Signaler & System – Föreläsning 11: Tidsdomänanalys av tidsdiskreta signaler & system

från förra föreläsningen:

Tidsdiskreta system – bankkontoexempel

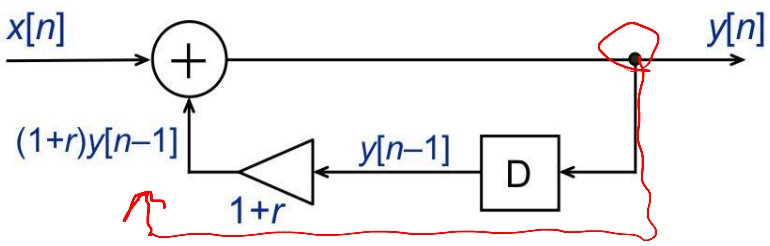
(= Exempel 3.4 i boken)

Kontohändelser sker med tidsintervall T (t.ex. = 1 mån):

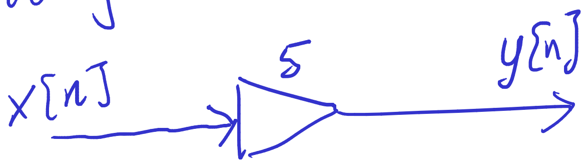
- $x[n]$ = insättning (>0) eller uttag (<0) vid tillfälle n (= *tidpunkt* nT)
- $y[n]$ = kontosaldo direkt efter ev. insättning/uttag vid tillfälle n
- r = inlåningsränta i % per period T

$$\Rightarrow \quad y[n] = y[n-1] + r \cdot y[n-1] + x[n] = (1+r)y[n-1] + x[n]$$

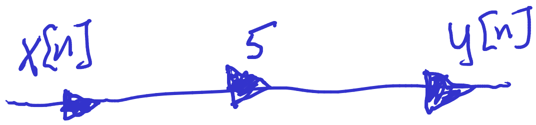
Realisering:
(flödesschema)



Kausalt system här?



Boken:



Differensekvationsbeskrivning av tidsdiskreta system

- Differensekvation på **negativ form** (boken: "*alternative form*"):

$$y[n]+a_1y[n-1]+\cdots+a_Ny[n-N]=b_0x[n]+b_1x[n-1]+\cdots+b_Nx[n-N]$$

M

TidsInvariant system: $n \longrightarrow n+N$

- Differensekvation på **positiv form** (boken: "*advanced form*"):

$$y[n+N]+a_1y[n+N-1]+\cdots+a_Ny[n]=b_0x[n+N]+b_1x[n+N-1]+\cdots+b_Nx[n]$$

Avanceringsoperatorn E: $Ey[n]=y[n+1]$, $E^ky[n]=y[n+k]$

$$Dy(t)=\frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad (E^N+a_1E^{N-1}+\cdots+a_N)y[n]=(b_0E^N+b_1E^{N-1}+\cdots+b_N)x[n]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q[E]y[n]=P[E]x[n]}$$

Exempel: Ett tidsdiskret LTI-system med insignal x[n] och utsignal y[n] som beskrivs av följande differensekvation:

$$y[n] + y[n-1] = x[n]$$

1) $y[n] = x[n] - y[n-1]$

$\Rightarrow$ Kausalt system

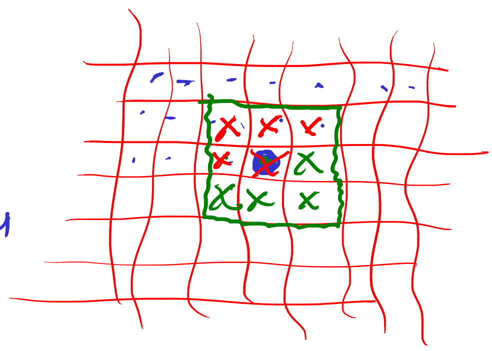
$y[n_0]$ beror inte på $x[n>n_0]$

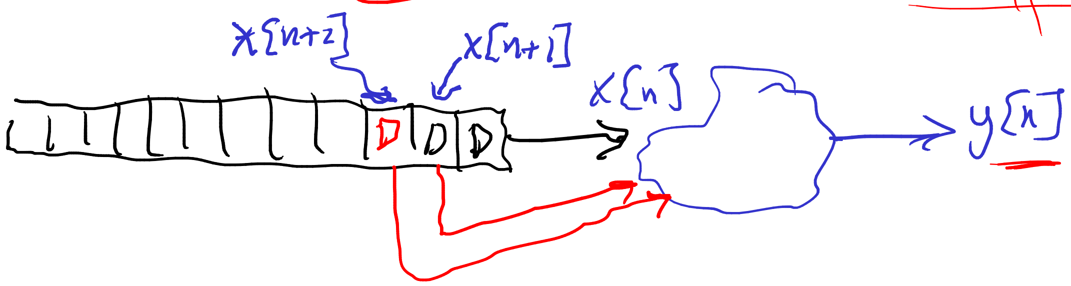
2) $y[n+1] + y[n] = x[n+1]$

$\Rightarrow y[n] = x[n+1] - y[n+1]$

n_0 $\quad$ n_0+1

Icke-kausalt system





$$\boxed{y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]}$$

Den fria svängningen $y_{zi}[n]$ (*"zero-input response"* – kap. 3.6)

Jämför:

$$x = 0 \longrightarrow \boxed{\text{LTI-system}} \longrightarrow y_{zi} \qquad (\ y_0 \text{ i boken})$$

- Tidskontinuerligt system med differentialekvationsbeskrivning

$$\Rightarrow \quad Q(D)\,y_{zi}(t) = 0$$

- Tidsdiskret system med differensekvationsbeskrivning:

$$\Rightarrow \quad Q[E]\,y_{zi}[n] = 0$$

$$\Rightarrow \quad y_{zi}(t),\ y_{zi}[n] = \sum \left(\text{systemets karakteristiska termer}\right) \qquad (\text{"characteristic modes"})$$

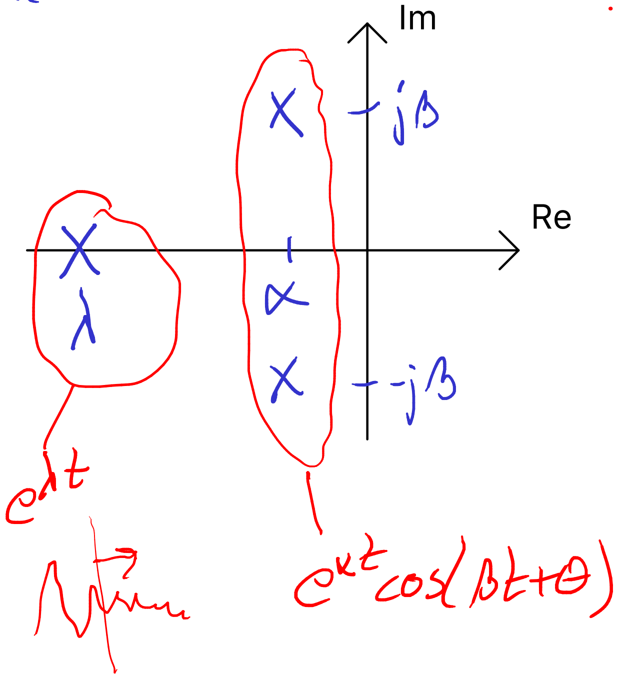
$$\left(e^{\lambda_i t},\ t^r e^{\lambda_i t},\ e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)\right) \qquad \left(\gamma_i^n,\ n^r \gamma_i^n,\ |\gamma_i|^n \cos(\beta n + \theta)\right)$$

I kursen betraktar vi oftast energifria system $\Rightarrow$ $y_{zi}(t) = 0$, $y_{zi}[n] = 0$!

De karaktäristiska termerna relateras till den karaktäristiska ekvationens rötter:

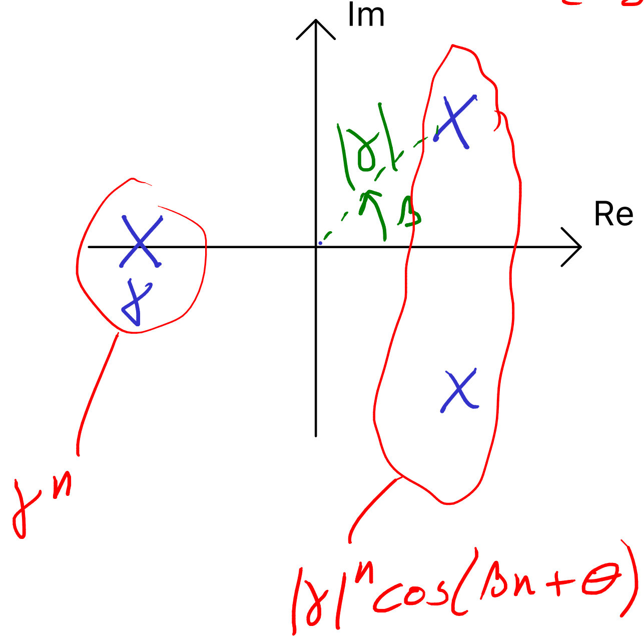
Tidskontinuerliga system

$Q(\lambda) = 0$



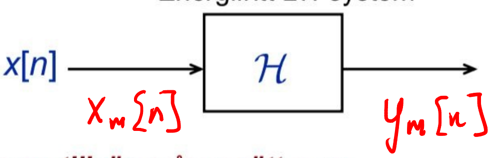
Tidsdiskreta system

$Q[\gamma] = 0$



Den insignalsberoende utsignalskomponenten

("zero-state response")



$y[n] = y_{zs}[n] = \mathcal{H}\{x[n]\}|_{\text{Energifritt system}}$

Hur beräkna?

Samma tillvägagångssätt som för tidskontinuerliga system:

Uttryck $x[n]$ som en *lämplig linjärkombination* & utnyttja **linjäritetsegenskapen**!

$$x[n]=a_1x_1[n]+a_2x_2[n]+a_3x_3[n]+\cdots \quad \underset{y_m=\mathcal{H}\{x_m\}}{\Rightarrow} \quad y[n]=a_1y_1[n]+a_2y_2[n]+a_3y_3[n]+\cdots$$

$$x[n]=\sum_m a_m \cdot x_m[n] \Longrightarrow y[n]=\sum_m a_m \cdot y_m[n]$$

a_m $\quad$ $x_m[n]$

$$x[n]=\cdots+x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]+x[1]\delta[n-1]+x[2]\delta[n-2]+\cdots=\boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\delta[n-m]}$$

$$y[n]=\mathcal{H}\{x[n]\}$$

$h[n] := \mathcal{H}\{\delta[n]\}$ = systemets **impulssvar**

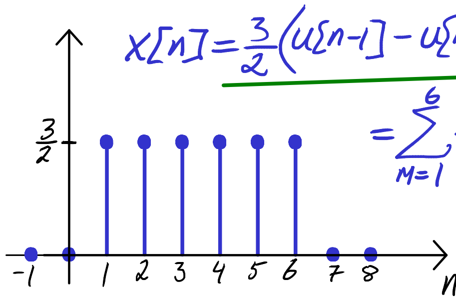
$$\Rightarrow y[n] \underset{\text{Linjärt}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\mathcal{H}\{\delta[n-m]\} \underset{\text{Tidsinv.}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]h[n-m]$$

$$h(t)=\mathcal{H}\{\delta(t)\}$$

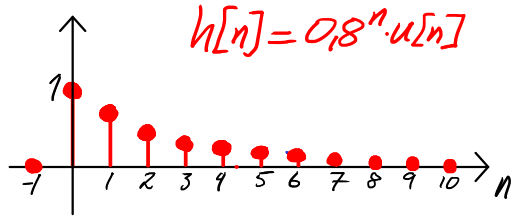
$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Exempel – En signal x[n] som utgör insignal till ett energifritt LTI-system med impulssvar h[n]:

$$x[n]=\frac{3}{2}\left(u[n-1]-u[n-7]\right)=\sum_{m=1}^{6}\frac{3}{2}\delta[n-m]$$

