Signaler & System – Föreläsning 11:
Tidsdomänanalys av tidsdiskreta signaler & system

från förra föreläsningen:

Tidsdiskreta system – bankkontoexempel

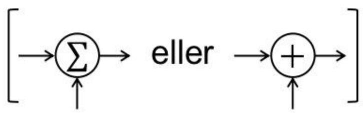
(= Exempel 3.4 i boken)

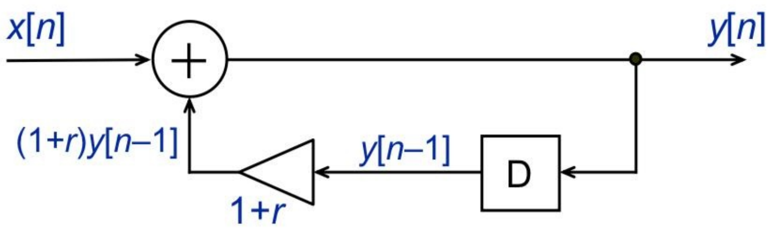
Kontohändelser sker med tidsintervall T (t.ex. = 1 mån):

- $x[n]$ = insättning (>0) eller uttag (<0) vid tillfälle n (= *tidpunkt* nT)
- $y[n]$ = kontosaldo direkt efter ev. insättning/uttag vid tillfälle n
- r = inlåningsränta i % per period T

$$\Rightarrow \quad \underline{y[n]} = y[n-1] + r\cdot y[n-1] + x[n] = \underline{(1+r)y[n-1] + x[n]}$$

Realisering:
(flödesschema)





Differensekvationsbeskrivning av tidsdiskreta system

- Differensekvation på **negativ form** (boken: ”*alternative form*”):

$$y[n]+a_1 y[n-1]+\cdots+a_N y[n-N]=b_0 x[n]+b_1 x[n-1]+\cdots+b_N x[n-N]$$

TidsInvariant system: $n \longrightarrow n+N$

- Differensekvation på **positiv form** (boken: ”*advanced form*”):

$$y[n+N]+a_1 y[n+N-1]+\cdots+a_N y[n]=b_0 x[n+N]+b_1 x[n+N-1]+\cdots+b_N x[n]$$

Avanceringsoperatorn *E*: $\quad Ey[n]=y[n+1], \quad E^k y[n]=y[n+k]$

$$\Rightarrow \quad \left(E^N+a_1 E^{N-1}+\cdots+a_N\right)y[n]=\left(b_0 E^N+b_1 E^{N-1}+\cdots+b_N\right)x[n]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q[E]y[n]=P[E]x[n]}$$

Exempel: Ett tidsdiskret LTI-system med insignal x[n] och utsignal y[n] som beskrivs av följande differensekvation:

$$y[n] + y[n-1] = x[n]$$

Den fria svängningen $y_{zi}[n]$ ("*zero-input response*" − kap. 3.6)

$x = 0 \longrightarrow$ LTI-system $\longrightarrow y_{zi}$ (y_0 i boken)

Jämför:

- Tidskontinuerligt system med differentialekvationsbeskrivning

  $\Rightarrow \quad Q(D)\,y_{zi}(t) = 0$

- Tidsdiskret system med differensekvationsbeskrivning:

  $\Rightarrow \quad Q[E]\,y_{zi}[n] = 0$

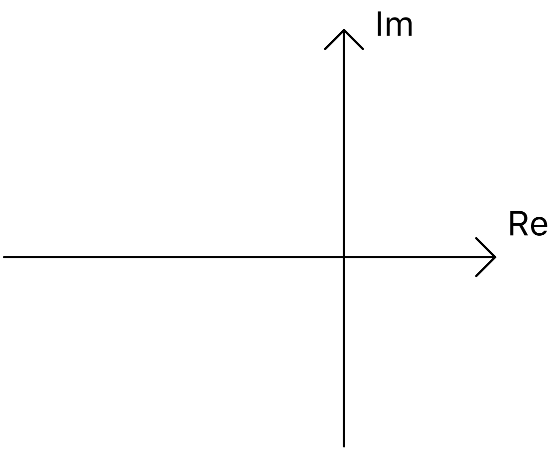
$$\Rightarrow \; y_{zi}(t),\; y_{zi}[n] = \sum \big(\text{systemets karakteristiska termer}\big) \quad (\text{"}\textit{characteristic modes}\text{"})$$

$$\left(e^{\lambda_i t},\; t^r e^{\lambda_i t},\; e^{\alpha t}\cos(\beta t + \theta)\right) \qquad \left(\gamma_i^n,\; n^r\gamma_i^n,\; |\gamma_i|^n \cos(\beta n + \theta)\right)$$

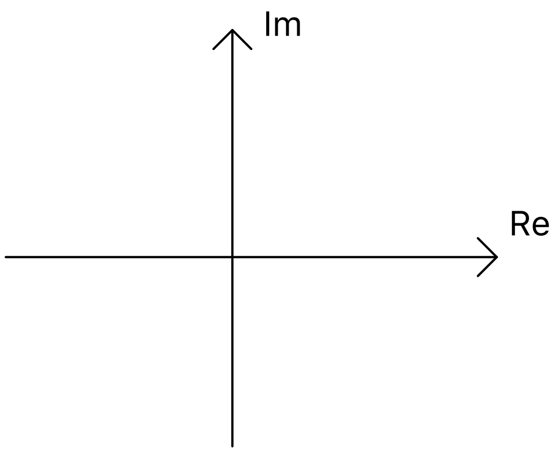
I kursen betraktar vi oftast energifria system $\Rightarrow$ $y_{zi}(t) = 0,\; y_{zi}[n] = 0$!

