

Signaler & System – Föreläsning 9: Laplacetransformanalys av LTI-system – Passiva filter

Forts. om STABILITET från förra föreläsningen (Nr. 8)

Följande tre sidor om stabilitet är de tre sista sidorna i materialet från föreläsning 8:

Stabilitet – för energifria LTI-system

(Externt) stabilt system: (Insignal-utsignal-stabilt)

Varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad \text{gäller för stabila LTI-system}$$

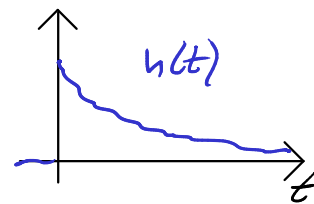
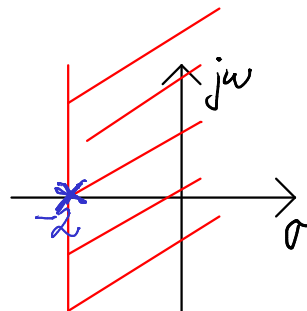
$$\Rightarrow \mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) \quad \exists$$

$$\left(\mathcal{F}\{h(t)e^{-\sigma t}\} \xrightarrow{s=\sigma+j\omega} \mathcal{L}\{h(t)\} \right) \quad \sigma=0 \Rightarrow \boxed{H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}}$$

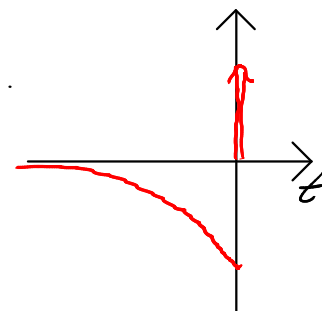
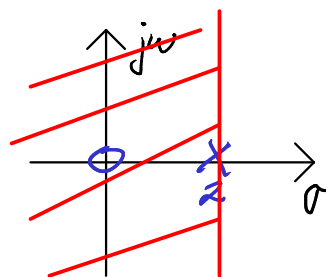
\Leftrightarrow $j\omega$ -axeln ligger i systemfunktionens konvergensområde!

Konsekvens: Systemfunktionen till ett stabilt system har *minst lika många poler som nollställen* – annars ingår inte $\pm j\infty$ i konvergensområdet

Exempel 1: $H(s) = \frac{1}{s+2} \quad \text{Re}\{s\} > -2$
 $h(t) = e^{-2t} u(t)$



Exempel 2: $H(s) = \frac{s}{s-2} \quad \text{Re}\{s\} < 2$
 $H(s) = \frac{s-2+2}{s-2} = 1 + 2 \cdot \frac{-1}{s-2}$
 $h(t) = \delta(t) - 2e^{2t} u(-t)$



Exempel 3:

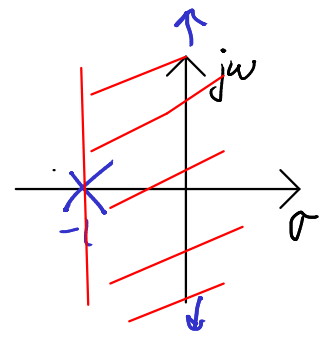
$$H(s) = \frac{s^2}{s+1} \quad \text{Konv. omr. ?}$$

$$|H(s)| \rightarrow \infty \text{ när } |s| \rightarrow \infty$$

$$\#P \geq \#N$$

$$|s| < \infty \quad H(s) = \underbrace{s}_{\text{pol}} - 1 + \frac{1}{s+1} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$s = \frac{1}{1/s}$$



Marginellt stabilt system:

De flesta begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{cases} \quad \text{gäller för marginellt stabila LTI-system}$$

