Signaler & System – Föreläsning 8: Laplacetransformanalys av (signaler och) system

Energifritt LTI-system

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}: h(t)} \longrightarrow y(t) = y_{zs}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$$

$$x_n(t) \longrightarrow \quad y_n(t) = \mathcal{H}\{x_n(t)\}$$

$$\bar{x} = \sum a_n \underline{\Phi_n}$$

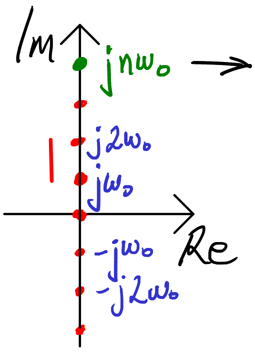
$$\boxed{x(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t)} \xrightarrow{\text{Linjärt}} \boxed{y_{zs}(t) = \sum_n a_n \cdot y_n(t)}$$

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau} \xrightarrow{\text{LTI}} \boxed{y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau}$$

- T_0 – periodisk insignal $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}\right)$:

$$\boxed{x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n\, e^{jn\omega_0 t}} \xrightarrow{\text{Stabilt LTI}} \boxed{y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n\, e^{jn\omega_0 t}}$$

$$\boxed{\hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0)}$$



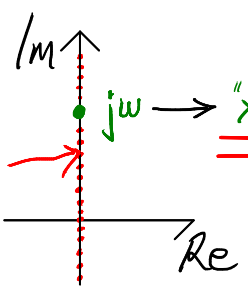
$$jn\omega_0 \longrightarrow x_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$$

$$\mathcal{H}\{e^{jn\omega_0 t}\} = H(n\omega_0)\, e^{jn\omega_0 t}$$

- Energisignal:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega} \xrightarrow{\text{Stabilt LTI}} \boxed{y_{zs}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega}$$

$$\boxed{Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)}$$

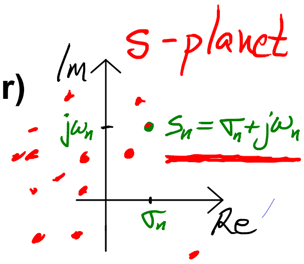


$$j\omega \longrightarrow \text{“}x_n(t)\text{”} = e^{j\omega t}$$

$$\mathcal{H}\{e^{j\omega t}\} = H(\omega)\, e^{j\omega t}$$

$\Longrightarrow$ Motiverar användningen av fouriertransformer vid beräkning av utsignal samt för frekvensanalys av både signaler & system!

Annan lämplig linjärkombination av insignalskomponenter (basfunktioner)

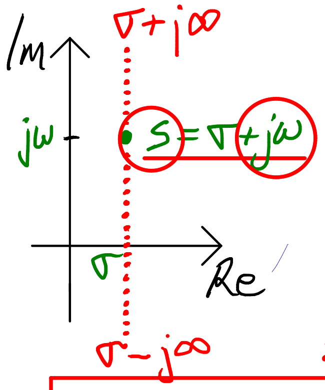


$x_n(t) = e^{s_n t}$; $s_n = \sigma_n + j\omega_n$ **för vilka** $\mathcal{H}\{x_n(t)\}$ **är lätta att beräkna?**

$s = \sigma + j\omega$

Inversa fouriertransformen $\Longrightarrow$
integrera (= summera för ett kontinuum av punkter) längs imaginära axeln: $\omega: -\infty \to \infty$

Inversa laplacetransformen $\Longrightarrow$
integrera i stället i imaginärdel längs någon annan linje i s-planet: $s: \sigma - j\infty \to \sigma + j\infty$



$\rightarrow$ "$x_n(t)$" $= e^{st}$ $\Longrightarrow$ "$y_n(t)$" $= e^{st} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau)\, d\tau$

$= \ldots = H(s)\, e^{st}$

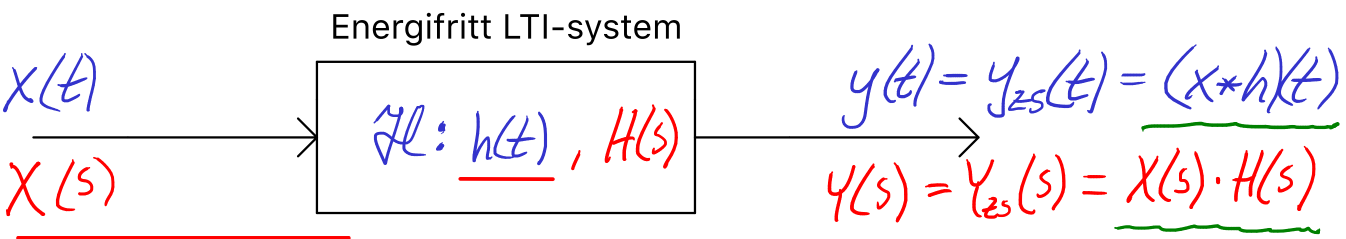
$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds}$$

