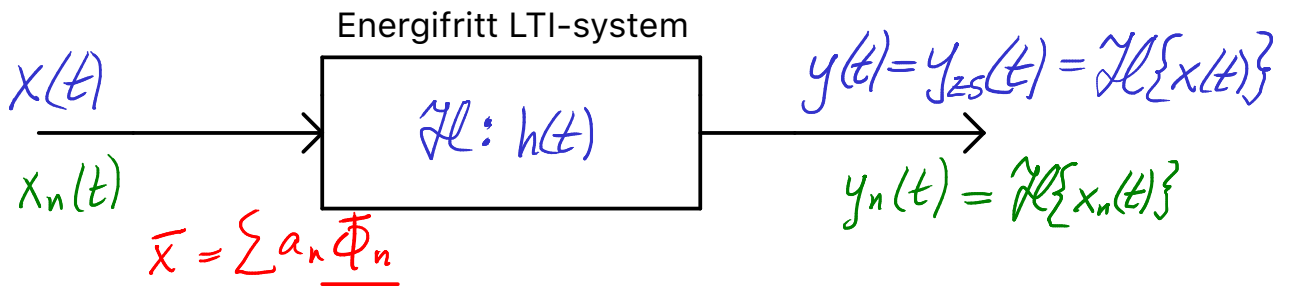


Signaler & System – Föreläsning 8: Laplacetransformanalys av (signaler och) system



$$x(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t)$$

linjärit

$$y_{zs}(t) = \sum_n a_n \cdot y_n(t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

LTI

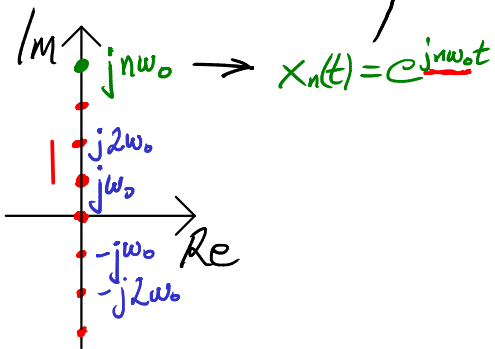
$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

- T_0 -periodisk insignal ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Stabilt LTI

$$y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n e^{jn\omega_0 t}$$



$$\mathcal{L}\{e^{jn\omega_0 t}\} = H(jn\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

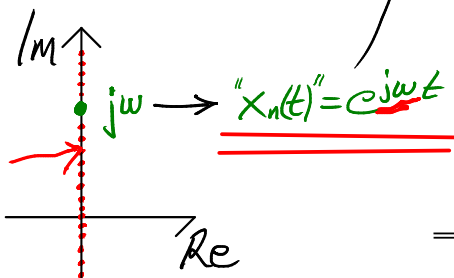
$$\hat{D}_n = D_n \cdot H(jn\omega_0)$$

- Energisignal:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Stabilt LTI

$$y_{zs}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$



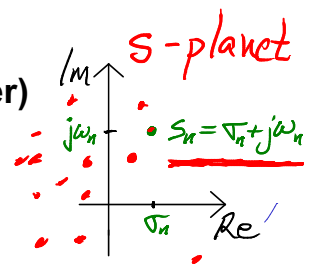
$$\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega) e^{j\omega t}$$

$$Y(\omega) = X(\omega) H(j\omega)$$

⇒ Motiverar användningen av fouriertransformer vid beräkning av utsignal samt för frekvensanalys av både signaler & system!

Annan lämplig linjärkombination av insignalskomponenter (basfunktioner)

$x_n(t) = e^{s_n t}$; $s_n = \sigma_n + j\omega_n$ för vilka $\mathcal{L}\{x_n(t)\}$ är lätta att beräkna?
 $s = \sigma + j\omega$

