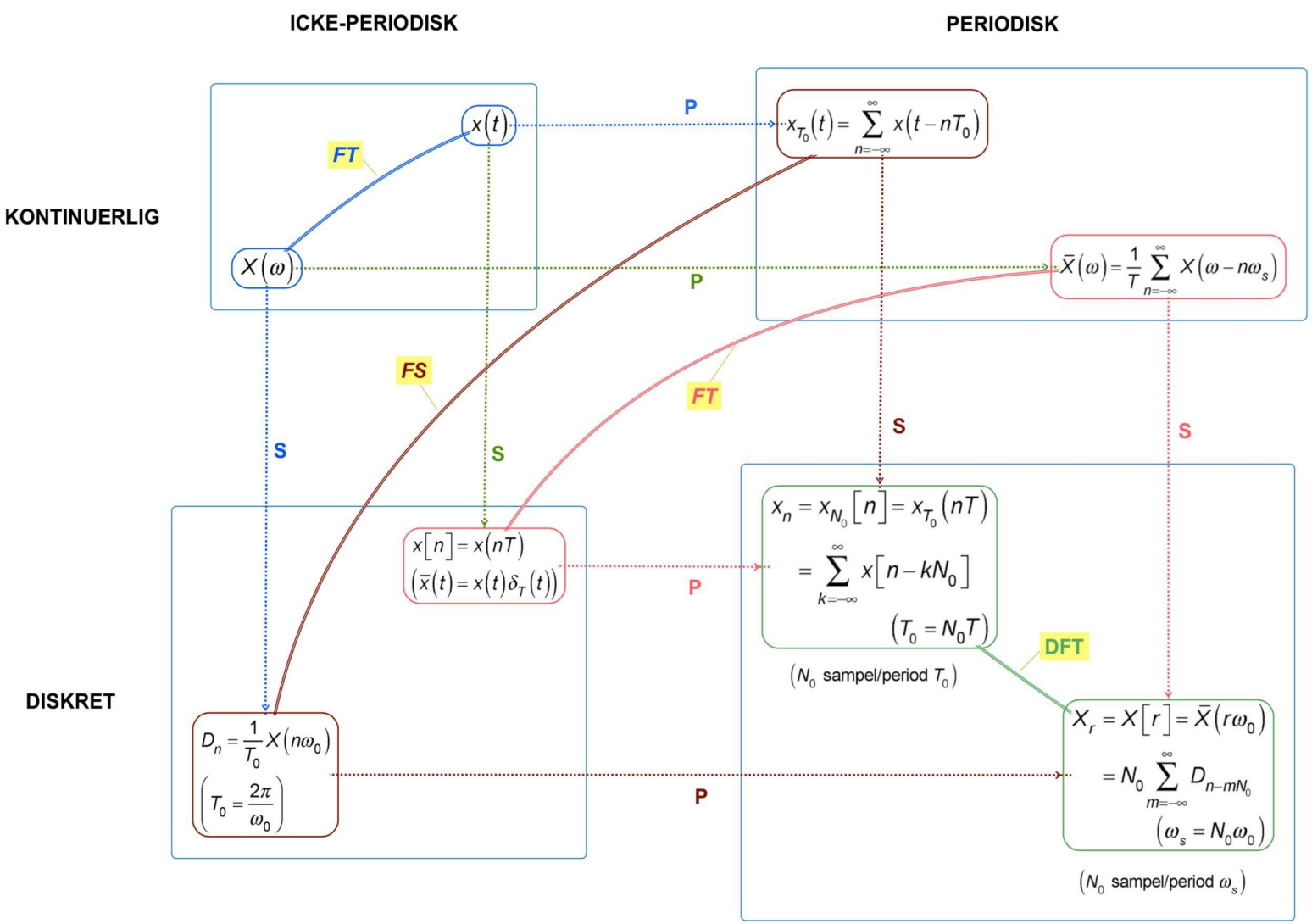
$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

$$X_r = \text{DFT} \{x_n\} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n e^{-jr\Omega_0 n}$$

$r = 0, 1, 2, \dots, N_0 - 1$

Sammanfattning av de olika sambanden i videon:

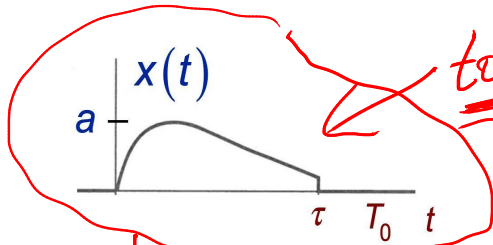
Sampling i den ena domänen resulterar i en periodisering i den andra domänen!