LTI $\Longrightarrow$

$$\boxed{y_{zs}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} Y(s)\, e^{st}\, ds}$$

$$\boxed{\text{där } Y(s) = X(s) \cdot H(s)}$$

Integr.vägen måste ligga i konv.omr. (ROC) för $X(s)$ resp. $Y(s)$



där $\boxed{H(s) := \dfrac{Y_{zs}(s)}{X(s)}}$ = LTI-systemets systemfunktion

$x(t) \rightarrow y_{zs}(t) = (x * h)(t) \leftarrow h(t)$

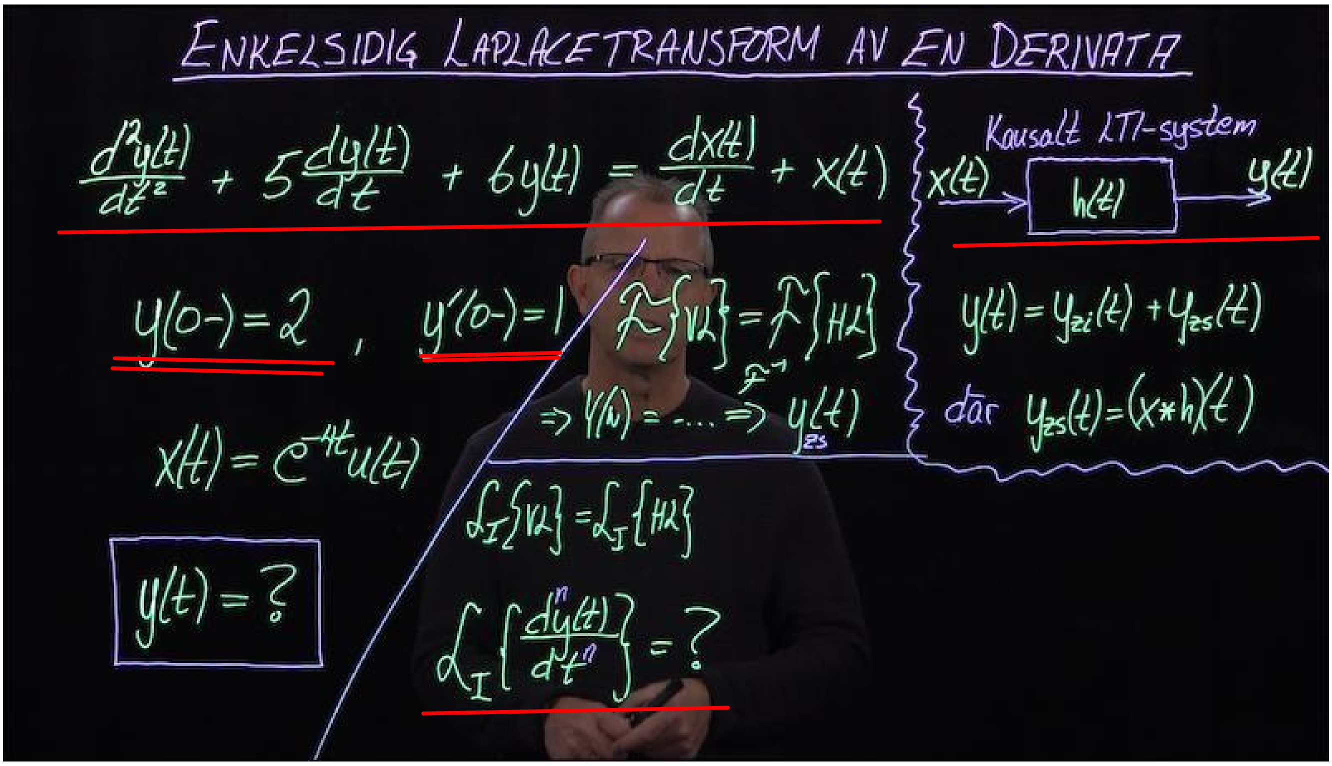
$h(t) \rightarrow H(s)$

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$

$X(s),\ H(s) \rightarrow Y_{zs}(s) = X(s)\, H(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y_{zs}(t)$

Beräkning av utsignalen från ett LTI-system, som är beskrivet med en differemtialekvation