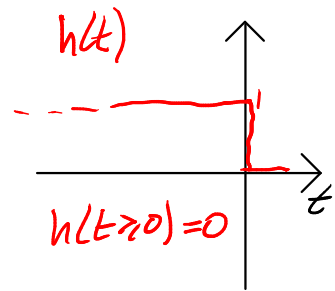
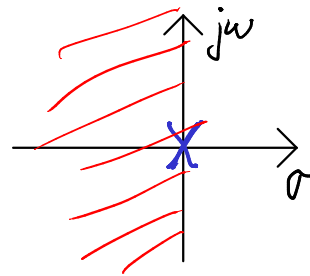
- $$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet H(s) \text{ har minst en enkelpol på } j\omega \text{-axeln} \\ \bullet j\omega \text{-axeln utgör en rand till konvergensområdet för } H(s) \\ \bullet H(s) \text{ har minst lika många poler som nollställen (egentligen } \#P \geq \#N - 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega, s \neq \text{pol}}}$$

Exempel 1:

$$H(s) = \frac{-1}{s} \quad \text{Re}\{s\} < 0$$

$$h(t) = u_0(-t)$$



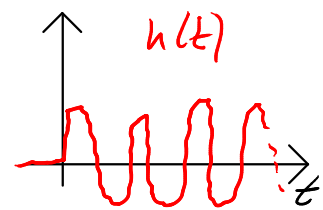
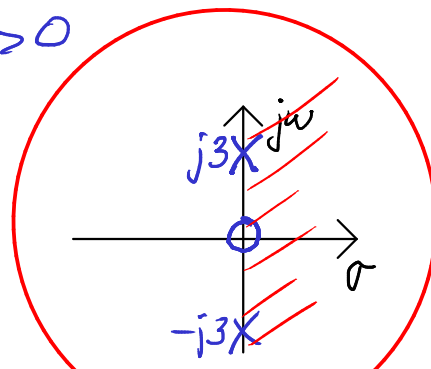
$$+ \pi \delta(\omega - \omega_0) + \pi \delta(\omega + \omega_0)$$

Exempel 2:

$$H(s) = \frac{s}{s^2+3^2} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$h(t) = \cos(3t) u(t)$$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}, \omega \neq \pm 3$$



Instabilt system:

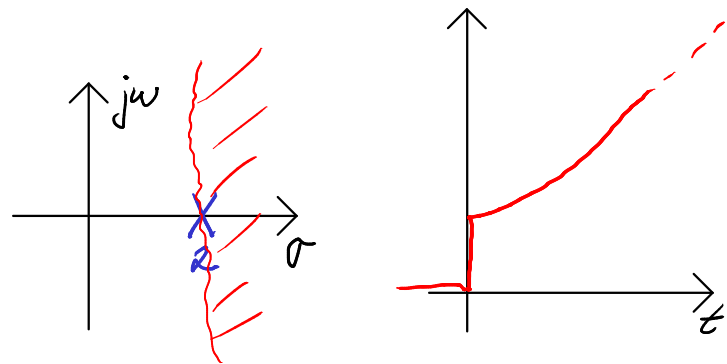
Ingen begränsad nollskild insignal kan ge upphov till en begränsad utsignal

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{cases} \text{ gäller för instabila LTI-system}$$