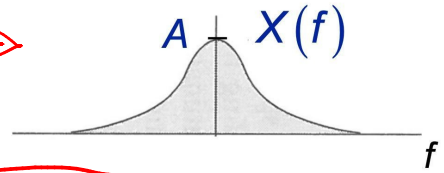
FT = Fouriertransformrelation
 FS = Fourierserierelation
 DFT = Diskret fouriertransformrelation

S = Sampling (i pilens riktning) \Rightarrow
 P = Periodisering (i pilens riktning)

Praktisk användning av DFT:n



to n



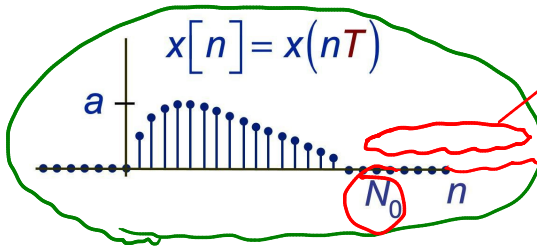
↓ sampla

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

Zero padding

⇒ Vali
större N_0

⇒ Tättare
sampling
av $X(f)$

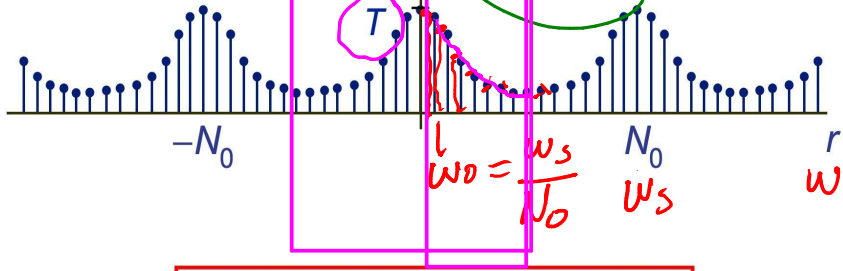
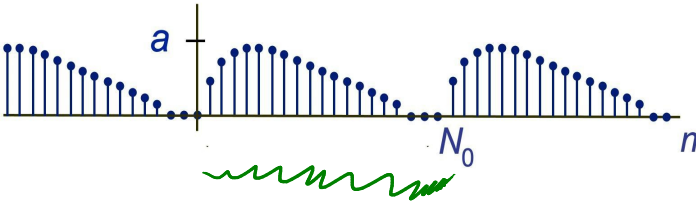


N_0

DFT

IDFT

$$x_n = x(nT) \text{ för } [0, N_0 - 1]$$



$$\omega_0 = \frac{\omega_s}{N_0}$$

$$x_n = \text{IDFT}\{X_r\} = \frac{1}{N_0} \sum_{r=0}^{N_0-1} X_r e^{jr\Omega_0 n}$$

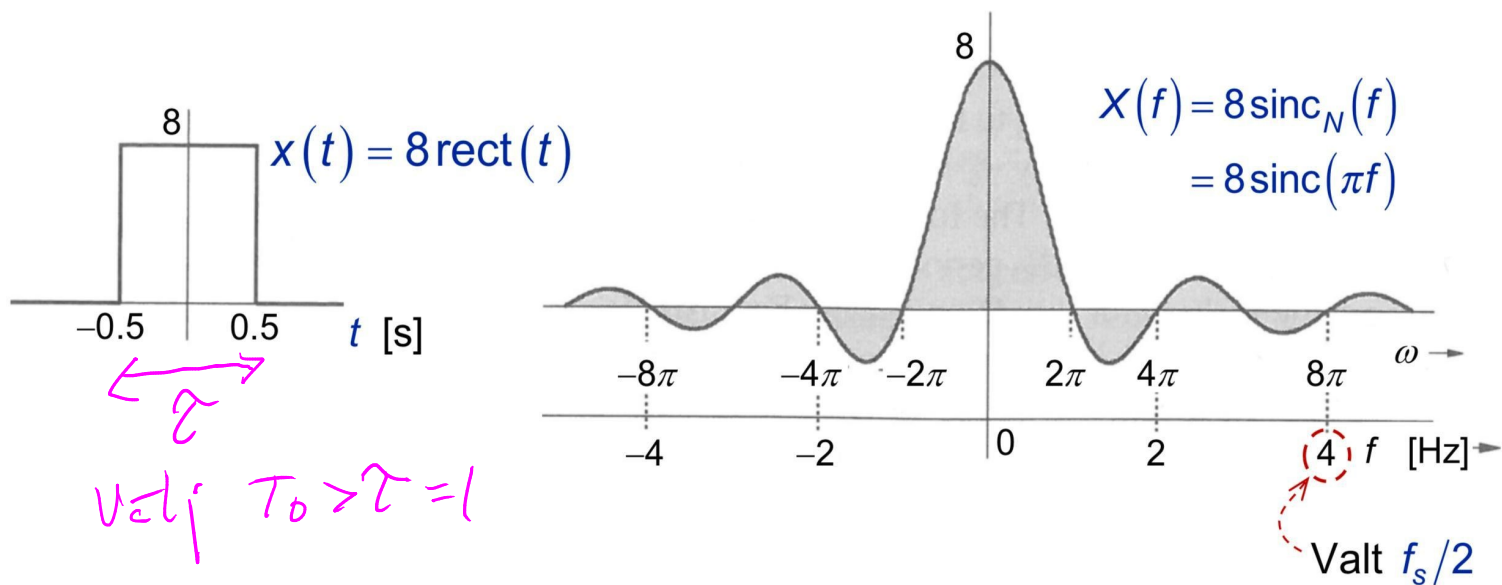
$$n = 0, 1, 2, \dots, N_0 - 1$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