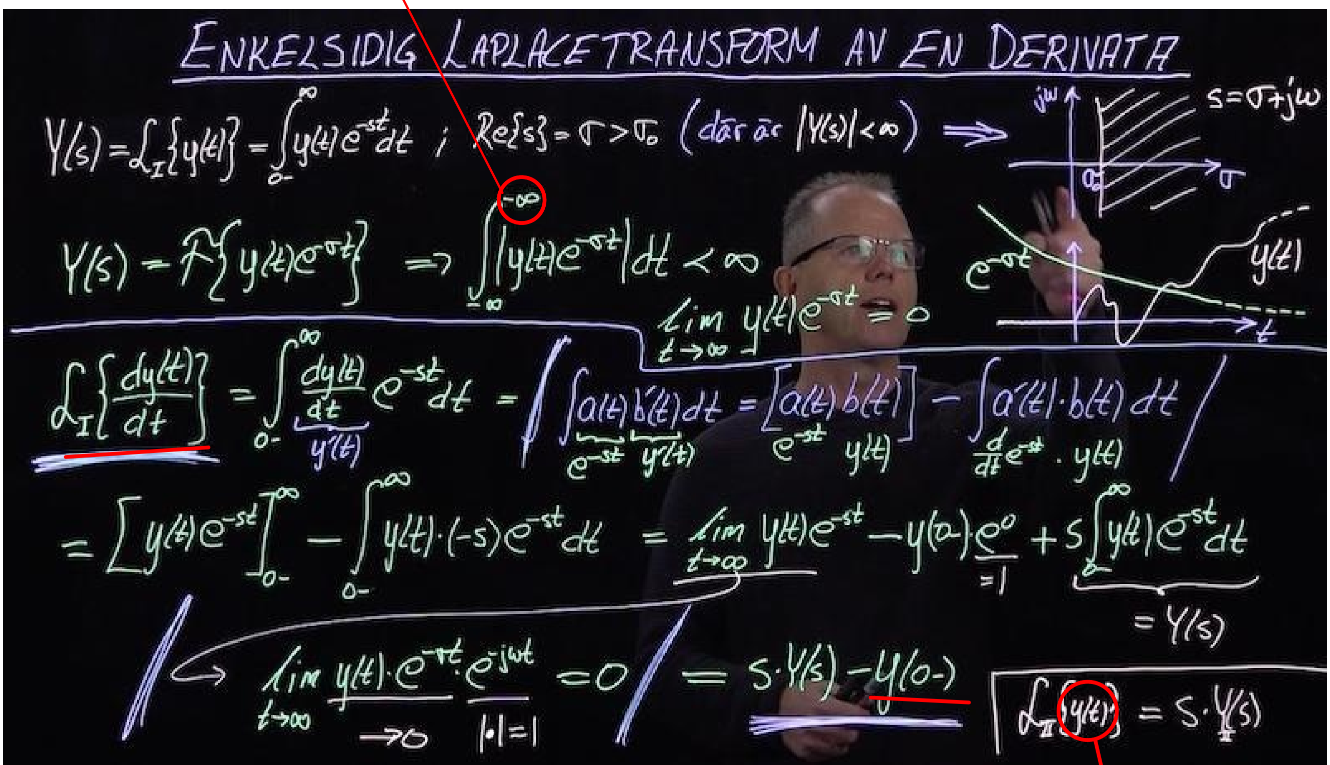
Först – laplacetransformen av en derivata (den första av två videor):



VIDEO 1

Utsignalen från LTI-systemet i videon beräknas i nästa video!

