

Signaler & System – Föreläsning 10:

- Laplacetransformanalys av LTI-system – Frekvensselektiva filter
- Tidsdomänanalys av tidsdiskreta signaler & system

från förra föreläsningen:

Stabilt LTI-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(\omega) \rightarrow y_{zs}(t) = (x * h)(t)$
 $Y_{zs}(s) = X(s) \cdot H(s)$

Stabilt LTI-system $\Rightarrow H(\omega) \exists$

$\Rightarrow Y_{zs}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$; $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

Frekvensselektiv filtrering

$|H(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)|$
 $\arg H(\omega) = \arg X(\omega) + \arg H(\omega)$

Spec fall, stabilt LTI-system med $x(t) = C + \cos/\sin(\omega_0 t) \Rightarrow$

$y(t) = C \cdot H(\omega_0) + |H(\omega_0)| \cos/\sin(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))$

FREKVENSSELEKTIVA PASSIVA FILTER

Exempel, amplitudkar. $|H(\omega)|$:

Amplitudnormerat filter $\Rightarrow H_{max} = 1$

Passbandet

Spårband

- ω_{p1}, ω_{p2} = gränsvinkel frekvenser
- Bandbredden $W = \omega_{p2} - \omega_{p1}$
- $|H(\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log |H(\omega)|$

VIDEO 3.1

Stabilt LTI-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(\omega) \rightarrow y_{zs}(t) = (x * h)(t)$
 $Y_{zs}(s) = X(s) \cdot H(s)$

Olika amplitudnormerade frekvensselektiva filtertyper

FREKVENSSELEKTIVA PASSIVA FILTER

$x(t) = C + \cos/\sin(\omega_0 t) \xrightarrow[\text{LTI}]{\text{Stabilt}} y(t) = C \cdot H(\omega_0) + |H(\omega_0)| \cos/\sin(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))$

Lågpass filter (LP)

Idealt

Approx-filter (Försiktighet)

Högpass filter (HP)

Idealt

Approx-filter

Bandpass filter (BP)

Idealt filter

Approx-filter

Bandspärfilter (BS)

Approx

Idealt

Allpass filter (AP)

$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

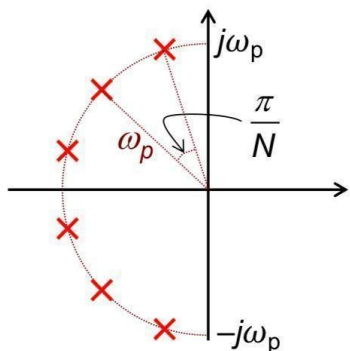
VIDEO 3.2

1. Hur kan vi få en god förståelse för (en intuitiv tolkning av) hur $|H(\omega)|$ och $\arg H(\omega)$ ser ut grafiskt utgående från pol-nollställediagrammet för $H(s)$?

2. Hur kan vi själva placera/välja poler och nollställen hos $H(s)$ så vi erhåller önskad amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$ och faskaraktäristik $\arg H(\omega)$?

Butterworthfilter – (LP-filter)

Poler hos $H(s)$ längs en halvcirkel:

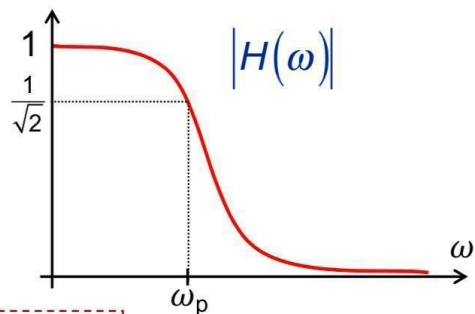


Poler:

$$p_k = \omega_p \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{N}\right)}$$

$$k = 1, 3, 5, \dots, 2N - 1$$

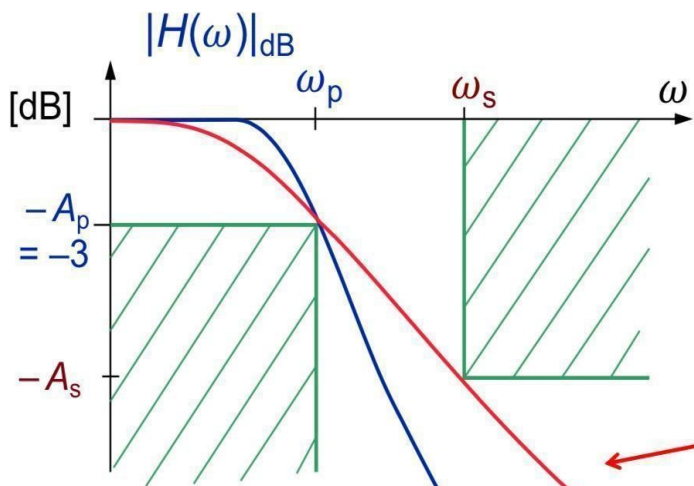
$\omega_p = 3 \text{ dB-gränsvinkelfrekvensen}$



$$H(s) = \frac{\omega_p^N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s + \omega_p^N}$$

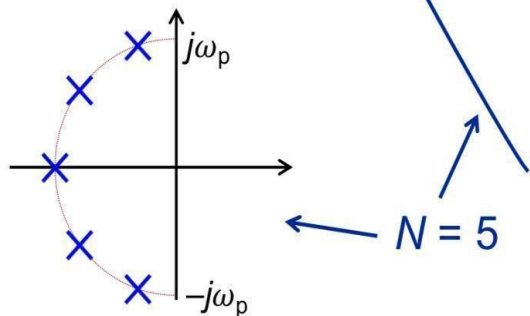
a_i erhålls vanligen från tabell eller genom utveckling av $(s-p_1)(s-p_3)\dots(s-p_{2N-1})$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}}$$

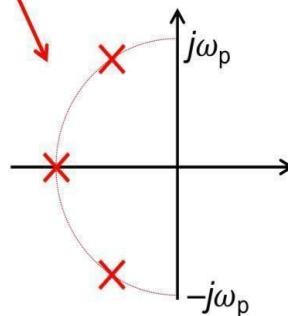


Butterworthfilter har maximalt flat amplitud-karakteristik i passbandet!