$$X_r = \text{DFT}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n e^{-jr\Omega_0 n}$$

$$r = 0, 1, 2, \dots, N_0 - 1$$

Ex. 8.9, sid. 808–810: Beräkna $\mathcal{F}\{x(t)\}$ med DFT



1. Ej bandbegränsad signal \Rightarrow

Välj lämplig sampelfrekvens som ger liten/acceptabel vickning runt $f_s/2$.

\Rightarrow Välj t.ex. $f_s = 2 \cdot 4 = 8$ Hz \Rightarrow Sampla $x(t)$ med $T = 1/f_s = 1/8$ sek

2. Välj lämplig f_0 så att de periodiska upprepningarna av rect-pulsen inte överlappar och så vi får lämplig spektrumupplösning.

\Rightarrow Välj t.ex. t.ex. $f_0 = 0.25$ Hz \Leftrightarrow $T_0 = 1/f_0 = 4$ sek

$N_0 = \frac{T_0}{T} = 31$

3. Konsekvens:

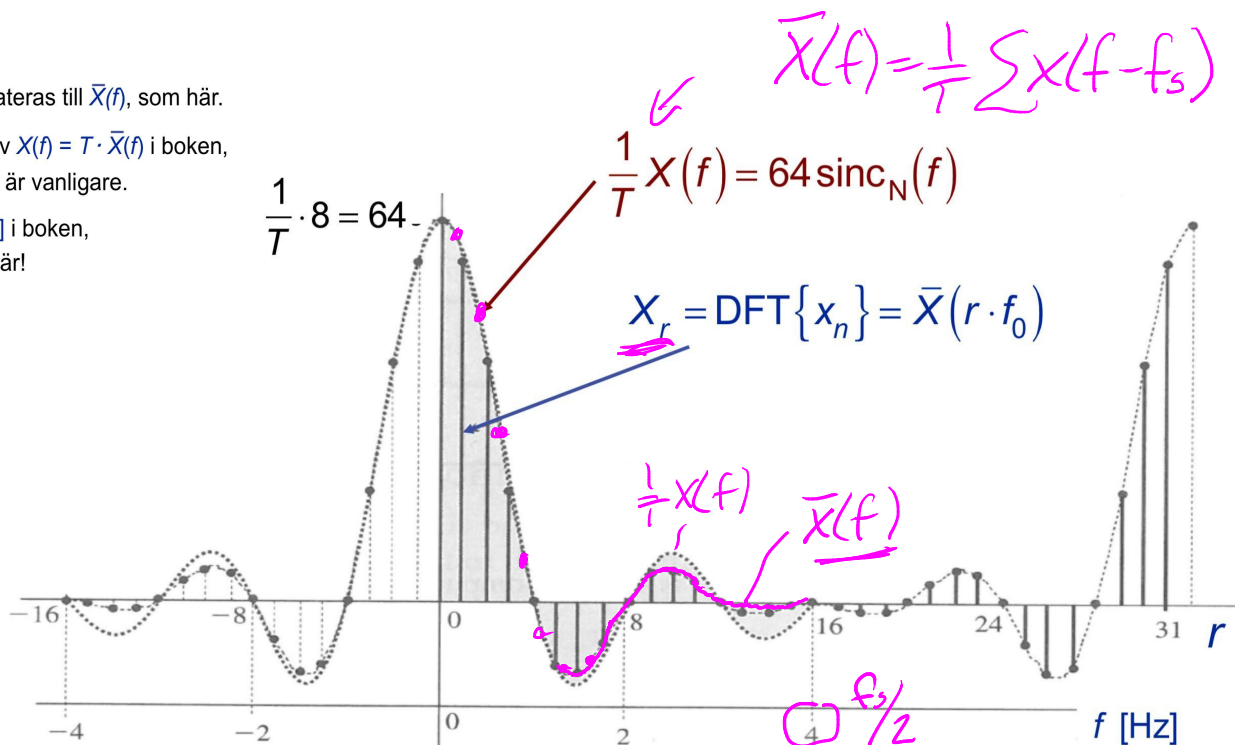
$T_0 = N_0 \cdot T$, $f_s = N_0 \cdot f_0$ \Rightarrow $N_0 = \frac{T_0}{T} = \frac{f_s}{f_0} = 32$