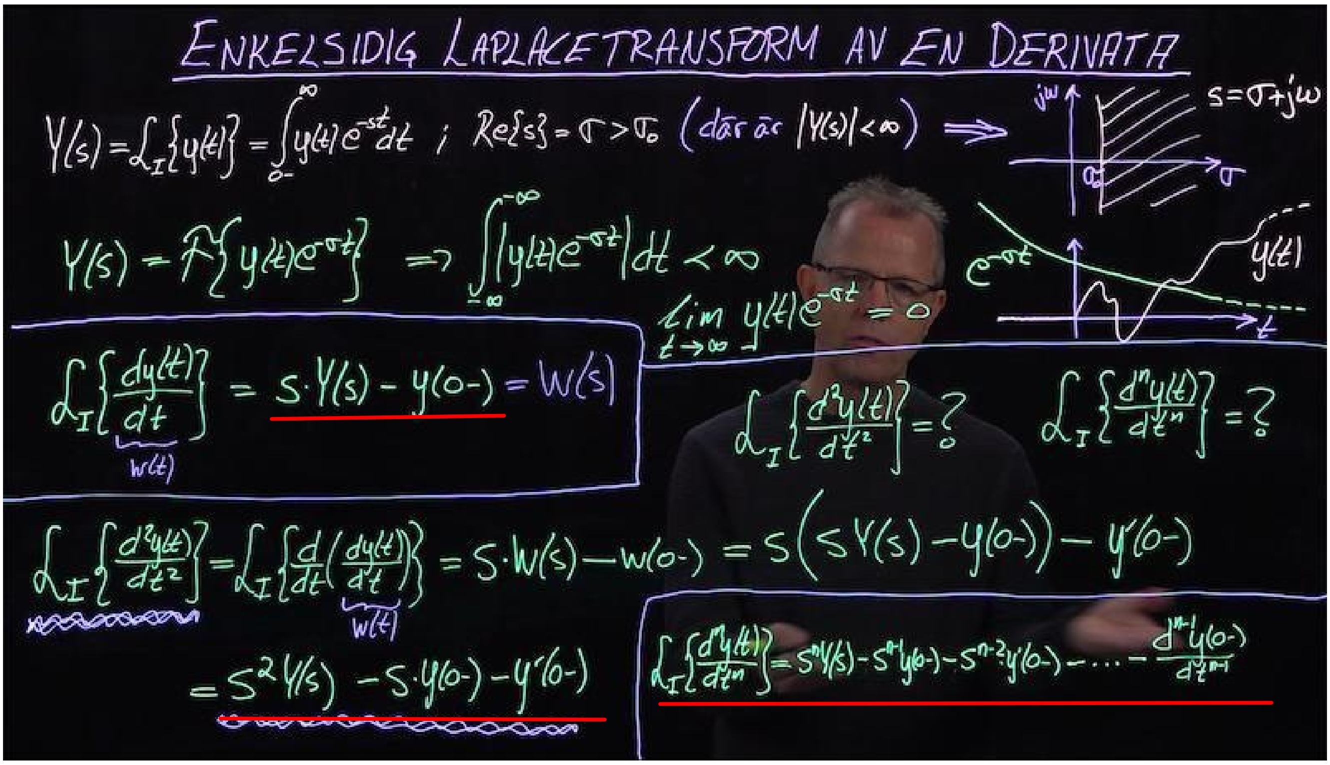
Ska förstås vara +∞



VIDEO 1

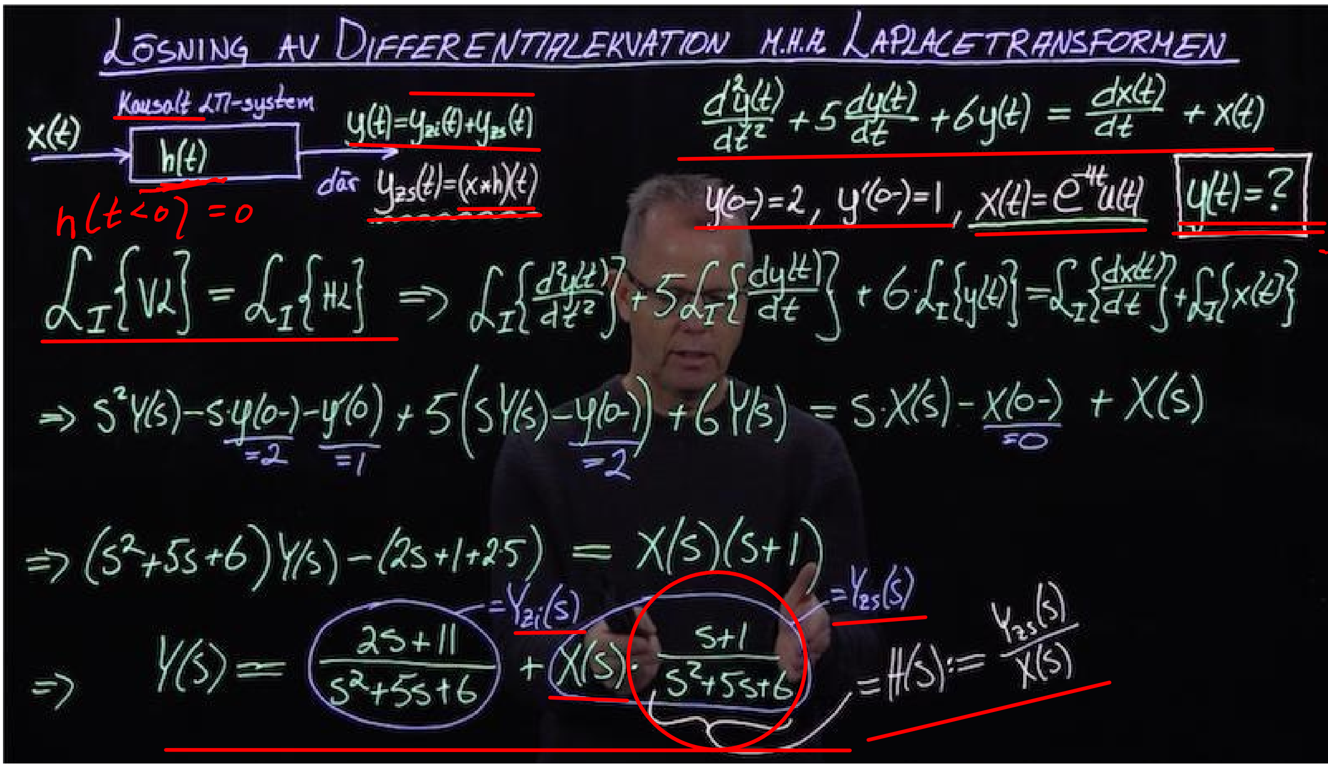
Ska vara y'(t)