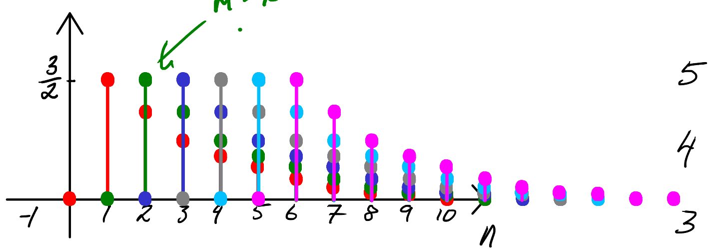


$$h[n]=0{,}8^n\cdot u[n]$$

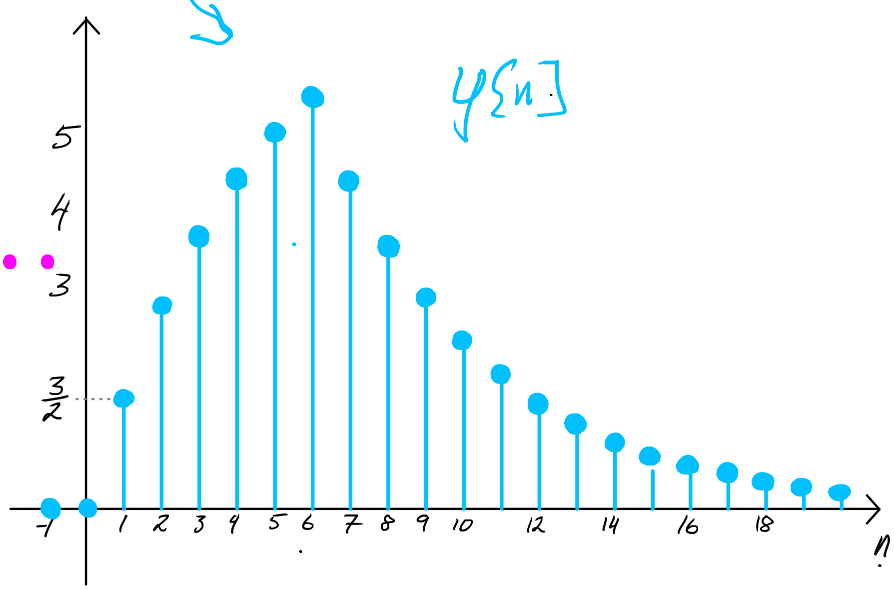


$$y[n]=\sum_m x[m]\cdot h[n-m]$$

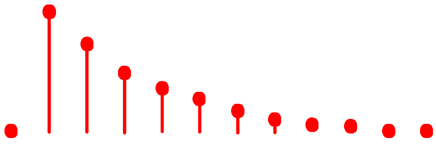
$m=2: \; x[2]\cdot h[n-2]$



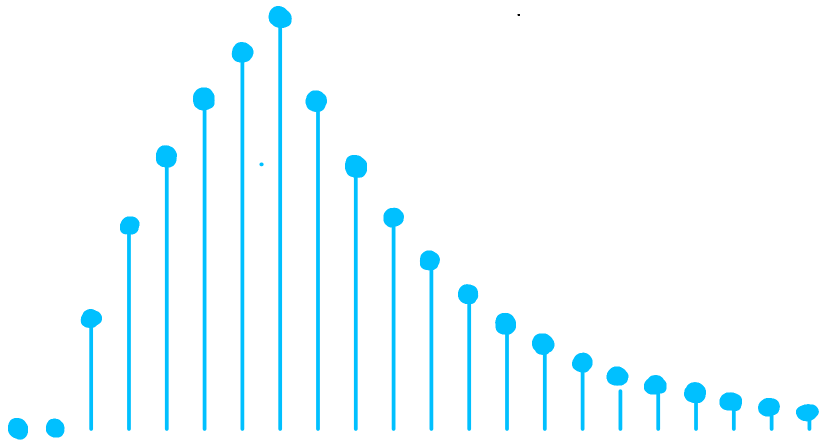
$m=1: \; x[1]h[n-1]$



Lasses hjälpgrafer under föreläsningen:



$x[i]h[n-i]$



Faltning

(faltningssumman):

$$\boxed{y[n]\Big|_{\substack{\text{Energifritt}\\ \text{system}}} = y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]}$$

Beteckning: $y_{zs}[n] = (x*h)[n]$ eller $x[n]*h[n]$

Viktiga faltningsegenskaper:

- $x[n]*h[n] = h[n]*x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]$
- $\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]s[n-m] = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} & \text{om } f[n] \text{ kausal fkn} \\ \sum_{m=-\infty}^{n} & \text{om } s[n] \text{ kausal fkn} \end{cases}$

Jämför ovanstående med tidskontinuerlig faltning!

$x(t) \longrightarrow$ LTI-system $\longrightarrow y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}\big|_{\text{Energifritt system}}$

Faltning (faltningsintegralen): $\boxed{y(t)\Big|_{\substack{\text{Energifritt}\\ \text{system}}} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$

Beteckning: $y(t)\Big|_{\substack{\text{Energifritt}\\ \text{system}}} = x(t)*h(t)$ eller $(x*h)(t)$