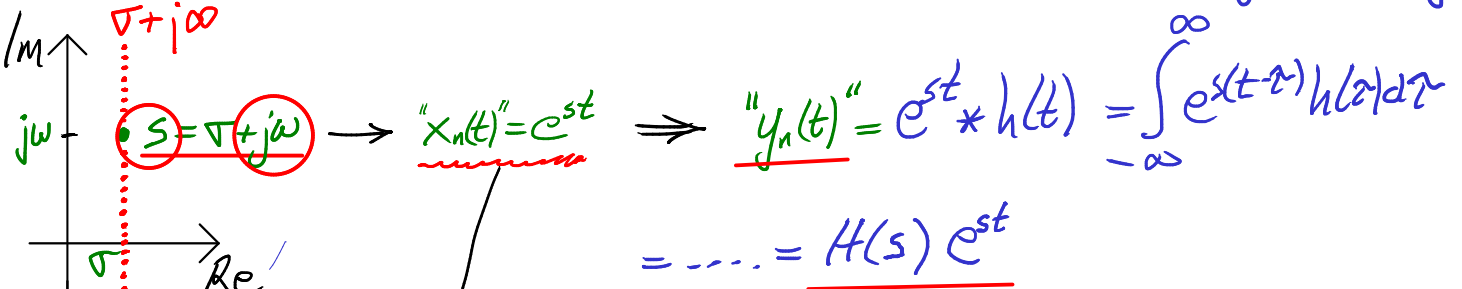


Inversa fouriertransformen \Rightarrow

integrera (= summera för ett kontinuum av punkter) längs imaginära axeln: $\omega: -\infty \rightarrow \infty$

Inversa laplacetransformen \Rightarrow

integrera i stället i imaginärdel längs någon annan linje i s-planet: $s: \sigma - j\infty \rightarrow \sigma + j\infty$



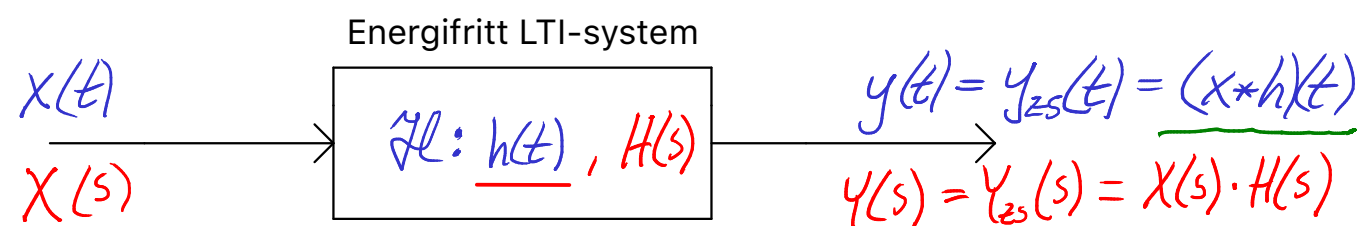
$x_n(t) = e^{s t} \Rightarrow y_n(t) = e^{s t} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau$
 $= \dots = H(s) e^{s t}$

$X(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{s t} ds$ \Rightarrow LTI

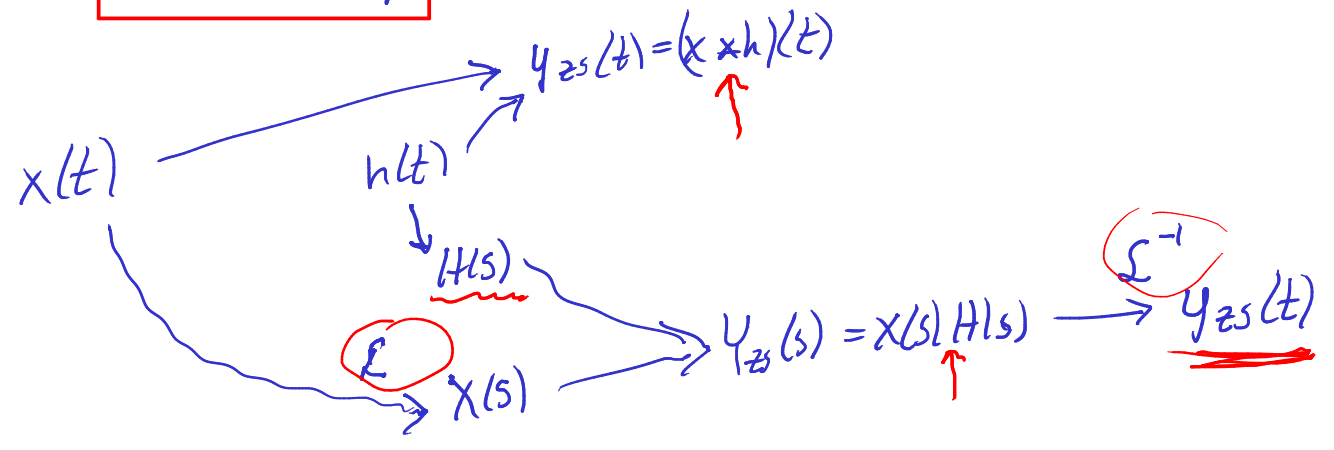
$Y_{zs}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} Y(s) e^{s t} ds$