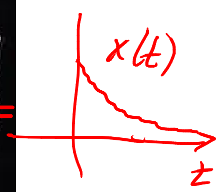
VIDEO 1



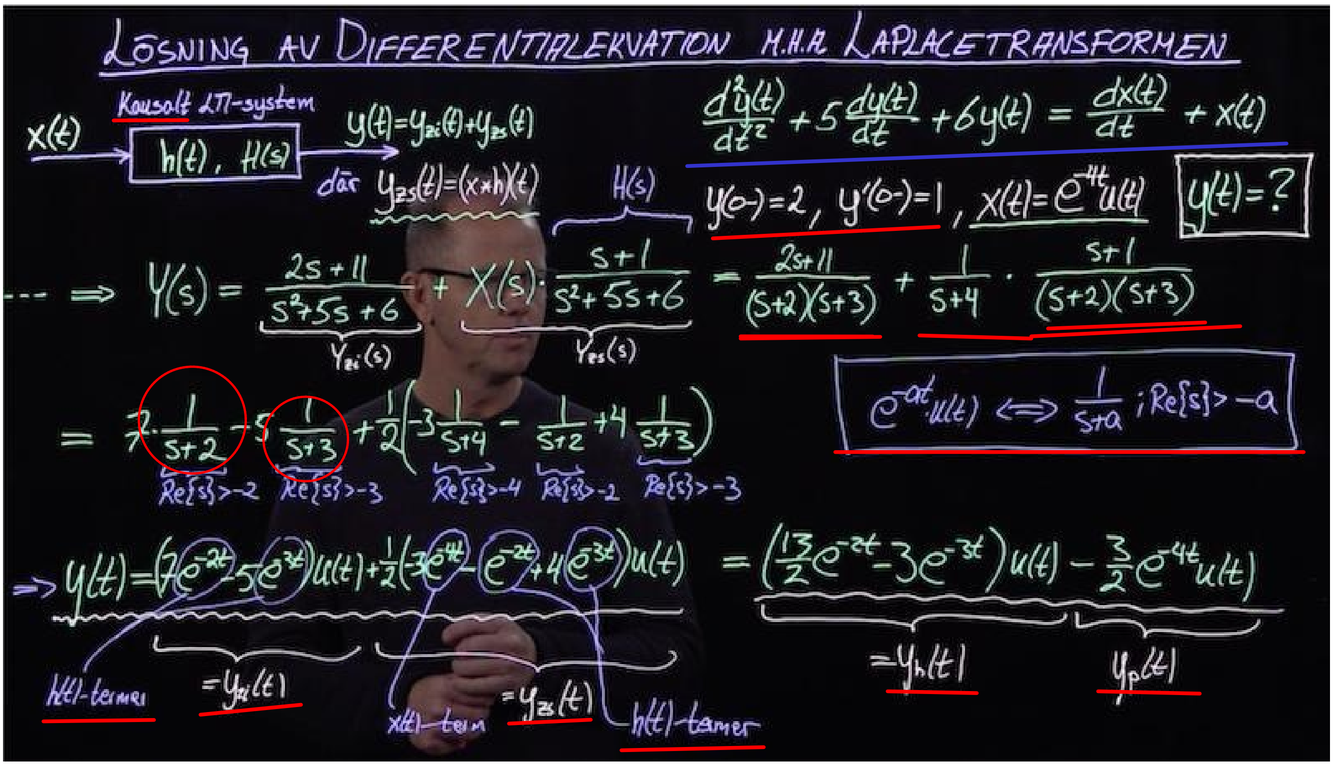
Video 2 = Räkneexempel:

VIDEO 2





VIDEO 2



(Relationen mellan zero-input/-state response och homogen/partikulär lösning togs upp i föreläsning 3)

Fö 2: Deriveringsoperatorn D $\Rightarrow$

här: $\underbrace{(D^2+5D+6)}_{Q(D)}y(t) = \underbrace{(D+1)}_{P(D)}x(t)$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

$\mathcal{L}$

Polynom

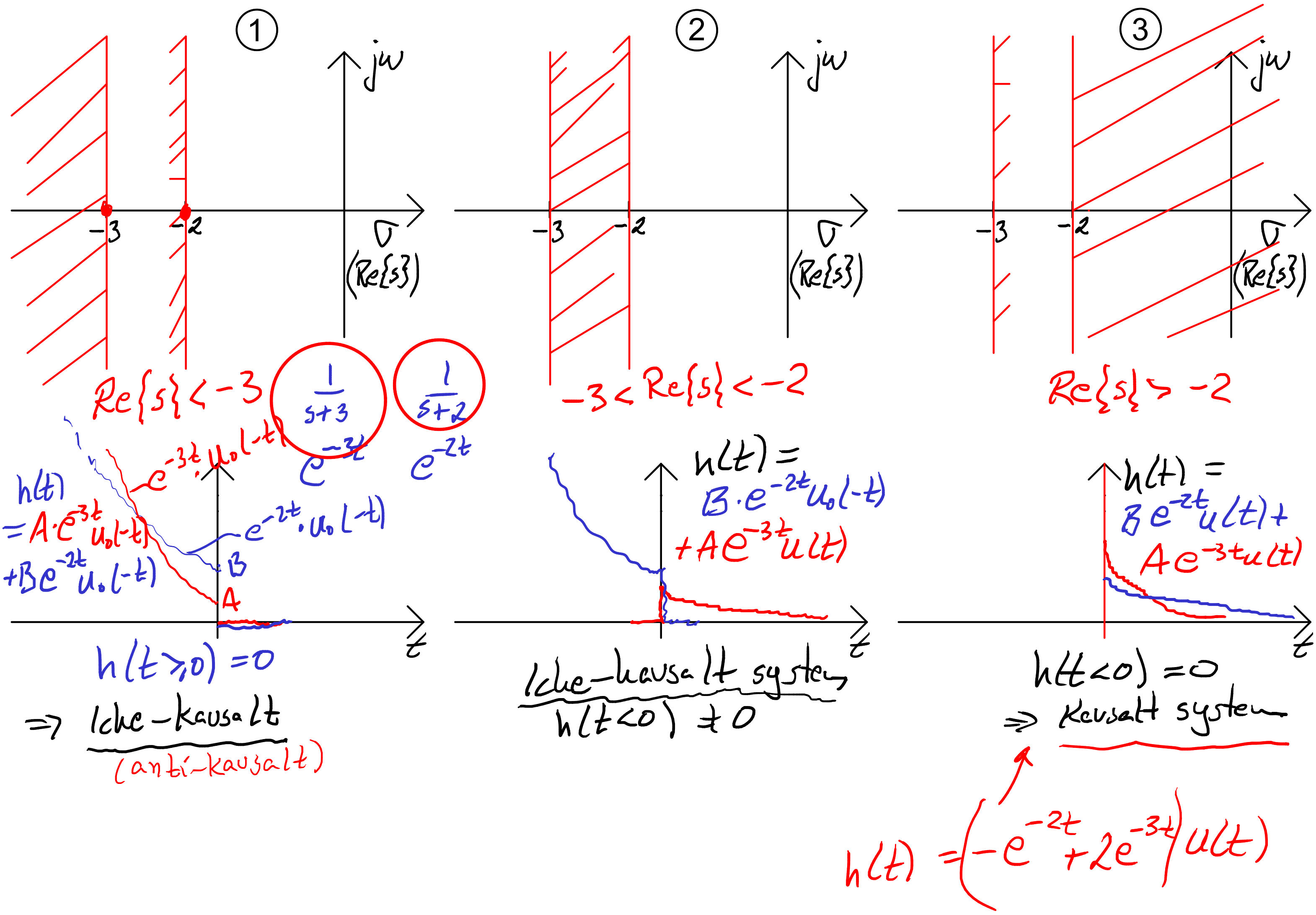
$\mathcal{L}_{II}\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = s^n \cdot Y_{II}(s)$

$\mathcal{L}_{II}\{VL\} = \mathcal{L}_{II}\{HL\} \Rightarrow$

$H(s) = ----$

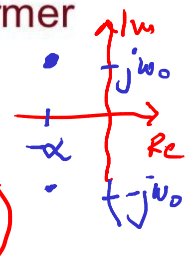
Konvergensområdet för H(s) bestäms av systemets kausalitetsegenskap och/eller stabilitetsegenskap.