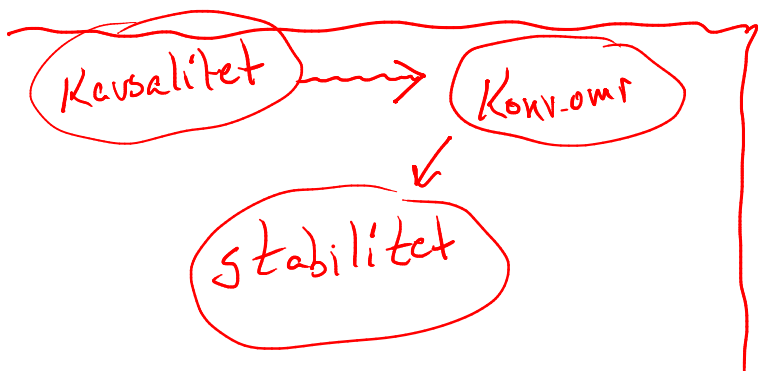
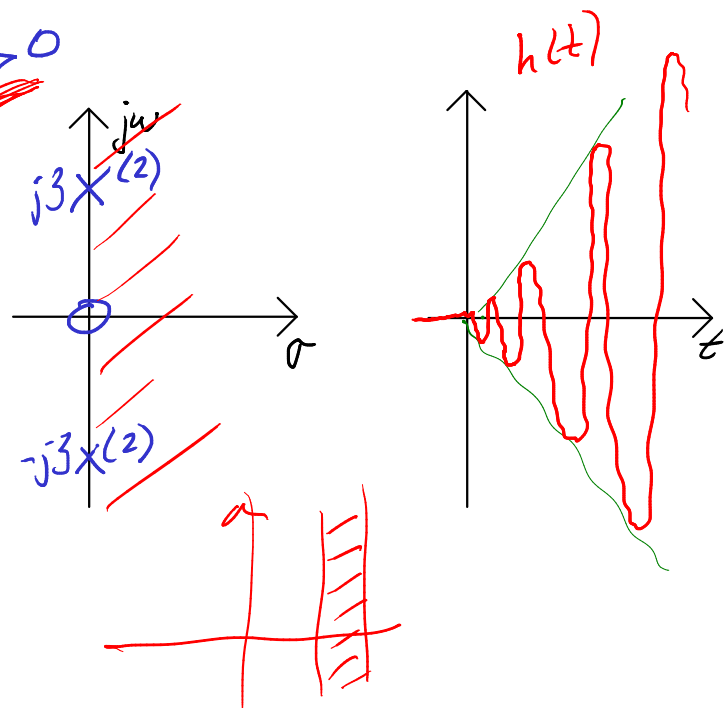
- $$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ } j\omega \text{-axeln ligger inte i konvergensområdet för } H(s) \\ \text{eller} \\ \bullet \text{ } j\omega \text{-axeln utgör en rand till konvergensområdet för } H(s) \\ \text{och } H(s) \text{ har en minst en multipelpol på } j\omega \text{-axeln} \end{cases}$$

$\Rightarrow H(\omega)$ existerar inte

Exempel 1: $H(s) = \frac{1}{s-2} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 2$
 $h(t) = e^{2t} \cdot u(t)$