der $Y(s) = X(s) \cdot H(s)$

Integr. vägen måste ligga i konv. omr. (ROC) för $X(s)$ resp. $Y(s)$



där $H(s) := \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \text{LTI-systemets systemfunktion}$



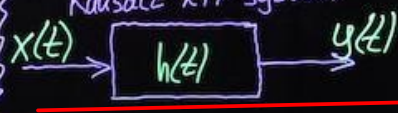
Beräkning av utsignalen från ett LTI-system, som är beskrivet med en differentialekvation

Först – laplacetransformen av en derivata (den första av två videor):

ENKELSIDIG LAPLACETRANSFORM AV EN DERIVATA

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Kausalt LTI-system



$x(t) \rightarrow h(t) \rightarrow y(t)$

$y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = 1$ $\mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{Hx\}$ $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$
 $\Rightarrow Y(s) = \dots \Rightarrow y_{zs}(t)$ där $y_{zs}(t) = (x * h)(t)$

$x(t) = e^{-4t} u(t)$

$\mathcal{L}\{y(t)\} = ?$

$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{Hx\}$

$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = ?$

VIDEO 1

Utsignalen från LTI-systemet i videon beräknas i nästa video!

Ska förstås vara $+\infty$


ENKELSIDIG LAPLACETRANSFORM AV EN DERIVATA

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$$

$\text{Re}\{s\} = \sigma > \sigma_0$ (där är $|Y(s)| < \infty$)

$Y(s) = \mathcal{F}\{y(t)e^{\sigma t}\} \Rightarrow \int_0^{\infty} |y(t)e^{\sigma t}| dt < \infty$

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)e^{-\sigma t} = 0$



$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{dy(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{a(t)b(t)}{e^{-st} y(t)} dt = \int_0^{\infty} \frac{a(t)b(t)}{e^{-st} y(t)} dt - \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} e^{-st} \cdot y(t) dt$

$= \left[y(t) e^{-st} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} y(t) \cdot (-s) e^{-st} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) e^{-st} - y(0^-) \cdot \frac{e^0}{1} + s \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y(t) e^{-\sigma t}}{\rightarrow 0} \cdot \frac{e^{j\omega t}}{|1|} = 0$

$= s \cdot Y(s) - y(0^-)$

$\mathcal{L}\{y'(t)\} = s \cdot Y(s)$

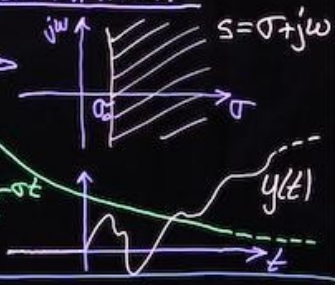
VIDEO 1

Ska vara $y'(t)$

ENKELSIDIG LAPLACETRANSFORM AV EN DERIVATA

VIDEO 1

$$Y(s) = \mathcal{L}_I\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt; \operatorname{Re}\{s\} = \sigma > \sigma_0 \text{ (där är } |y(s)| < \infty) \Rightarrow$$



$$Y(s) = \mathcal{F}\{y(t)e^{-\sigma t}\} \Rightarrow \int_0^{\infty} |y(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)e^{-\sigma t} = 0$$

$$\mathcal{L}_I\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = \underline{s \cdot Y(s) - y(0^-)} = W(s)$$

$$\mathcal{L}_I\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = ? \quad \mathcal{L}_I\left\{\frac{d^ny(t)}{dt^n}\right\} = ?$$

$$\mathcal{L}_I\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = \mathcal{L}_I\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right)\right\} = s \cdot W(s) - W(0^-) = s(sY(s) - y(0^-)) - y'(0^-)$$

$$= \underline{s^2 Y(s) - s \cdot y(0^-) - y'(0^-)}$$

$$\mathcal{L}_I\left\{\frac{d^ny(t)}{dt^n}\right\} = \underline{s^n Y(s) - s^{n-1} y(0^-) - s^{n-2} y'(0^-) - \dots - \frac{d^{n-1}y(0^-)}{dt^{n-1}}}$$