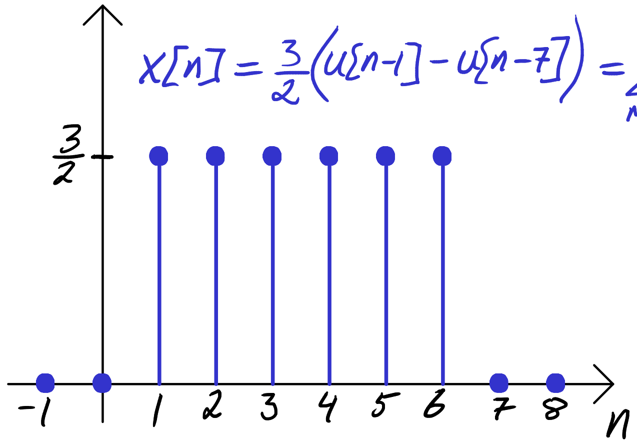
Viktiga faltningsegenskaper:

- $x(t)*h(t) = h(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)s(t-\tau)d\tau = \begin{cases} \int_0 & \text{om } f(t) \text{ kausal fkn} \\ \int^{t} & \text{om } s(t) \text{ kausal fkn} \end{cases}$

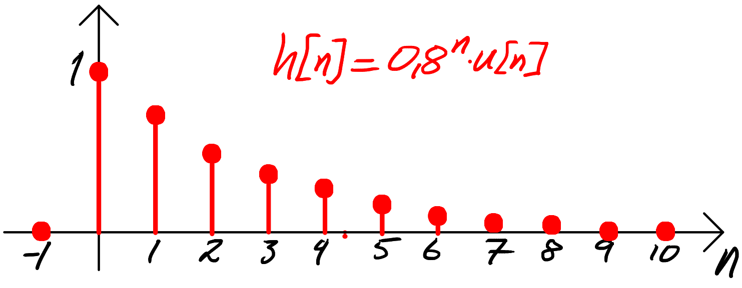
Exempel – analytisk & "grasfisk" faltning för samma LTI-system och insignal som tidigare:

grafisk!

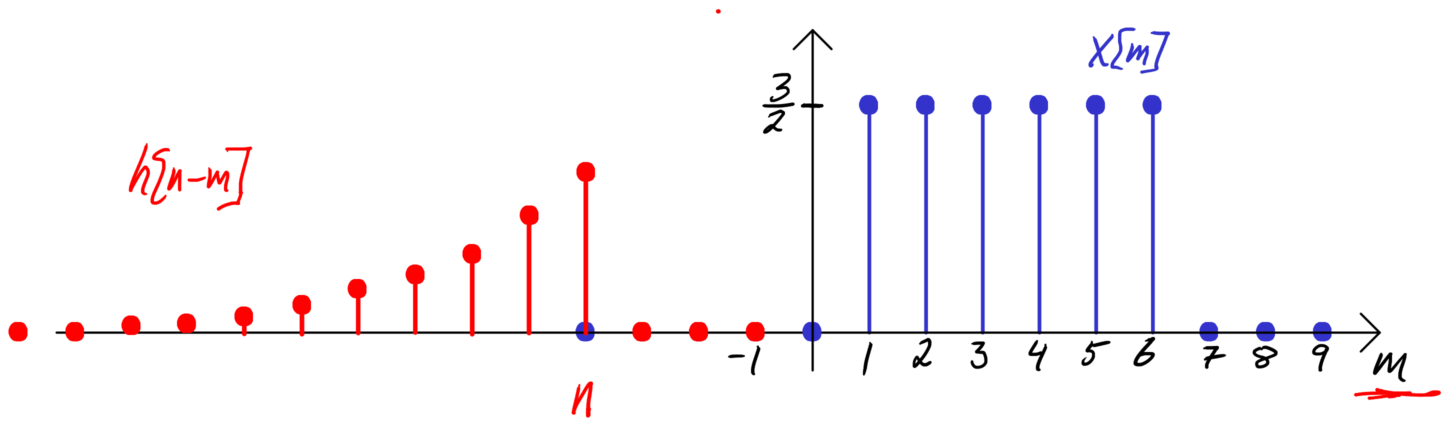
$$x[n] = \frac{3}{2}\big(u[n-1]-u[n-7]\big) = \sum_{m=1}^{6} \frac{3}{2}\delta[n-m]$$