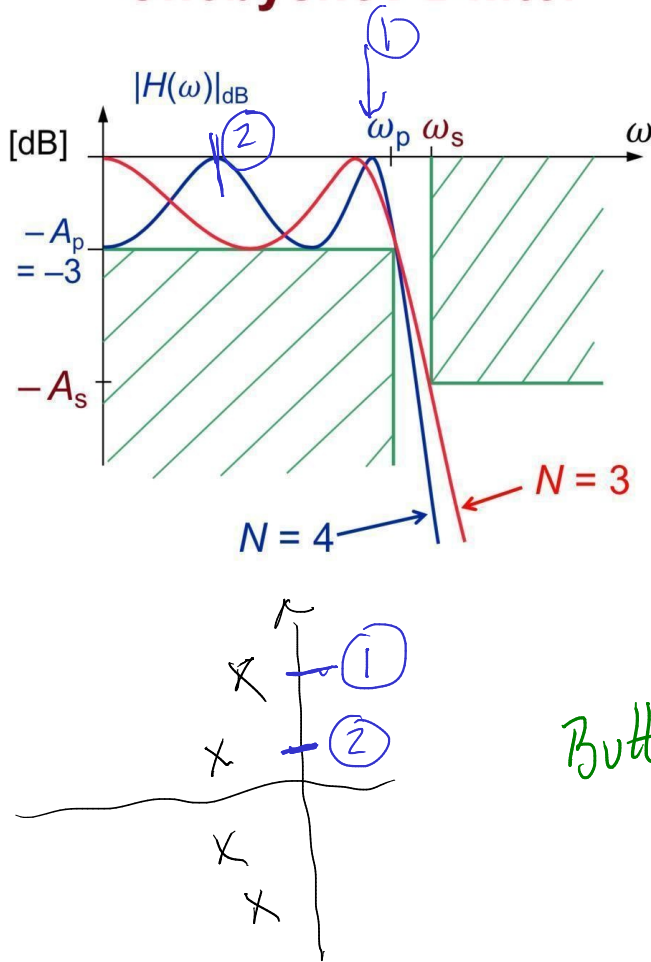
(Butt.filter ger bästa möjliga passbands-approximationen)



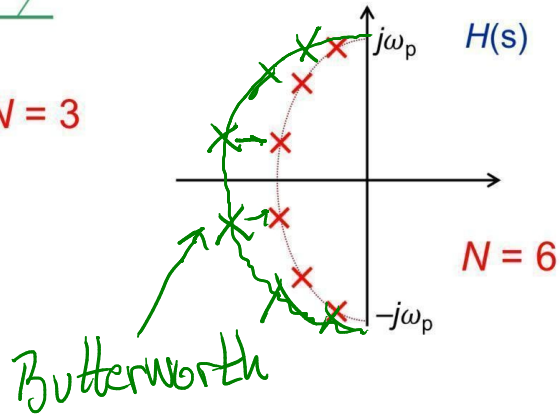
$N = 3$



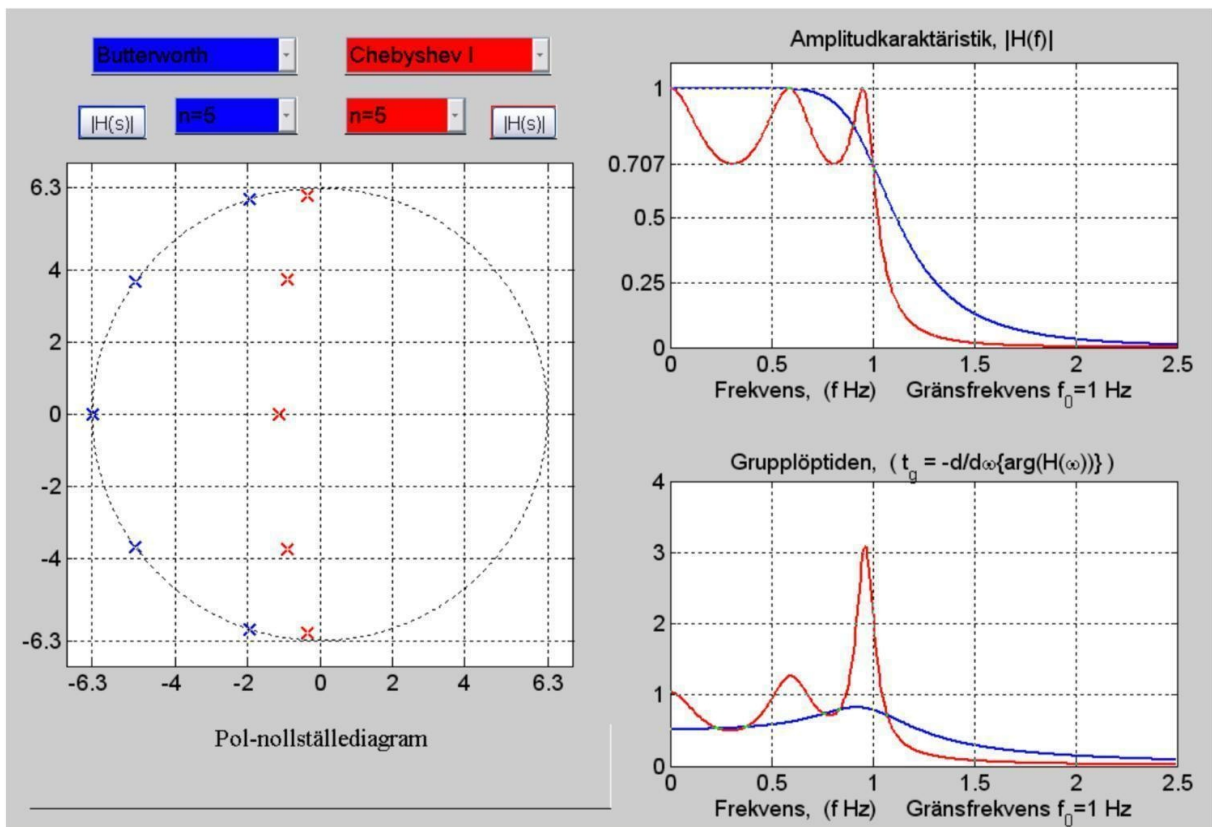
Chebyshev I-filter



- Rippel (A_p dB) i passbandet!
- Optimalt m.a.p. brantheten i övergångsbandet $\omega_p \rightarrow \omega_s$
- Polerna hos $H(s)$ ligger längs en halv-ellips i VHP