Video 2 = Räkneexempel:

VIDEO 2

LÖSNING AV DIFFERENTIALKVATION M.H.A. LAPLACETRANSFORMEN

$x(t)$ → $h(t)$ → $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$
 Kausalt LTI-system
 $h(t < 0) = 0$
 där $y_{zs}(t) = (x * h)(t)$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$y(0^-) = 2, y'(0^-) = 1, x(t) = e^{-4t} u(t) \quad \boxed{y(t) = ?}$$

$$\mathcal{L}_I\{V\} = \mathcal{L}_I\{H\} \Rightarrow \mathcal{L}_I\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} + 5\mathcal{L}_I\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} + 6\mathcal{L}_I\{y(t)\} = \mathcal{L}_I\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} + \mathcal{L}_I\{x(t)\}$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - \underbrace{s \cdot y(0^-)}_{=2} - \underbrace{y'(0^-)}_{=1} + 5(sY(s) - \underbrace{y(0^-)}_{=2}) + 6Y(s) = s \cdot \underbrace{X(s)}_{=0} - \underbrace{X(0^-)}_{=0} + X(s)$$

$$\Rightarrow (s^2 + 5s + 6)Y(s) - (2s + 1 + 25) = X(s)(s + 1)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2s + 11}{s^2 + 5s + 6} + \underbrace{X(s) \cdot \frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6}}_{=H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}}$$



LÖSNING AV DIFFERENTIALKVATION M.H.A. LAPLACETRANSFORMEN

Kausalt LTI-system $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$ där $y_{zs}(t) = (x * h)(t)$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$y(0) = 2, y'(0) = 1, x(t) = e^{-4t} u(t) \quad y(t) = ?$

$$Y(s) = \frac{2s+11}{s^2+5s+6} + X(s) \cdot \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{2s+11}{(s+2)(s+3)} + \frac{1}{s+4} \cdot \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

$$= 7 \cdot \frac{1}{s+2} - 5 \cdot \frac{1}{s+3} + 2 \left(-3 \cdot \frac{1}{s+4} - \frac{1}{s+2} + 4 \cdot \frac{1}{s+3} \right)$$

$\text{Re}\{s\} > -2 \quad \text{Re}\{s\} > -3 \quad \text{Re}\{s\} > -4 \quad \text{Re}\{s\} > -2 \quad \text{Re}\{s\} > -3$

$$y(t) = \underbrace{7e^{-2t} - 5e^{-3t}}_{y_{zi}(t)} + \underbrace{2(-3e^{-4t} - e^{-2t} + 4e^{-3t})}_{y_{zs}(t)} = \underbrace{\left(\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t}\right)}_{y_h(t)} - \underbrace{\frac{3}{2}e^{-4t}}_{y_p(t)}$$

$h(t)$ -termen $= y_{zi}(t)$ $x(t)$ -term $= y_{zs}(t)$ $h(t)$ -termen $= y_h(t)$ $y_p(t)$

$e^{-at} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$

(Relationen mellan zero-input/-state response och homogen/partikulär lösning togs upp i föreläsning 3)

Fo 2: Deriveringoperatorn $D \Rightarrow$

här: $(D^2 + 5D + 6)y(t) = (D+1)x(t)$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