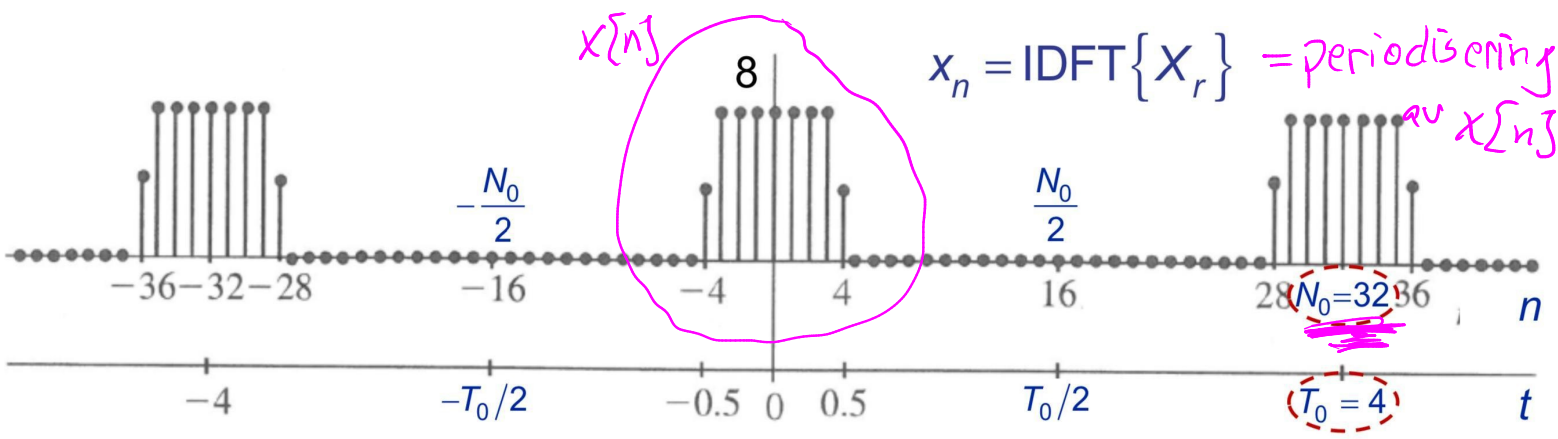
Notera:

I boken relateras X_r till $X(f)$, men det är vanligare att X_r relateras till $\bar{X}(f)$, som här.

$\Rightarrow X_r$ är en samplad version av $X(f) = T \cdot \bar{X}(f)$ i boken, men att (som här) sampla $\bar{X}(f)$ är vanligare.

$\Rightarrow x_n =$ per. upprepn. av $T \cdot x[n]$ i boken,
 $x_n =$ per. upprepn. av $x[n]$ här!





DFT (Diskret Fourier Transform) – egenskaper

- DFT:n är en samplad version av en frekvenskontinuerlig fouriertransform
 ⇒ har motsvarande egenskaper – se kap. 8.5-1
- Ur *praktisk synvinkel* är DFT:n den **viktigaste av alla transformeringar** vid frekvensanalys av både tidskontinuerliga & tidsdiskreta signaler!!
- DFT:n implementeras vanligen m.h.a. någon lämplig **FFT-algoritm** (Fast Fourier Transform) – läs gärna översiktligt kap. 8.6.
 - Synnerligen effektiva algoritmer vid vissa transformlängder N_0 , t.ex. **radix 2-algoritmen**, då $N_0 = 2^b$:
 Antalet additioner & multiplikationer som krävs för att beräkna DFT:n minskas då från $\sim N_0^2$ till $\sim N_0 \cdot \log_2 N_0 = N_0 \cdot b$!

$\bar{X}(f)$ $\bar{X}(\omega)$

Ex: $N_0 = 1024 = 2^{10}$ ⇒ $N_0^2 = 1.048.576$ & $N_0 \cdot \log_2 N_0 = 10.240$