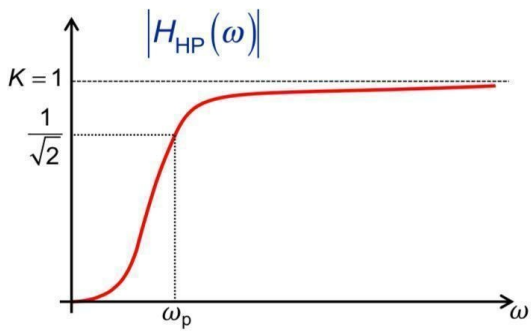
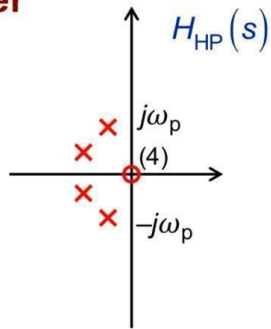


Matlabdemo – Butterworth- & Chebyshevfilter:

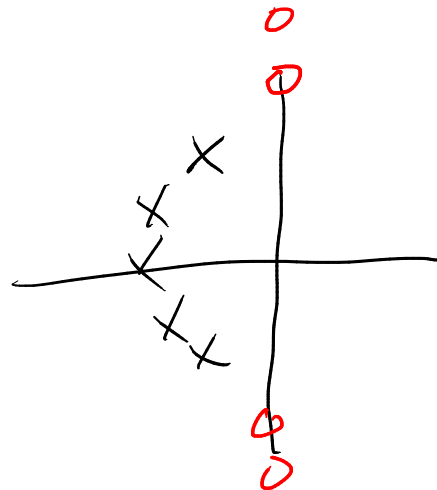
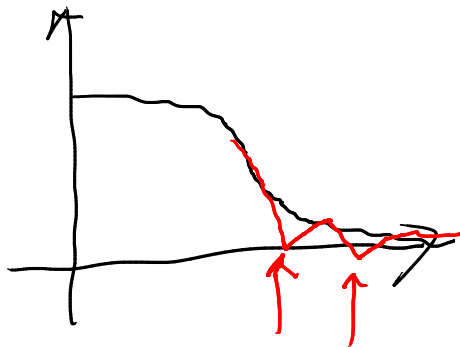
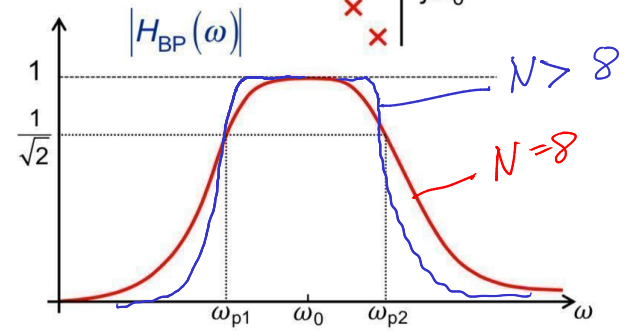
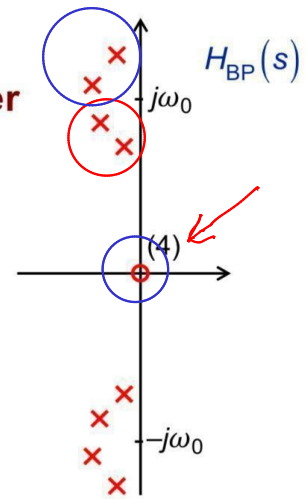