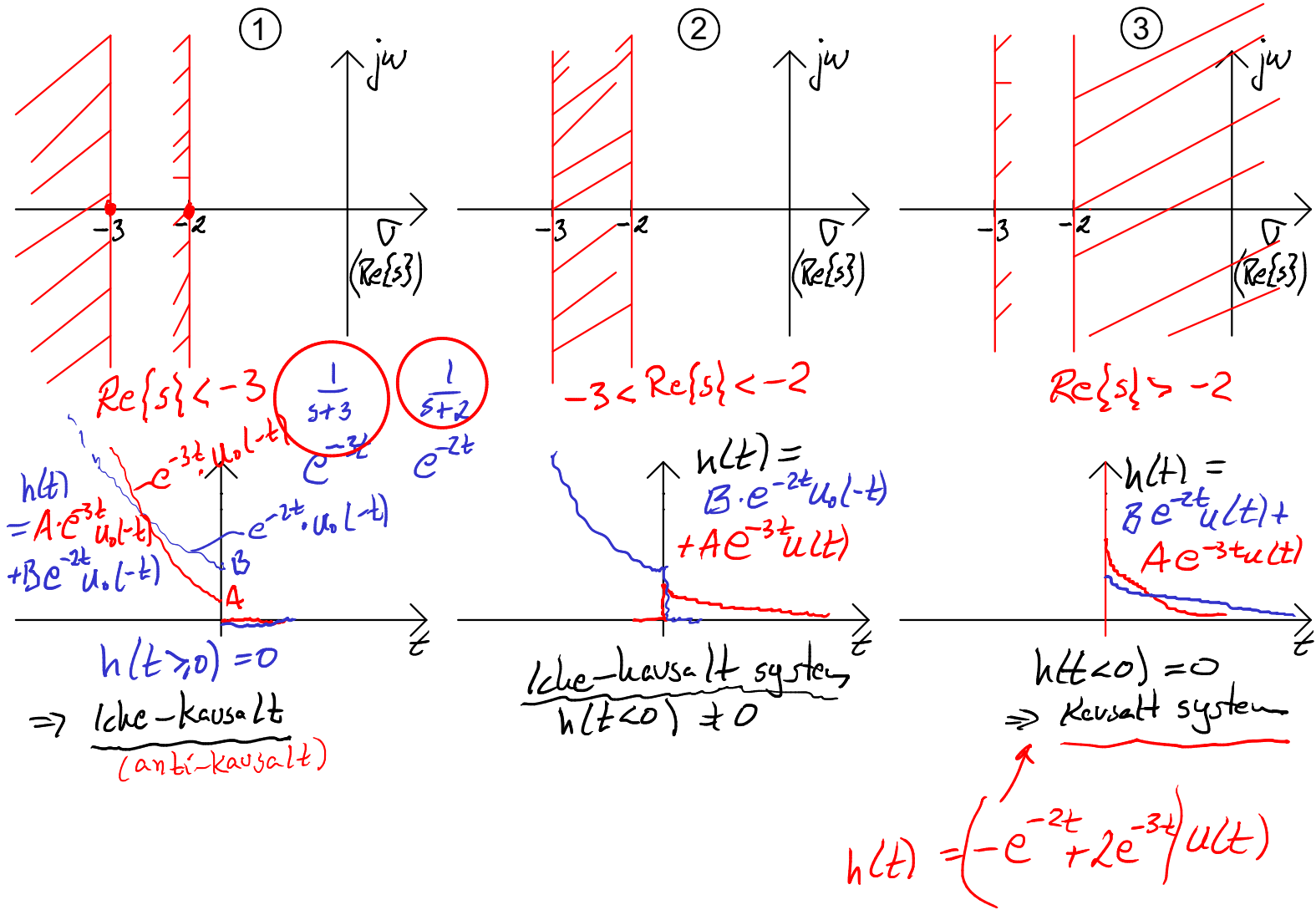
\mathcal{L} \nearrow Polynom

$$\mathcal{L}_{II} \left\{ \frac{d^n y(t)}{dt^n} \right\} = s^n \cdot Y(s)$$

$$\mathcal{L}_{II} \{v_k\} = \mathcal{L}_{II} \{H_k\} \Rightarrow H(s) = \dots = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

Konvergensområdet för $H(s)$ bestäms av systemets kausalitets- och/eller stabilitets-egenskaper.

⇒ 3 möjliga system, beroende på konvergensområde för $H(s)$:



Pol-nollställediagram – grafisk representation av laplacetransformer

Exempel – ett LTI-system av ordning 4:

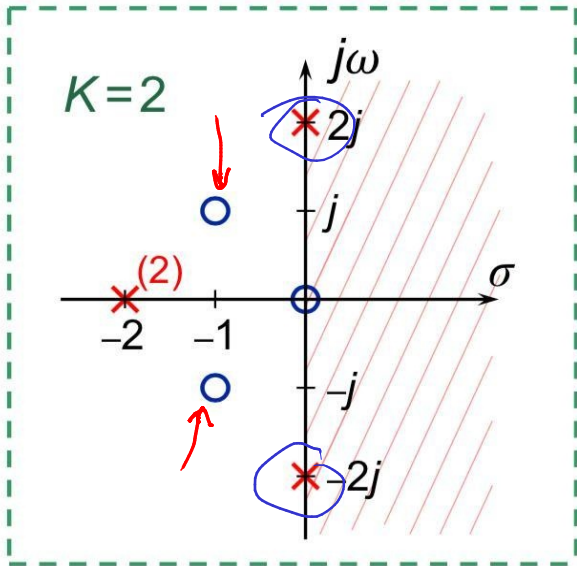
$$H(s) = \frac{2s^3 + 4s^2 + 4s}{s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 16s + 16} = 2 \cdot \frac{s((s+1)^2 + 1^2)}{(s+2)^2(s+2j)(s-2j)}$$

Handwritten notes and partial equation:

$$(s+\alpha)^2 + \omega_0^2$$

Diagram of a complex pole pair on the imaginary axis with real part α and imaginary part $\pm j\omega_0$.

Boken $x^{(2)} \Rightarrow \text{X}$



Nivåkonstant: $K=2$

Nollställen:

$$n_0 = 0 \quad n_1 = -1 - j \cdot 1 \quad n_2 = -1 + j \cdot 1$$

Poler:

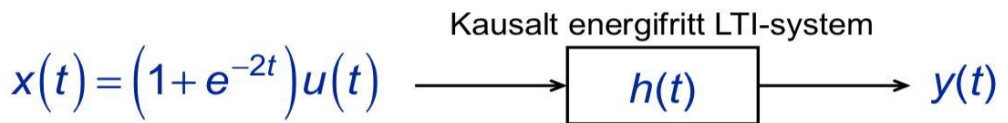
$$p_1 = p_2 = -2 \quad p_3 = -2j \quad p_4 = 2j$$

Konvergensområde för $H(s)$

om kausalt system: $\text{Re}\{s\} > 0$

Överlagrade pol-nollställediagram

Exempel:



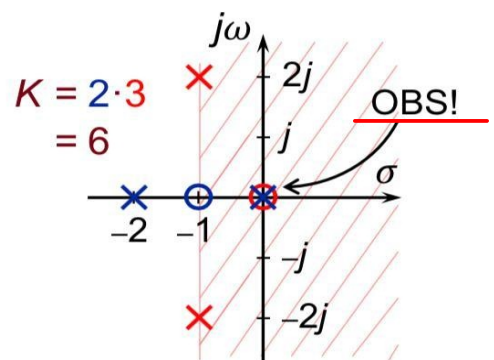
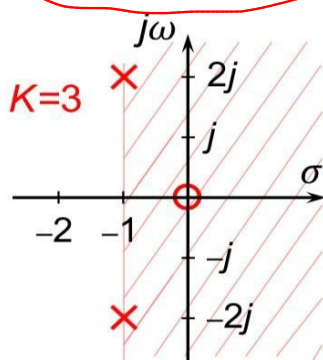
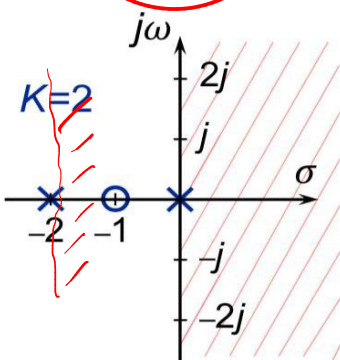
$u(t) + e^{-2t}u(t)$

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} = \frac{2(s+1)}{s(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{3s}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s)$$

$$= \frac{2(s+1)}{\cancel{s}(s+2)} \cdot \frac{3\cancel{s}}{(s+1)^2 + 2^2}$$



$$h(t) = A \cdot e^{-1 \cdot t} \cdot \frac{\cos(2t + \varphi)}{\sin} u(t)$$

$$H(s) = \frac{3(s+1) - 3}{(s+1)^2 + 2^2} = 3 \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{3}{2} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$u(t) = 3 e^{-t} \cos(2t) u(t) + -\frac{3}{2} e^{-t} \sin(2t) u(t)$$

Stabilitet – för energifria LTI-system

(Externt) stabilt system: (Insignal-utsignal-stabilt)

Varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad \text{gäller för stabila LTI-system}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) \quad \exists$$

$$s = \sigma + j\omega$$

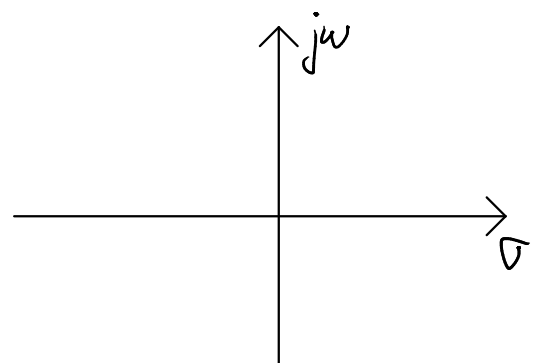
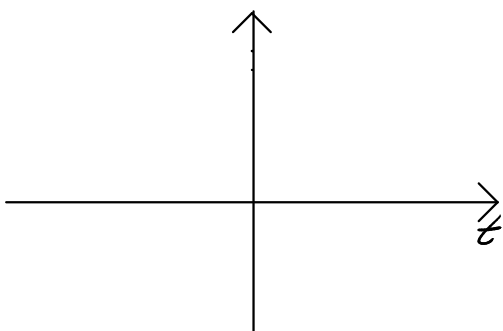
$$\left(\mathcal{F}\{h(t)e^{-\sigma t}\} \xrightarrow{s=\sigma+j\omega} \mathcal{L}\{h(t)\} \right)$$

$$\sigma=0 \Rightarrow$$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

\Leftrightarrow $j\omega$ -axeln ligger i systemfunktionens konvergensområde!

Konsekvens: Systemfunktionen till ett stabilt system har *minst lika många poler som nollställen* – annars ingår inte $\pm j\infty$ i konvergensområdet



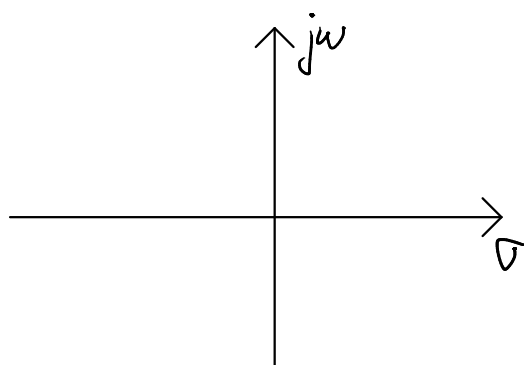
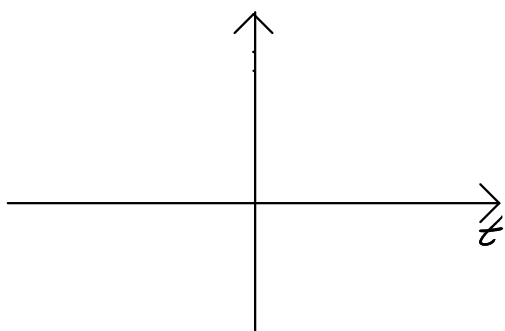
Marginellt stabilt system:

De flesta begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{cases} \quad \text{gäller för marginellt stabila LTI-system}$$

- $$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet H(s) \text{ har minst en enkelpol på } j\omega \text{-axeln} \\ \bullet j\omega \text{-axeln utgör en rand till konvergensområdet för } H(s) \\ \bullet H(s) \text{ har minst lika många poler som nollställen (egentligen } \#P \geq \#N - 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega, s \neq \text{pol}}}$$



Instabilt system:

Ingen begränsad nollskild insignal kan ge upphov till en begränsad utsignal

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \not\leq \infty \\ |h(t)| \not\leq \infty \quad \forall t \end{cases} \quad \text{gäller för instabila LTI-system}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \quad j\omega \text{-axeln ligger } \textit{inte} \text{ i konvergensområdet för } H(s) \\ \textit{eller} \\ \bullet \quad j\omega \text{-axeln utgör en } \textit{rand} \text{ till konvergensområdet för } H(s) \\ \text{och } H(s) \text{ har en minst en } \textit{multipelpol} \text{ på } j\omega \text{-axeln} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(\omega) \text{ existerar inte}$$