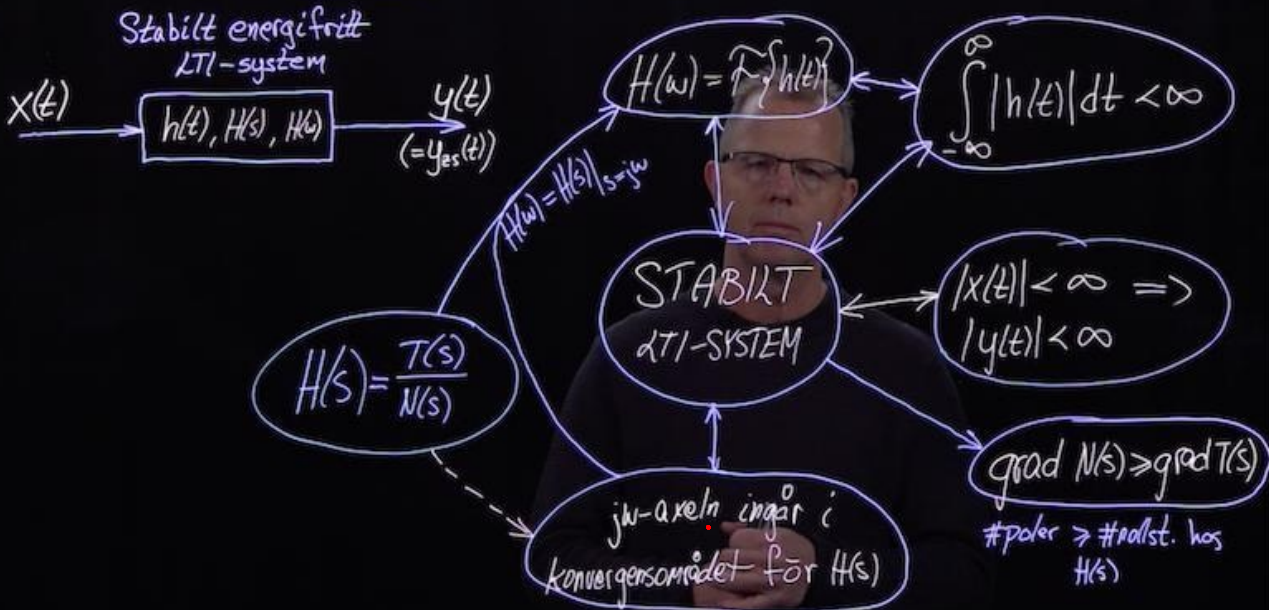


Exempel 2: $H(s) = \frac{s}{(s^2+3^2)^2} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$
 Tab. 5:24
 $h(t) = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot t \cdot \sin(3t) u(t)$



STABILITETSRELATIONER

VIDEO 1



Passiva Filter

Energifritt KTI-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(\omega) \rightarrow y(t) = y_{res}(t) = (x * h)(t)$
 $Y(s) = Y_{res}(s) = X(s) \cdot H(s)$

Ex: $x(t) = A e^{-at} u(t)$
 $\Rightarrow X(s) = \frac{A}{s+a} ; \text{Re}\{s\} > -a$

$H(s) = \frac{B}{s+b} ; \text{Re}\{s\} > -b$
 $K = B$

$Y(s) = \frac{A}{s+a} \cdot \frac{B}{s+b}$
 $\Rightarrow y(t) = \frac{B}{\Delta p} x(t) - \frac{A}{\Delta p} h(t)$
 $\Delta p = b - a = \text{avståndet mellan polerna}$

Systemet förstärker signalen $x(t)$ om:
 • $B > 1$ ($B \uparrow \Rightarrow \text{förstärkn.} \uparrow$)
 • $\Delta p < 1$ ($\Delta p \downarrow \Rightarrow \text{---||---}$)

Bättre, mer korrekt: Förstärkning om $\left| \frac{B}{\Delta p} \right| > 1$ dvs. om $|\Delta p| < |B|$

$E_y \leq E_x$

$x(t) = e^{-90t} u(t)$

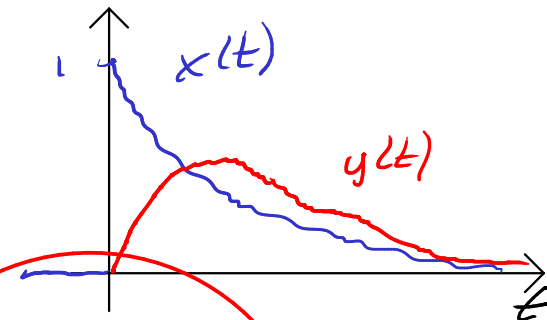
$H(s) = \frac{100}{s+100}$

$h(t) = 100 e^{-100t} u(t)$

$y(t) = (10 e^{-90t} - 10 e^{-100t}) u(t)$

$\frac{B}{\Delta p} = 10$

$E_y \approx 54\% \text{ av } E_x$



Passiva Filter

Energifritt KTI-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(\omega) \rightarrow y(t) = y_{res}(t) = (x * h)(t)$
 $Y(s) = Y_{res}(s) = X(s) \cdot H(s)$

Exempel: $x(t) = e^t u(t) + 2 e^{-3t} \sin(4t) u(t)$
 Filteras bort av KTI-systemet

$X(s) = \frac{1}{s+1} + 2 \cdot \frac{4}{(s+3)^2 + 4^2} \Rightarrow Y(s) = X(s) \cdot H(s) =$
 $= \frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)((s+3)^2 + 4^2)} \cdot \frac{(s+3)^2 + 4^2}{(s-p_1)(s-p_2)}$

Konsekvens/krav för stabilitet: Antal poler \geq Antal nollställen

\Rightarrow Minst 2 poler?
 $p_1 = p_2 = p$

- $h(t)$ -termer i $y(t)$
- placeras långt till vänster i s-planot
- påverkar e^{-t} -termen