Typiska HP- & BP-filter

Högpasfilter

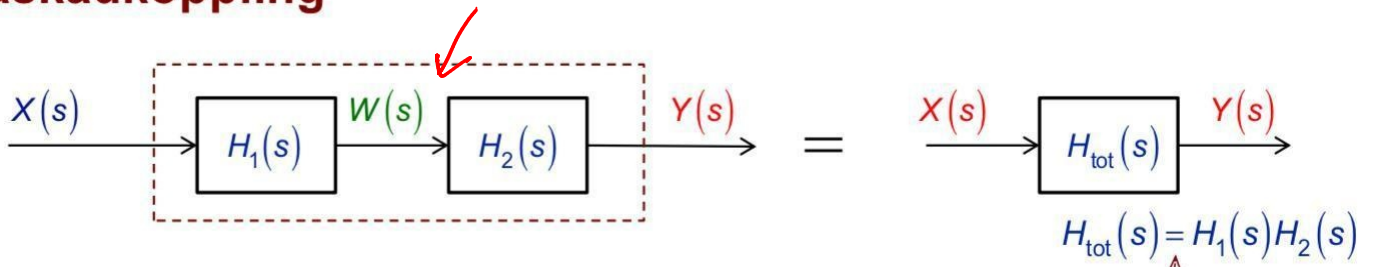


Bandpassfilter



Systemsammankopplingar – kap. 4.5

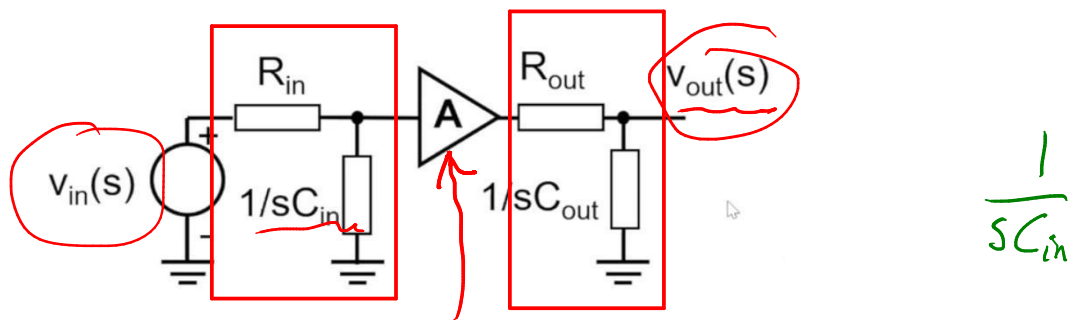
Kaskadkoppling



OBS: gäller bara om **system H_2 inte belastar system H_1 !**

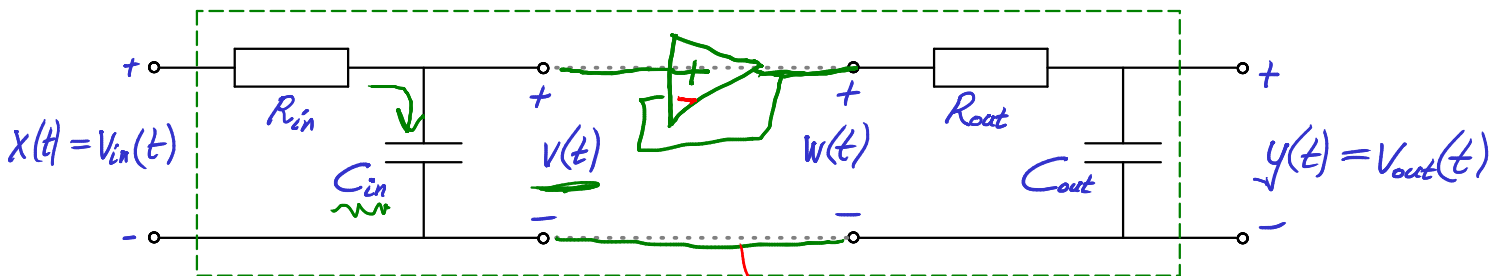
$$h_{tot}(t) = (h_1 * h_2)(t)$$

Jämför med Atilas exempel på kaskadkopplade system på gästföreläsningen i tisdags:



$$C \rightarrow \frac{1}{j\omega C} \quad L \rightarrow j\omega L$$

$H(s)$



$$\Rightarrow H_1(s) = \frac{V(s)}{V_{in}(s)}$$

$$\Rightarrow H_2(s) = \frac{V_{out}(s)}{W(s)}$$

$V(s) \stackrel{\text{sp.d.}}{=} W(s)$

$$W(t) = V(t)$$

$$H_{tot}(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

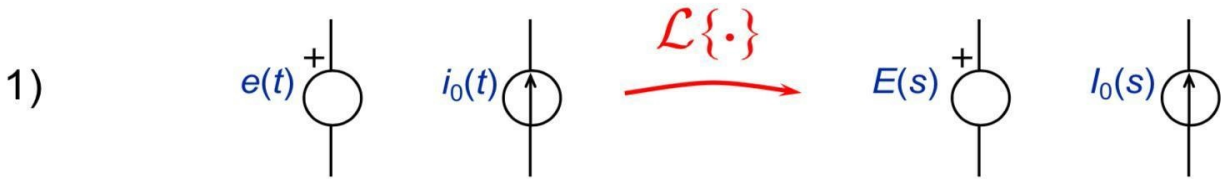
$$V_{out}(s) = \left[V_{in}(s) \frac{1}{sC_{in}} A \right] \frac{1}{R_{out} + \frac{1}{sC_{out}}} = V_{in}(s) A \left(\frac{1}{sC_{in}R_{in} + 1} \right) \left(\frac{1}{sC_{out}R_{out} + 1} \right)$$

$$H_{tot}(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = A \frac{1}{(sC_{in}R_{in} + 1)(sC_{out}R_{out} + 1)} = A \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_{in}} + 1\right) \left(\frac{s}{\omega_{out}} + 1\right)}$$

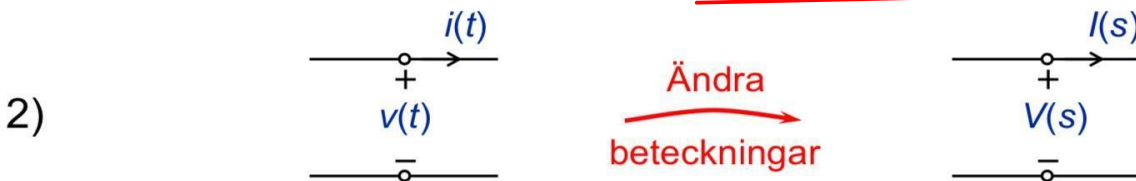
Kretsberäkningar, linjära RLMC-nät

METODIK, beräkna godtycklig nätspänning /-ström:

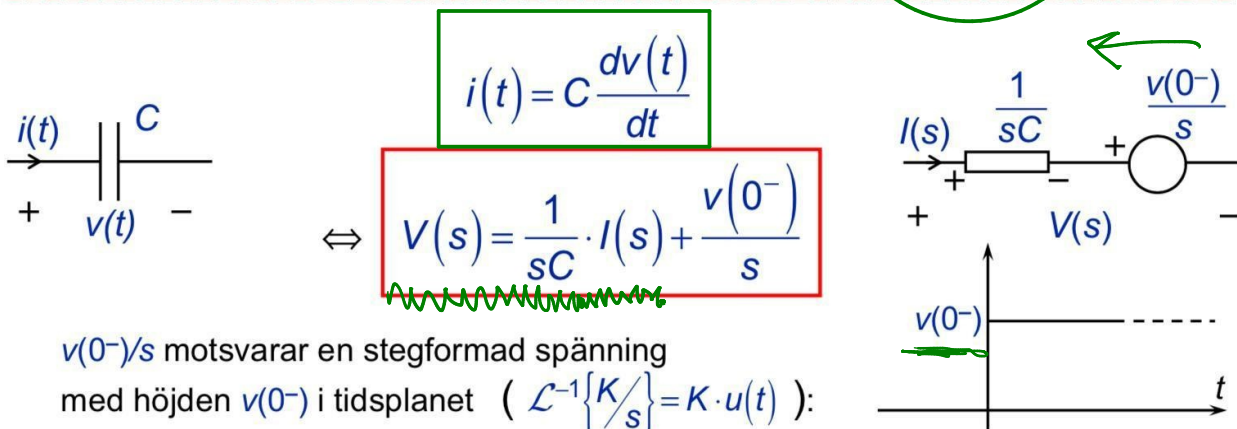
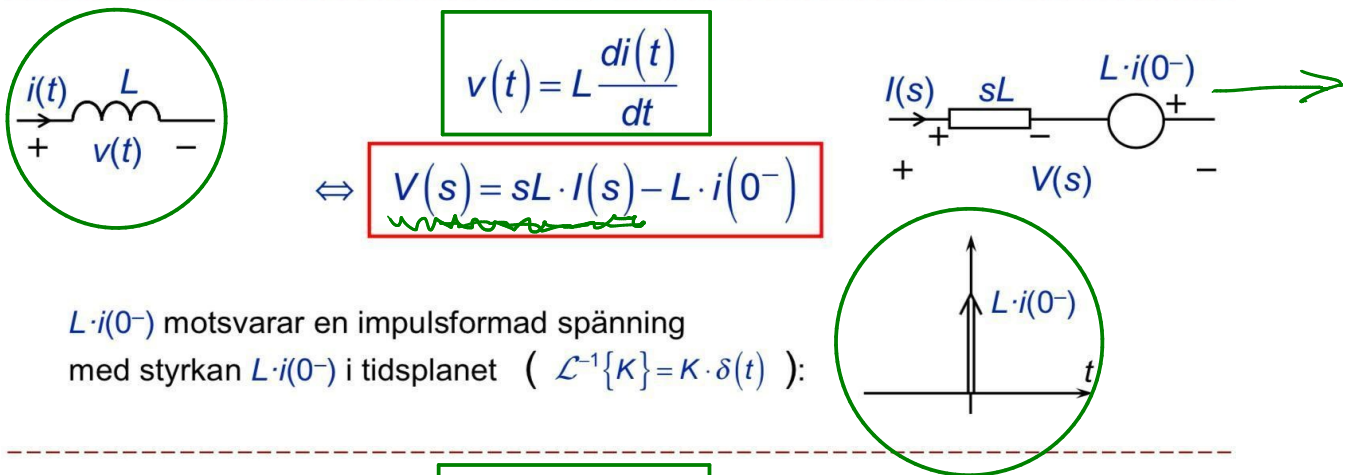
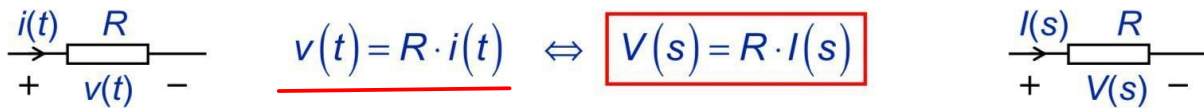
Steg 1–3 = Gör om nätet till ekvivalent operatorschema



Om nätförändringar sker vid $t = t_0$ (här antas $t_0 = 0$) \Rightarrow Betrakta alla källor som inkopplade vid $t = t_0 \Rightarrow \mathcal{L}\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = X(s)e^{-st_0}$



3) Ersätt passiva nätelement med komplexa **impedanser**:

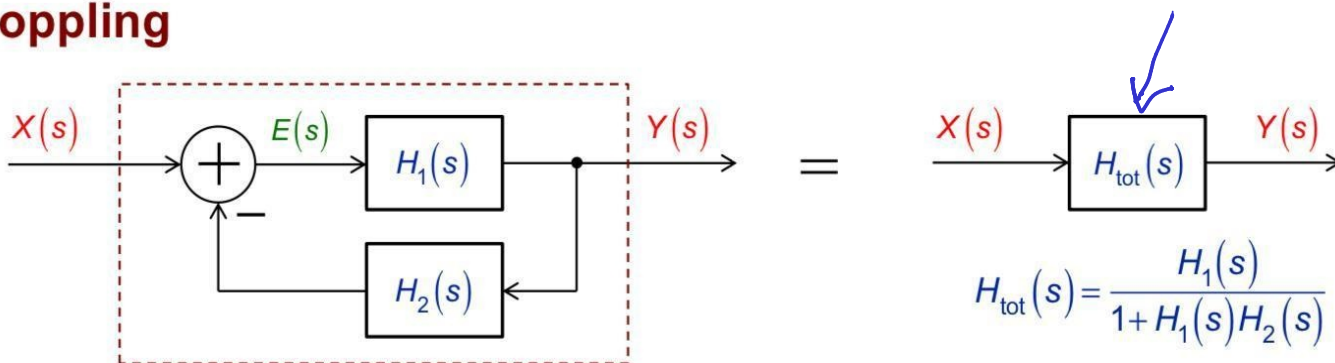


$$\mathcal{F} = \mathcal{L}/s = j\omega$$

- 4) Likströmsteori \Rightarrow Sökt storhets laplacetransform
($Y(s)$)
- 5) Inverstransformera \Rightarrow Sökt storhets tidsuttryck
($y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ Y(s) \}$)

Nu går vi tillbaka till kaskadkopplingsexemplet två sidor tidigare och slutför resonemanget där...