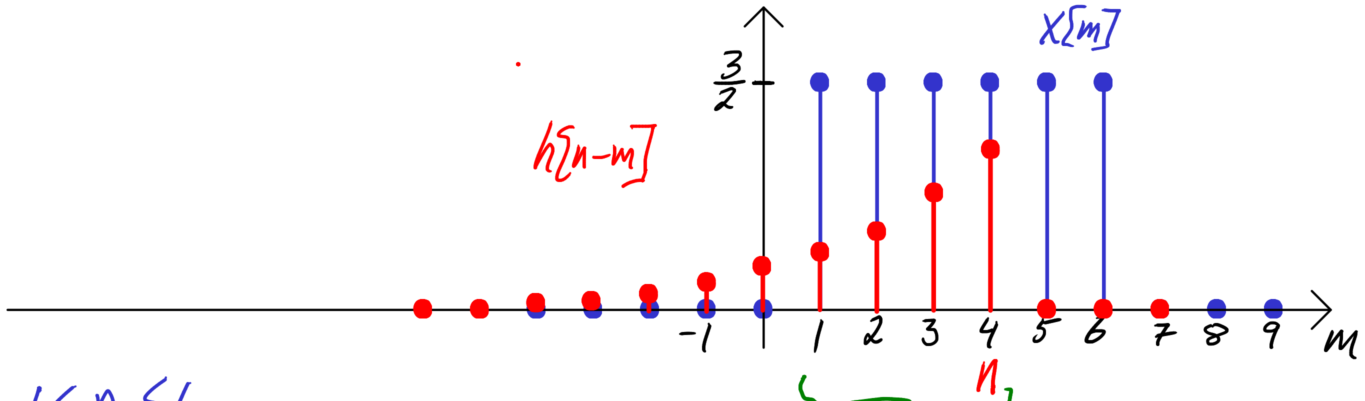
$$h[n] = 0{,}8^n \cdot u[n]$$



$$\text{LTI-system} \Rightarrow y_{zs}[n] = (x * h)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,h[n-m]$$



$$n \leq 0 \Rightarrow x[m]\,h[n-m] = 0 \Rightarrow y_{zs}[n] = 0$$

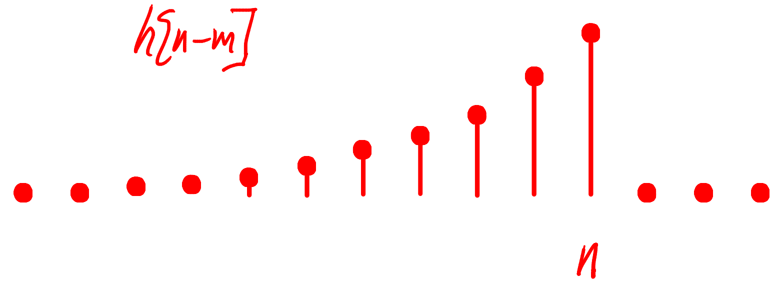


$x \cdot h \neq 0$

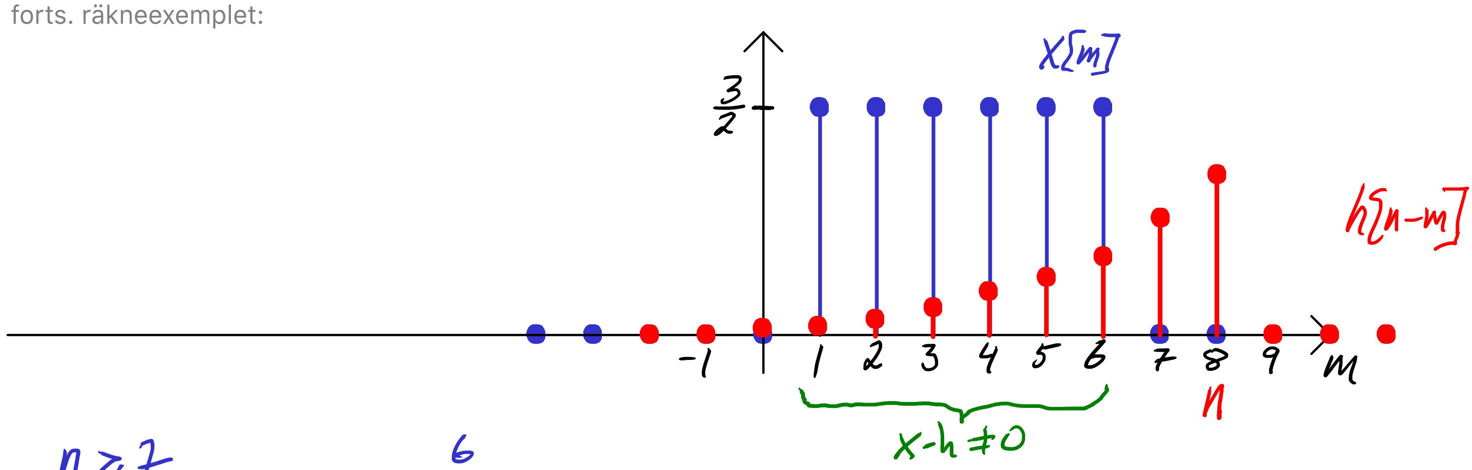
$$1 \leq n \leq 6$$

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=1}^{n} \frac{3}{2} \cdot 0{,}8^{n-m} = \frac{3}{2}\, 0{,}8^n \sum_{m=1}^{n} \left(0{,}8^{-1}\right)^m = \ldots = \frac{15}{2}\left(1-0{,}8^n\right)$$