Stabilit
LTI-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(\omega)$

$y_{zs}(t) = (x * h)(t)$
 $Y_{zs}(s) = X(s) \cdot H(s)$

Stabilit LTI-system $\Rightarrow H(\omega) \neq 0$

$\Rightarrow Y_{zs}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$; $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$
Frequensselektiv filtrering = $|H(\omega)| \angle \arg H(\omega)$

$\Rightarrow \begin{cases} |Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)| \\ \arg Y(\omega) = \arg X(\omega) + \arg H(\omega) \end{cases}$

Spec fall, stabilt LTI-system med $x(t) = C + \cos/\sin(\omega_0 t) \Rightarrow$
 $y(t) = C \cdot H(0) + |H(\omega_0)| \cos/\sin(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))$

FREKVENSSELEKTIVA PASSIVA FILTER

Exempel, amplitudkar. $|H(\omega)|$:

H_{max}
 $\frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$

$|H(\omega)|$
Amplitudnormerat filter $\Rightarrow H_{max} = 1$

ω_{p1} ω_{p2}
Passbandet Spännband

- ω_{p1}, ω_{p2} = gränsvinkel frekvenser
- Bandbredden $\omega = \omega_{p2} - \omega_{p1}$
- $|H(\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log |H(\omega)|$

$y_{part}(t)$

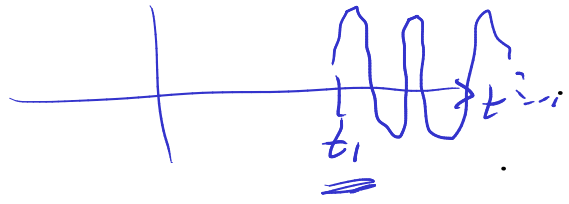
$x(t) = \cos(\omega_0 t) u(t - t_0)$



$y_{zs}(t) = \underbrace{y_{transient}(t)}_{h\text{-termen}} + |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \arg H(\omega_0)) u(t - t_1)$

t_1 bestäms av t_0 & $h(t)$

$h(t) \neq 0$ vid $t=0 \Rightarrow$
 $h(t < 0) = 0 \quad t_1 = t_0$



1. Hur kan vi få en god förståelse för (en intuitiv tolkning av) hur $|H(\omega)|$ och $\arg H(\omega)$ ser ut grafiskt utgående från pol-nollställediagrammet för $H(s)$?

2. Hur kan vi själva placera/välja poler och nollställen hos $H(s)$ så vi erhåller önskad amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$ och faskaraktäristik $\arg H(\omega)$?

$|H(\omega)|$ & $\arg H(\omega)$ från pol-nollställevektorer

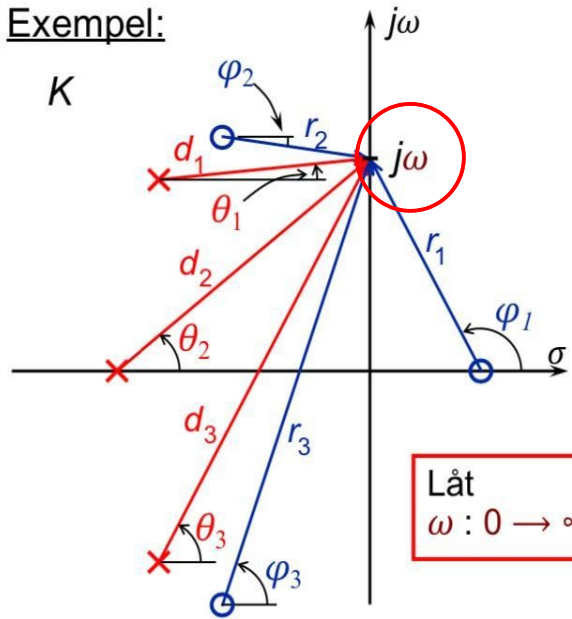
Stabilt LTI-system
 \downarrow
 $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \left\{ \begin{aligned} &K \cdot \frac{(j\omega - n_1)(j\omega - n_2) \dots (j\omega - n_M)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_N)} = K \cdot \frac{r_1 e^{j\varphi_1} r_2 e^{j\varphi_2} \dots r_M e^{j\varphi_M}}{d_1 e^{j\theta_1} \cdot d_2 e^{j\theta_2} \dots d_N e^{j\theta_N}} \end{aligned} \right.$