Återkoppling



Används vanligen för **stabilisering/reglering** av system samt för att göra det totala systemet **tåligare mot parametervariationer** (se även kap. 4.7)

Exempel på stabilisering av ett kausalt instabilt LTI-system genom återkoppling:

$H_1(s) = \frac{s}{s-1}, \text{Re}\{s\} > 1$

Korrigerad i efterhand:
 Systemfunktionen ska vara $H_1(s) = \frac{1}{s-1}$
 dvs. tag bort nollstället!

$\text{Lä } H_2(s) = \frac{4}{s+3}, \text{Re}\{s\} > -3$

$\kappa=4$

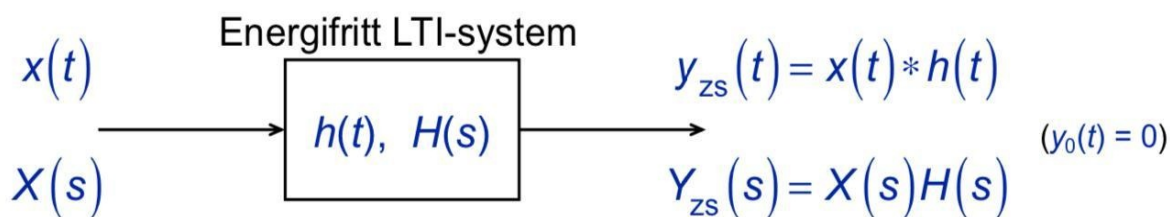
$$Y(s) = E(s) \cdot H_1(s)$$

$$E(s) = X(s) - Y(s)H_2(s)$$

$$\Rightarrow H_{\text{tot}}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = \frac{s+3}{(s+1)^2}$$

Kausalt system, $\text{Re}\{s\} > -1$

Analys m.h.a. dubbelsidig laplacetransform



- Om $x(t)$ är icke-kausal ($x(t < 0) \neq 0$) och/eller systemet är icke-kausal ($h(t < 0) \neq 0$) så används den **dubbelsidiga laplacetransformen!**
- Håll koll på konvergensområdet – använd korrekt transformpar!!
- Repetera – läs själv i **Kap. 4.11!**
- OBS – tänk på:
 - För ett **stabil** LTI-system ingår $j\omega$ -axeln i konv.området för $H(s)$
 - ⇒ om systemet även är **icke-kausal**, så har $H(s)$ minst en pol i **höger halvplan**

$$\left. \begin{array}{l} h(t < 0) = 0 \\ x(t < 0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow y(t < 0) = 0$$

\int_{-}^+ , $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$

Tidsdomänanalys av tidsdiskreta signaler & system

VIDEO 1

TIDSDISKRETA SIGNALTYPER

$x(t)$

Likformig sampling: $x[n] = x(nT)$

$x[n]$

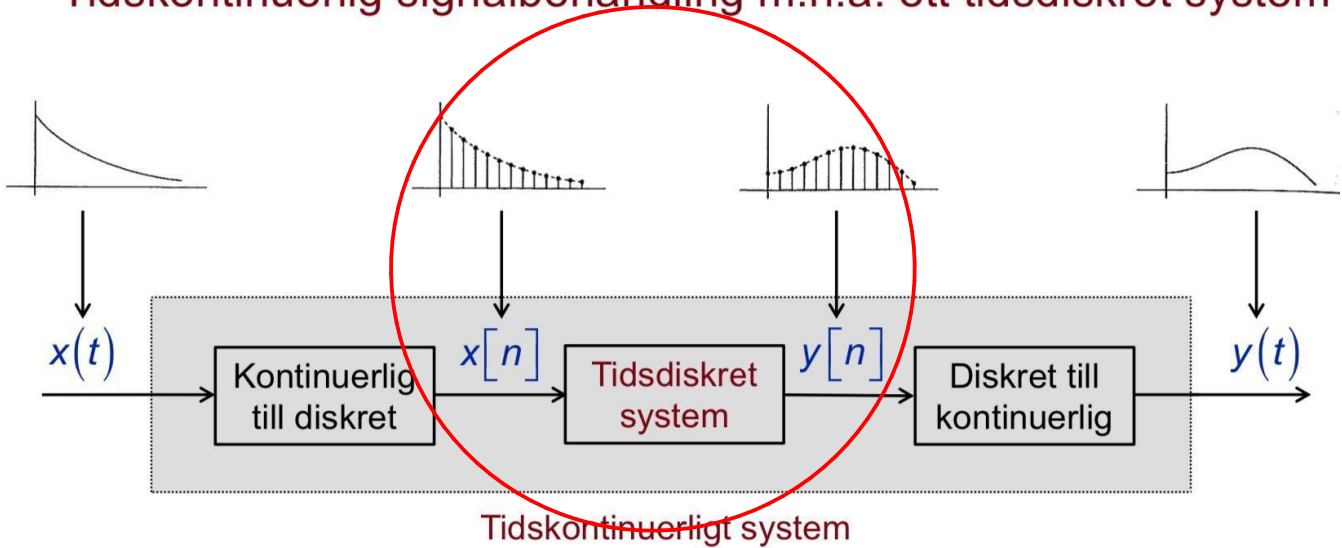
- Energisignaler
 har ändlig signalenergi E_x
 $0 < E_x < \infty, P_x = 0$
 $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$
 (Jfr. $E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$)
- Effektssignaler
 har ändlig signaleffekt P_x
 $0 < P_x < \infty, E_x = \infty$
 $P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$
 (Jfr. $P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$)

Om $x[n]$ är N_0 -periodisk:

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=N_0} |x[n]|^2 \quad \left(\text{Jfr. } P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt \right)$$

- kausalt signal | $x[n] = 0; n < 0$
- Antikausalt signal: $x[n] = 0; n > 0$

Tidskontinuerlig signalbehandling m.h.a. ett tidsdiskret system



TIDSDISKRETA SIGNALOPERATIONER

• Skifting

• Spiegling

• Expanding

• Decimering (Nedsampling)