Lasses hjälpgraf under föreläsningen:



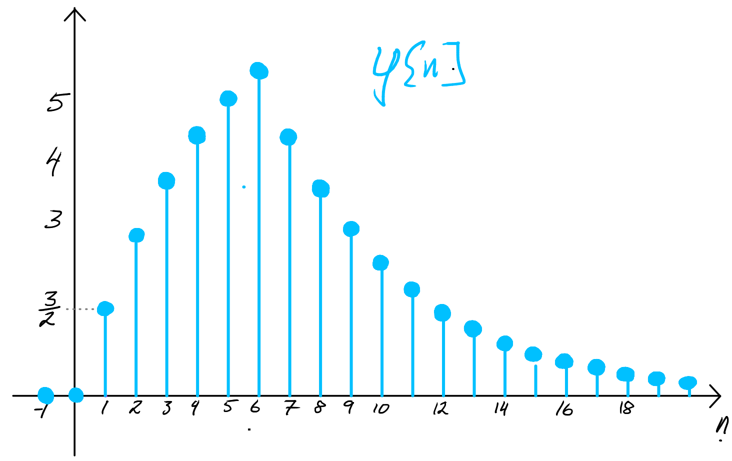
forts. räkneexemplet:

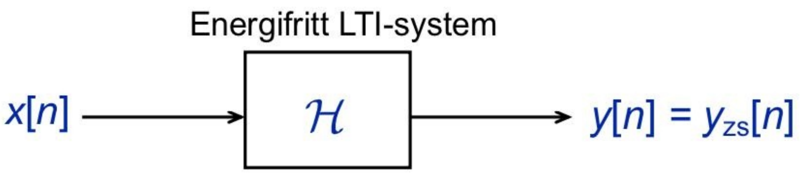


$n \geq 7$

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=1}^{6} \frac{3}{2}\, 0{,}8^{n-m} = \ldots \approx 21{,}1 \cdot 0{,}8^{n}$$

$$y_{zs}[n] = \begin{cases} 0; & n \leq 0 \\ 7{,}5\,(1-0{,}8^{n}); & 1 \leq n \leq 6 \\ 21{,}1 \cdot 0{,}8^{n}; & n \geq 7 \end{cases}$$





forts. viktiga faltningsegenskaper:

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

- Kausalt system $\Rightarrow$ $\boxed{h[n] = 0 \text{ för } n < 0}$

$$y_{zs}[n_0] = \sum_{m=-\infty}^{n_0} x[m]h[n_0-m] + \underbrace{\sum_{m=n_0+1}^{\infty} x[m]h[n_0-m]}_{=0 \text{ för kausala system}}$$

$h[n_0-m]=0$ för $m>n_0$, dvs $n_0-m<0$

om $x[n<n_0]=0 \Rightarrow y_{zs}[n<n_0]=0$

$\Rightarrow h[n]=0$ för $n<0$

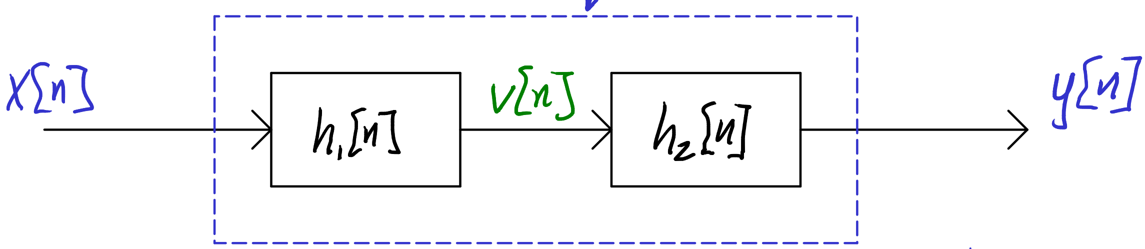
$\delta[n<0]=0 \Rightarrow h[n<0]=0$

- Stegsvaret $g[n] = y[n]$ då $x[n] = u[n]$ $\quad\Rightarrow\quad g[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} h[m]$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad \underset{\text{LTI}}{\Rightarrow} \quad h[n] = g[n] - g[n-1]$$