$$|H(\omega)| e^{j \arg H(\omega)}$$

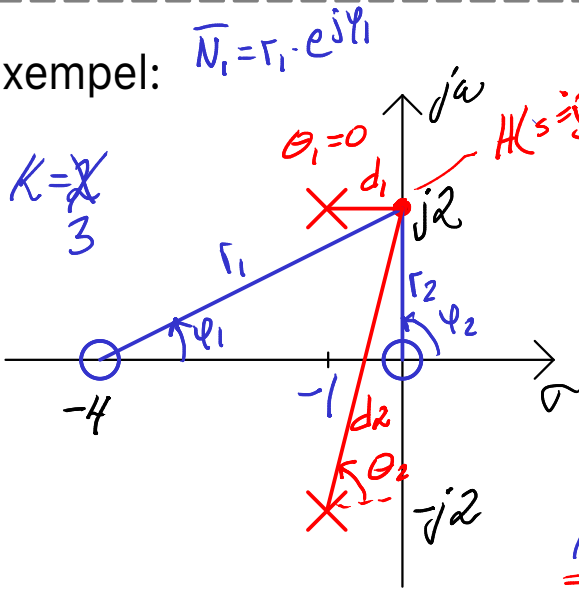
$$|H(\omega)| = |K| \cdot \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_M}{d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_N}$$

$$\arg H(\omega) = \arg K + (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_M) - (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_N)$$

Exempel:



Exempel:



$H(s) = 3 \frac{s(s+4)}{(s+1)^2 + 2^2}, \text{Re}\{s\} > -1$

$x(t) = \cos(2t)$

Krav? Stabilt LTI-system

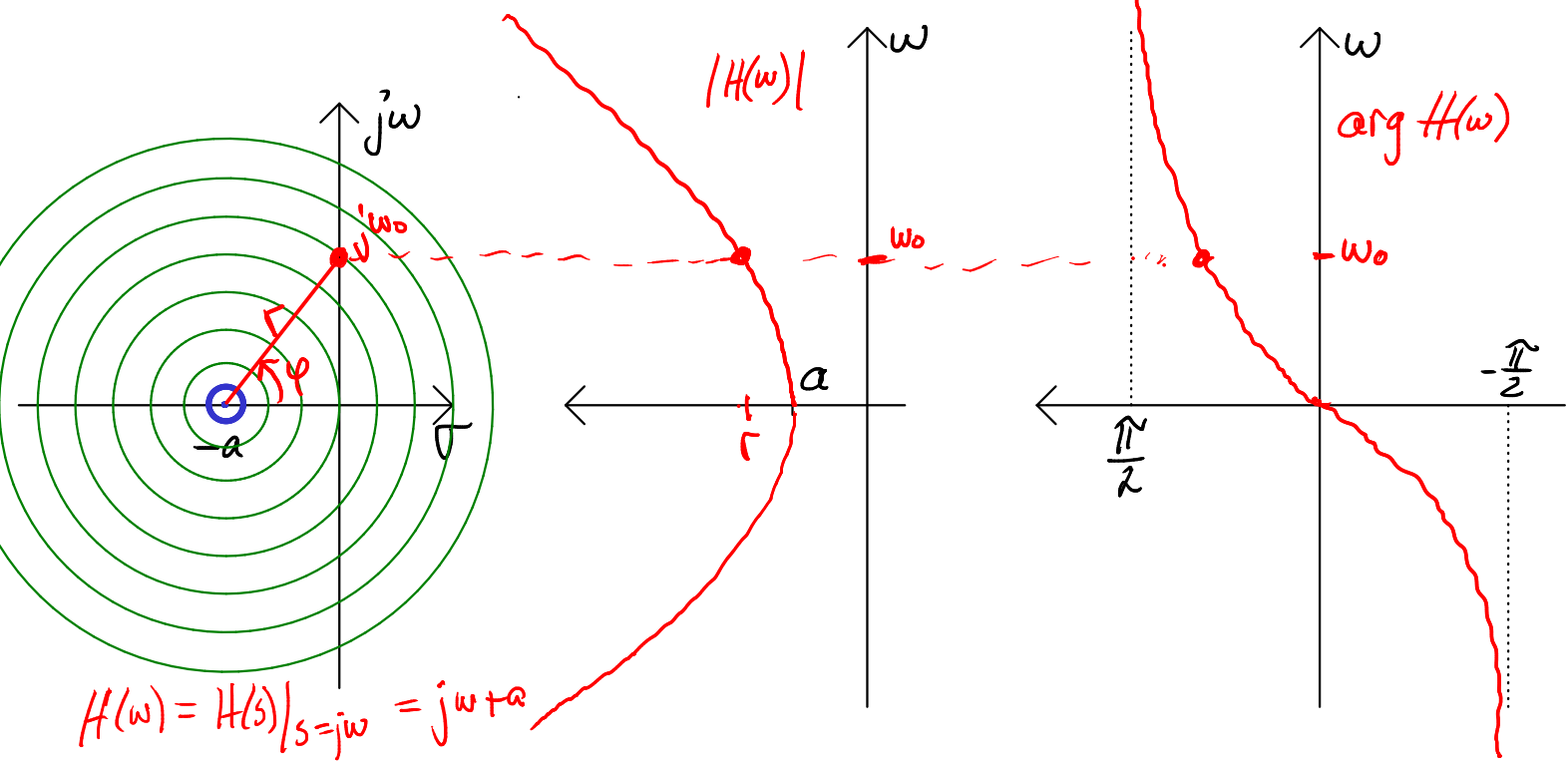
$y(t) = |H(2)| \cdot \cos(2t + \arg H(2))$