• Interpolering (upsampling)

$$x_e[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{L}] & ; n=k \cdot L \\ 0 & ; \text{f.ø.} \end{cases}$$

$$x_e[\omega] = X[k \cdot \omega]$$

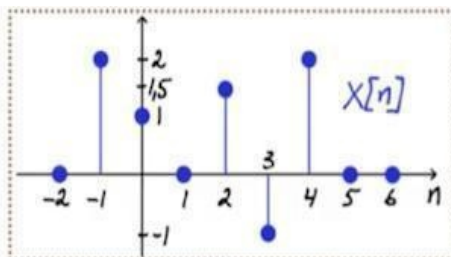
$$\bar{x}_e(\omega) = \bar{X}(L \cdot \omega)$$

Tidsdiskreta signalmodeller

Tidskontinuerligt

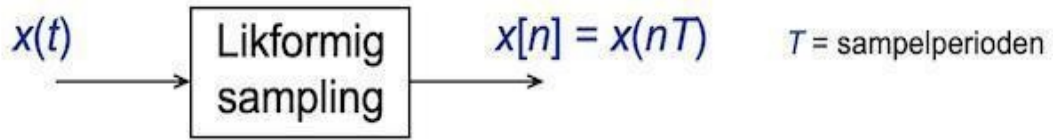
Tidsdiskret

$x(t)$	$x[n]$
<p><u>Diracimpulsen</u> (enhetsimpulsen)</p> $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$	<p><u>Enhetsimpulssekvensen</u> (Kroneckers delta)</p> $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$

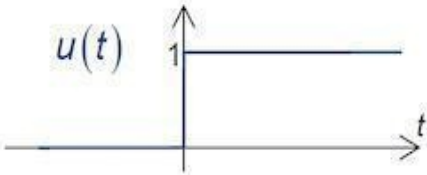


$x[-1]$

$$x[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n] + 1,5\delta[n-2] - \delta[n-3] + 2\delta[n-4]$$

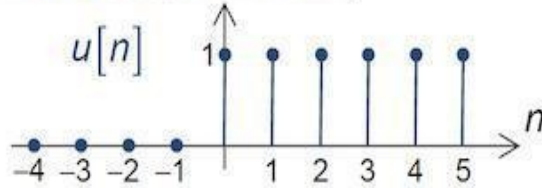


Enhetssteget



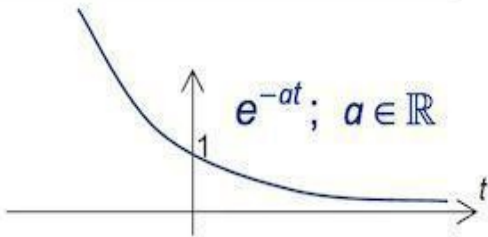
$$u(t) = \begin{cases} 1; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$$

Enhetsstegsekvensen

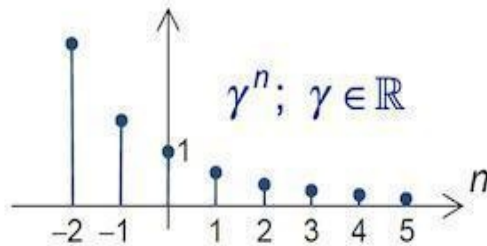


$$u[n] = \begin{cases} 1; & n \geq 0 \\ 0; & n < 0 \end{cases}$$

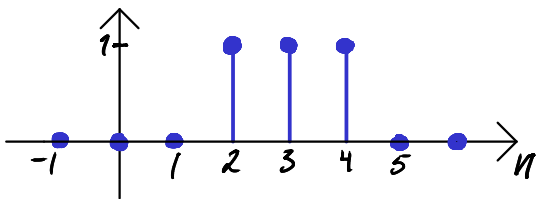
Reella exponentialfunktioner



Reella exponentialekvensen



$$\underline{e^{at}} \Big|_{t=nT} = \underline{e^{-anT}} = \underline{(e^{-aT})^n} = \underline{\gamma^n}$$

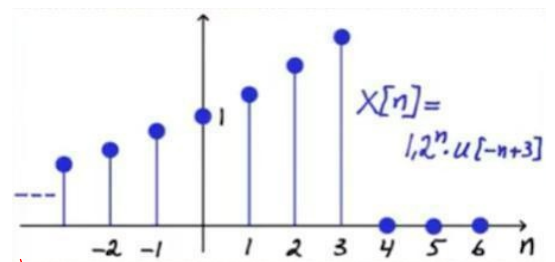
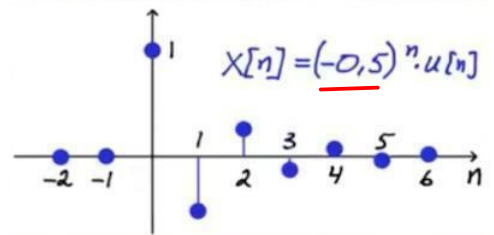


$$x[n] = u[n-2] - u[n-6] = \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4]$$

5

$$\delta[n] = \underline{u[n] - u[n-1]}$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$



Komplexa exponentialfunktionen

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{Periodtid: } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

ω

(Förväxla inte T_0 med sampelperioden T)

Komplexa exponentialekvansen

$$e^{j\omega_0 n T} = \boxed{/\Omega = \omega T /} = e^{j\Omega_0 n}$$

$$= \cos(\Omega_0 n) + j \sin(\Omega_0 n)$$

Cosinus-
sekvansen

Sinus-
sekvansen

$$\Omega = \omega T = \frac{\omega}{f_s}$$

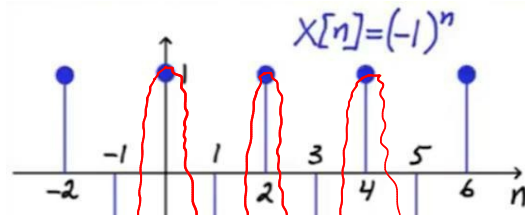
Ω : Normerad vinkelfrekvens [rad]

$$\Omega = 2\pi \Theta \quad \Theta: \text{Normerad frekvens}$$

Om $x[n] = \cos(\Omega_0 n)$ är N -periodisk
 $\Rightarrow x[n+N] = x[n]$ dvs.
 $\cos(\Omega_0(n+N)) = \cos(\Omega_0 n + \Omega_0 N) = \cos(\Omega_0 n)$
 $\Rightarrow \underline{\Omega_0 N = k \cdot 2\pi}$
 Dvs. om $\frac{2\pi}{\Omega_0} \in \mathbb{Q} \left(\frac{N}{k}\right) \Rightarrow$
 $\cos(\Omega_0 n)$ (& $\sin(\Omega_0 n)$ & $e^{j\Omega_0 n}$) har period
 $N = k \cdot \frac{2\pi}{\Omega_0}$ för något $k \in \mathbb{N}$