$\Longrightarrow$ 3 möjliga system, beroende på konvergensområde för H(s):



Pol-nollställediagram – grafisk representation av laplacetransformer

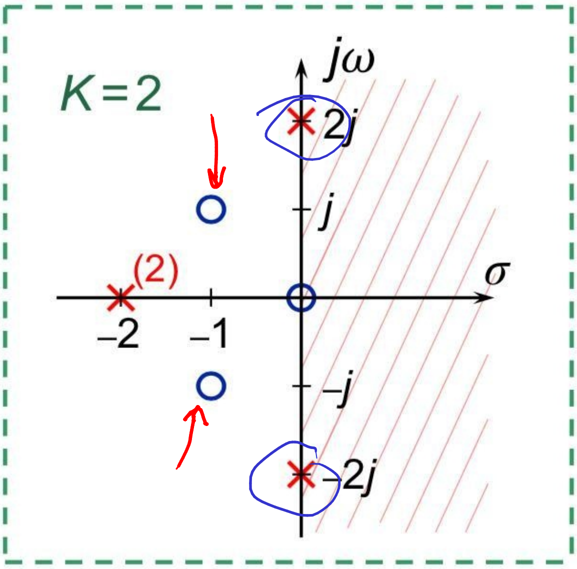
$(s+\alpha)^2 + \omega_0^2$



Exempel – ett LTI-system av ordning 4:

$$H(s) = \frac{2s^3+4s^2+4s}{s^4+4s^3+8s^2+16s+16} = 2\cdot\frac{s\left((s+1)^2+1^2\right)}{(s+2)^2\underbrace{(s+2j)(s-2j)}_{s^2+2^2}}$$

Boken $x^{(2)} \Rightarrow$ ✕✕



Nivåkonstant: $K=2$

Nollställen:
$n_0 = 0$ $\quad n_1 = -1 - j\cdot 1$ $\quad n_2 = -1 + j\cdot 1$

Poler:
$p_1 = p_2 = -2$ $\quad p_3 = -2j$ $\quad p_4 = 2j$

Konvergensområde för $H(s)$
om *kausalt* system: $\mathrm{Re}\{s\} > 0$

Överlagrade pol-nollställediagram

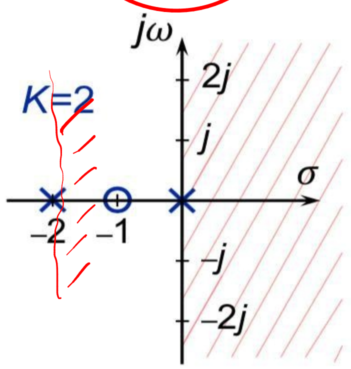
Exempel: $x(t) = (1+e^{-2t})u(t)$ → Kausalt energifritt LTI-system $h(t)$ → $y(t)$

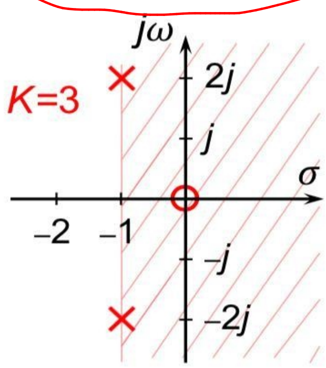
$u(t) + e^{-2t}u(t)$

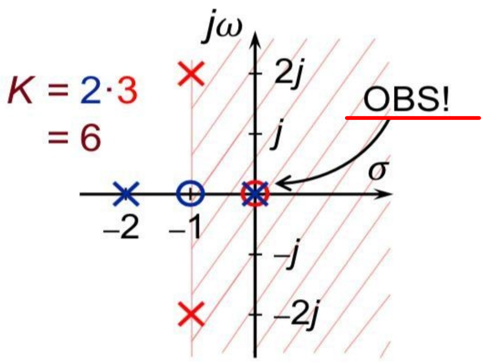
$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} = \frac{2(s+1)}{s(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{3s}{(s+1)^2+2^2}$$

$$Y(s) = X(s)\cdot H(s) = \frac{2(s+1)}{\cancel{s}(s+2)}\cdot\frac{3\cancel{s}}{(s+1)^2+2^2}$$







$$h(t) = A \cdot e^{-1 \cdot t} \cdot \underset{\sin}{\cos}(2t+\varphi)\,u(t)$$

$$H(s) = \frac{3(s+1) - 3}{(s+1)^2 + 2^2} = 3\,\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{3}{2}\,\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$h(t) = 3e^{-t}\cos(2t)u(t) + -\frac{3}{2}e^{-t}\sin(2t)u(t)$$