$|H(2)| = 3 \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{d_1 \cdot d_2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{4+2^2} \cdot 2}{1 \cdot \sqrt{1^2+4^2}} \approx 6,5$

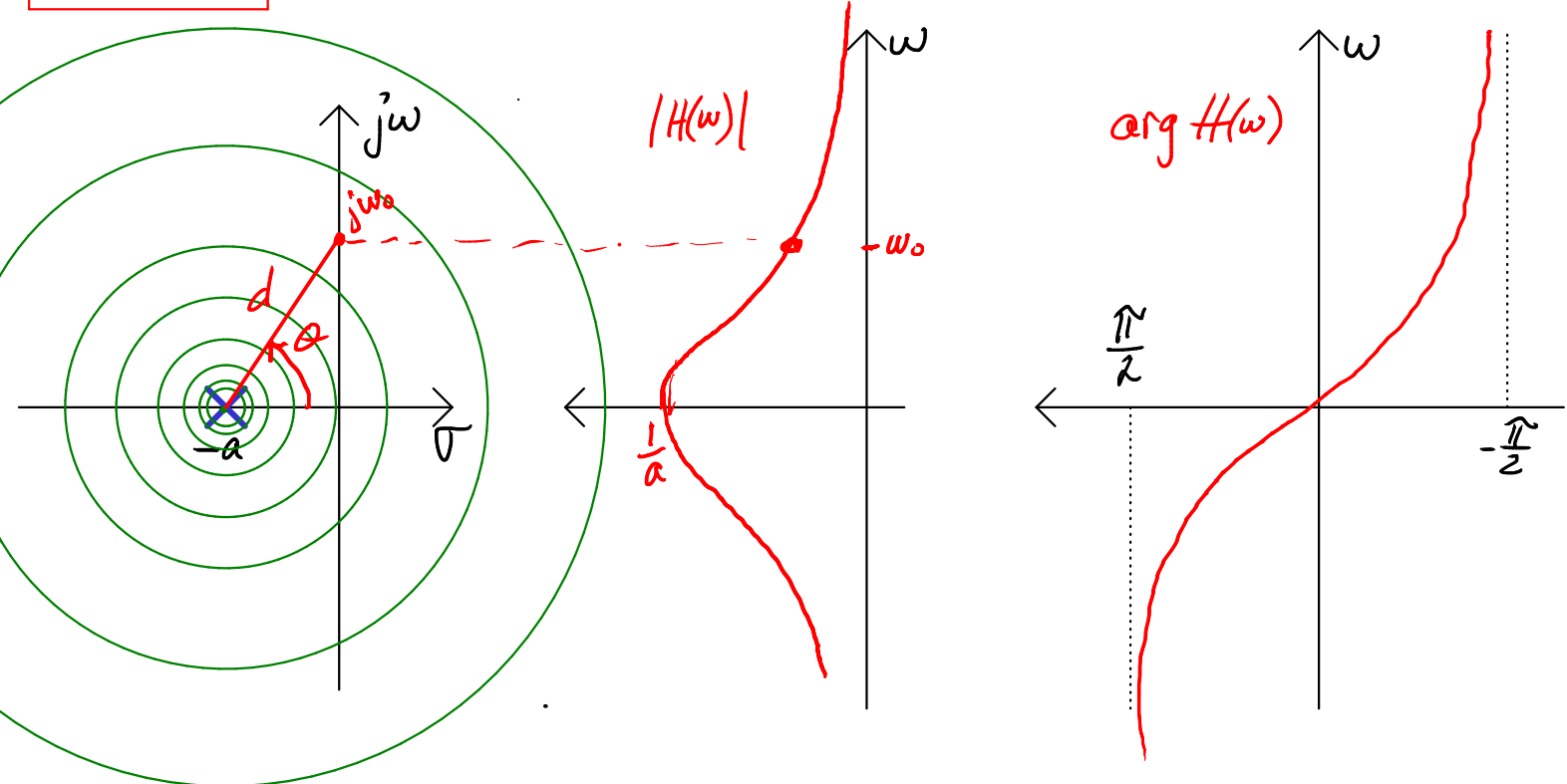
$\arg H(2) = \arg 3 + \varphi_1 + \varphi_2 - \theta_1 - \theta_2$
 $= 0 + \arctan \frac{2}{4} + \frac{\pi}{2} - 0 - \arctan \frac{4}{1} \approx 0,71 \text{ rad}$
 $\equiv 0,71 - 2\pi \approx -5,6 \text{ rad} (\approx 321^\circ)$

$y(t) \approx 6,5 \cos(2t + 0,71)$

$H(s) = s + a$ har nollställe i $s = -a$:



$H(s) = \frac{1}{s+a}$ har pol i $s = -a$:



(Demo i pzchange i båda fallen ovan!)

Demo i pzchange av tidigare exempel med

$$H(s) = 3 \frac{s(s+4)}{(s+1)^2 + 2^2}, \text{Re}\{s\} > -1$$

Kommentar efter föreläsningen:

Det blev inget demo i pzchange baserat på denna systemfunktion $H(s)$. Jag improviserade i stället utgående från exemplen på föregående sida.

Stabilitet
LTI-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(\omega) \rightarrow y_{\text{res}}(t) = (x * h)(t)$
 $Y_{\text{res}}(s) = X(s) \cdot H(s)$

FREKVENSSELEKTIVA PASSIVA FILTER

$x(t) = C + \cos/\sin(\omega_0 t) \xrightarrow{\text{Stabilitet LTI}} y(t) = C \cdot H(\omega_0) + |H(\omega_0)| \cos/\sin(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))$

Olika amplitudnormerade frekvensselektiva filtertyper

Lågpassfilter (LP-)
Ideal
Approx-filter (Egenskapskriteriet)

Högpassfilter (HP-)
Ideal
Approx-filter

Bandpassfilter (BP-)
Ideal-filter
Approx-filter

Bandspärfilter (BS-)
Approx.
Ideal

Allpassfilter (AP-)

$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

$H(s)$

VIDEO 3.2