- Faltning med enhetsimpuls: $\quad f[n]*\delta[n-k] = f[n-k]$

- Kaskadkoppling: $\quad h[n] = h_1[n]*h_2[n] = h_2[n]*h_1[n]$



$$y[n] = v[n]*h_2[n] = (x[n]*h_1[n])*h_2[n] = x[n]*\underbrace{(h_1[n]*h_2[n])}_{h[n]}$$

Klassisk differensekvationslösning (kap. 3.9)

$x[n] \longrightarrow$ LTI-system $\longrightarrow y[n]$

Vi har hittills allmänt beräknat

$$y[n] = \underbrace{y_{zi}[n]}_{=y_0[n] \text{ i boken}} + \underbrace{y_{zs}[n]}_{=x[n]*h[n]} \qquad (1)$$

Vid differensekvationsbeskrivning: $$\boxed{y[n] = y_c[n] + y_\phi[n]} \qquad (2)$$

- $y_c[n]$ = *"Natural response"* = ***Homogen lösning*** $y_{hom}[n]$, *oberoende* av $x[n]$
- $y_\phi[n]$ = *"Forced response"* = ***Partikulärlösning*** $y_{part}[n]$, *beror* på $x[n]$

Oftast är (1) att föredra framför (2):

- (1) $\Longrightarrow$ initialtillstånden för $y_{zi}[n]$ krävs vid $n < 0$ (2) $\Longrightarrow$ initialtillstånd krävs vid $n \geq 0$
- $y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$ kan delas upp i $y_c[n] + y_\phi[n]$, men inte tvärtom
- (2) är begränsad till vissa insignalstyper, med kända ansättningar av $y_\phi[n]$
- Dock: $y_\phi[n]$ är mycket intressant & lätt att beräkna för vissa centrala insignalstyper!

frekvenssignaler!

Stabilitet – för LTI-system

$$|y[n]| = \left|\sum_m x[n-m]\,h[m]\right| \le \sum_m \underbrace{|x[n-m]|}_{\le N} \cdot |h[m]| < \infty$$

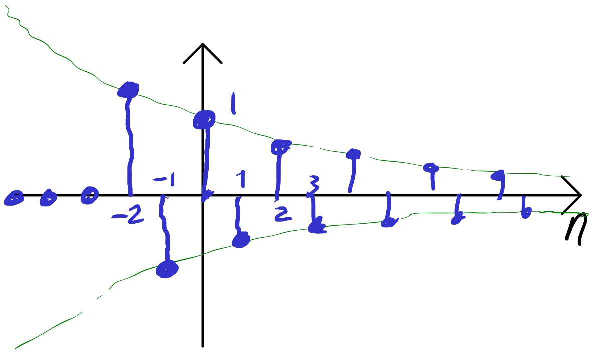
Stabilt system:

Varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal.

$\Leftrightarrow$ Faltning $\boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]| < \infty}$

Ex: $h[n] = (-0{,}7)^n \cdot u[n+2]$

Stabilt & icke-kausalt system



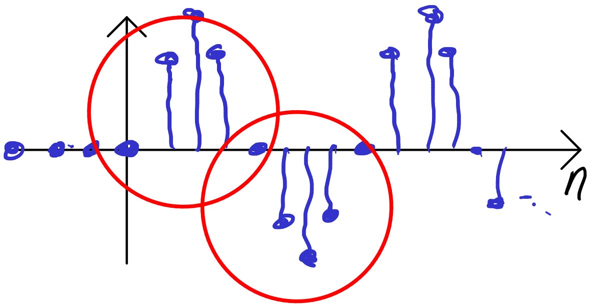
Marginellt stabilt system:

De flesta begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]| \not< \infty \\ \text{men} \\ |h[n]| < \infty \quad \forall n \end{cases}$$

Ex: $h[n] = \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \cdot u[n]$

Marginellt stabilt & kausalt system



Instabilt system:

Ingen begränsad nollskild insignal kan ge upphov till en begränsad utsignal.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]| \not< \infty \\ \text{och} \\ |h[n]| \not< \infty \quad \forall n \end{cases}$$

Ex: $h[n] = 2^n \cdot u[n]$

Instabilt & kausalt system

$x[n] = 0{,}2^n \cdot u[n]$

$\Rightarrow y_{zs}[n] = A \cdot 0{,}2^n \cdot u[n] + B \cdot 2^n \cdot u[n]$