Stabilitet – för energifria LTI-system

(Externt) stabilt system: (Insignal-utsignal-stabilt)

Varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal

$\Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$ gäller för stabila **LTI**-system

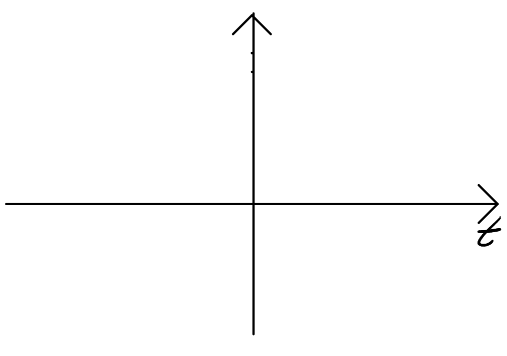
$$s = \sigma + j\omega$$

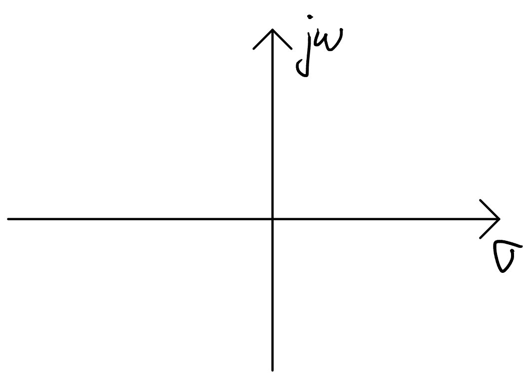
$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) \quad \exists$

$\left(\mathcal{F}\{h(t)e^{-\sigma t}\} \xrightarrow{s=\sigma+j\omega} \mathcal{L}\{h(t)\} \right) \quad \overset{\sigma=0}{\Longrightarrow} \quad \boxed{H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}}$

$\Leftrightarrow$ $j\omega$ -axeln ligger i systemfunktionens konvergensområde!

Konsekvens: Systemfunktionen till ett stabilt system har *minst lika många poler som nollställen* – annars ingår inte $\pm j\infty$ i konvergensområdet





Marginellt stabilt system:

De flesta begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler

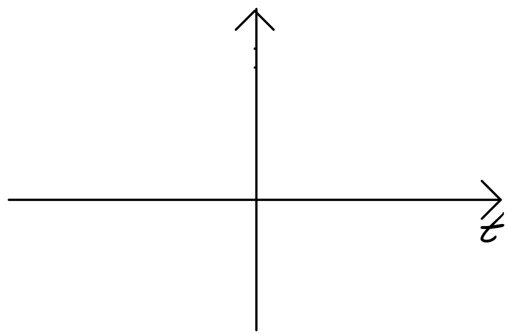
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt \not< \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{cases}$$

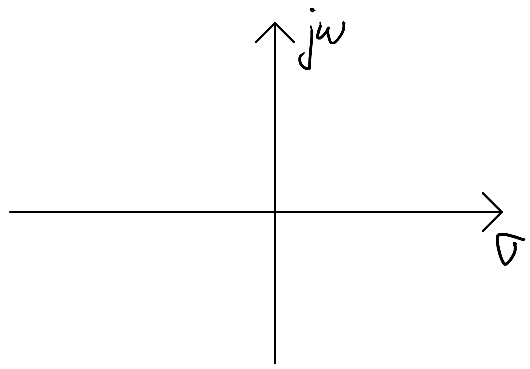
gäller för marginellt stabila **LTI**-system

$\Leftrightarrow$

- $H(s)$ har *minst en enkelpol på* $j\omega$ *-axeln*
- $j\omega$ -axeln utgör en *rand* till konvergensområdet för $H(s)$
- $H(s)$ har minst lika många poler som nollställen (egentligen #P ≥ #N–1)

$$\Rightarrow \quad \boxed{H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega,\, s\neq \text{pol}}}$$





Instabilt system:

Ingen begränsad nollskild insignal kan ge upphov till en begränsad utsignal

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \not< \infty \\ |h(t)| \not< \infty \quad \forall t \end{cases}$$ gäller för instabila **LTI**-system

$\Leftrightarrow$

- $j\omega$ -axeln ligger *inte* i konvergensområdet för $H(s)$

eller

- $j\omega$ -axeln utgör en *rand* till konvergensområdet för $H(s)$ och $H(s)$ har en minst en *multipelpol på* $j\omega$ *-axeln*

$$\Rightarrow \qquad H(\omega) \text{ existerar inte}$$