$\cos(\Omega_0 n) = \cos(\Omega_0 n + 2\pi m) = \cos(\Omega_0 n + m \cdot 2\pi)$
 $= \cos(\Omega_0 n + m \cdot n \cdot 2\pi/n) = \cos(\Omega_0 n)$
 * Den största praktiska normerade vinkelfrekvensen Ω är π rad
 $e^{j\Omega_0 n} \Big|_{\Omega_0 = \pi} = \begin{cases} \cos(\pi n) + j \sin(\pi n) = \cos(\pi n) \\ e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n \end{cases}$

Den alternerande enhetssekvensen:

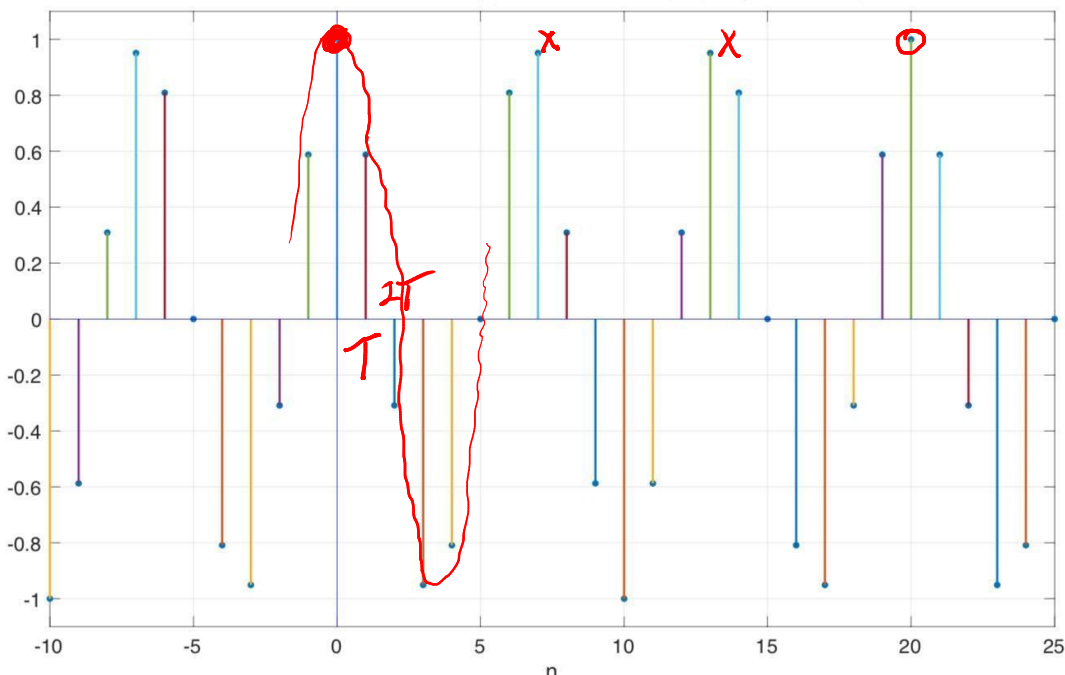


$$\cos(437\pi \cdot n) = \cos(\Omega_0 n)$$

Exempel

$$\Omega_0 = 0,3\pi$$

$\cos(0,3\pi n)$ ($2\pi/0,3\pi = 20/3 \Rightarrow$ Period $N = 20$, Periodisk upprepning efter $k = 3$ perioder av cosinusen)



Period
 $N = 3 \cdot \frac{2\pi}{\Omega_0}$
 $= 3 \cdot \frac{2\pi}{0,3\pi} = 20$

EGENSKAPER, TIDSDISKRETA SYSTEM



- Linjäritet: $X[n] = a \cdot X_1[n] + b \cdot X_2[n] \rightarrow Y[n] = a \cdot Y_1[n] + b \cdot Y_2[n]$
- Tidsinvarians: Om $X[n] \rightarrow Y[n]$ $\xrightarrow{\text{Tidsinvariant system}} \tilde{X}[n] = X[n-M] \rightarrow \tilde{Y}[n] = Y[n-M]$
- Kausalitet: Systemet är kausalt om $y[m]$ bara beror på $x[n \leq m]$
- Stabilitet: Systemet är (insignal-utsignal-)stabil (externt stabil) om det, för varje begränsad insignal ($|x[n]| \leq N < \infty \forall n$), genererar en begränsad utsignal ($|y[n]| \leq M < \infty \forall n$) ($N, M \in \mathbb{R}$)

Tidsdiskreta system – bankkontoexempel

(= Exempel 3.4 i boken)

Kontohändelser sker med tidsintervall T (t.ex. = 1 mån):

- $x[n]$ = insättning (>0) eller uttag (<0) vid tillfälle n (= tidpunkt nT)
- $y[n]$ = kontosaldo direkt efter ev. insättning/uttag vid tillfälle n
- r = inlåningsränta i SEK per period T
ska förstås vara %!

$$\Rightarrow \underline{y[n] = y[n-1] + r \cdot y[n-1] + x[n] = (1+r)y[n-1] + x[n]}$$

Differens ekvation

Realisering:
(flödesschema)