De karaktäristiska termerna relateras till den karaktäristiska ekvationens rötter:

Tidskontinuerliga system

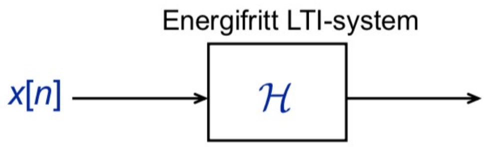


Tidsdiskreta system



Den insignalsberoende utsignalskomponenten

(”*zero-state response*”)



$y[n] = y_{zs}[n] = \mathcal{H}\{x[n]\}|_{\text{Energifritt system}}$

Hur beräkna?

***Samma tillvägagångssätt som för tidskontinuerliga system*:**

Uttryck $x[n]$ som en *lämplig linjärkombination* & utnyttja **linjäritetsegenskapen**!

$$x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_3 x_3[n] + \cdots \underset{y_m = \mathcal{H}\{x_m\}}{\Rightarrow} y[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + a_3 y_3[n] + \cdots$$

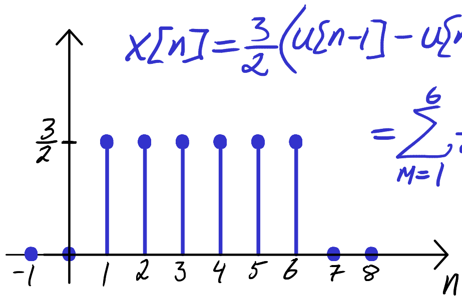
$$x[n] = \cdots + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$$

$\boxed{h[n] := \mathcal{H}\{\delta[n]\} = \text{systemets } \textbf{impulssvar}}$

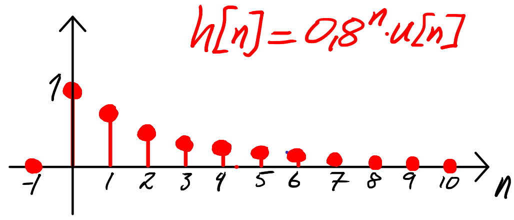
$$\Rightarrow y[n] \underset{\text{Linjärt}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathcal{H}\{\delta[n-m]\} \underset{\text{Tidsinv.}}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

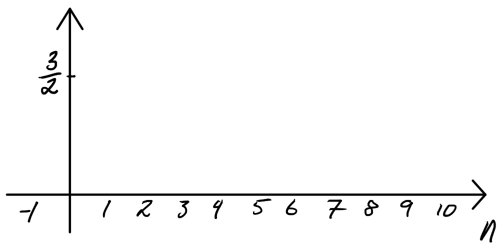
Exempel – En signal x[n] som utgör insignal till ett energifritt LTI-system med impulssvar h[n]:

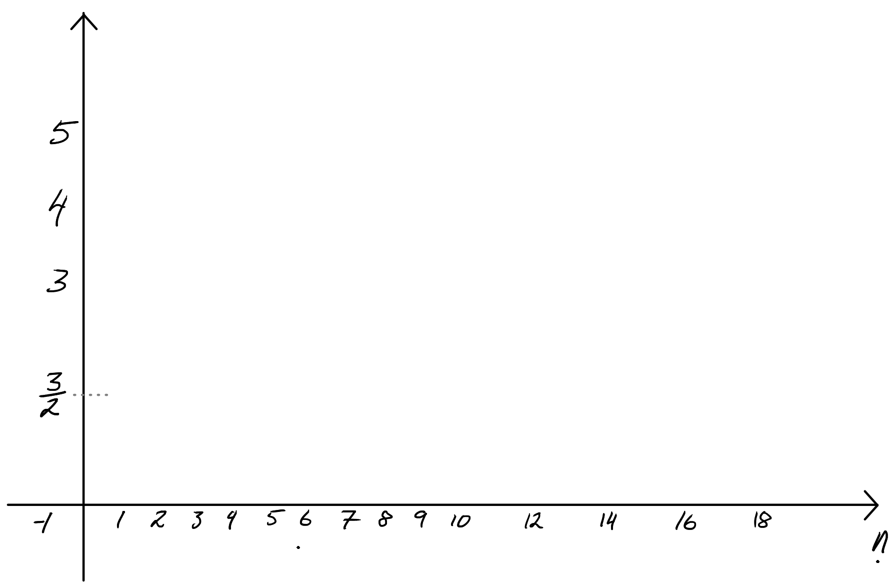
$$x[n] = \frac{3}{2}\left(u[n-1] - u[n-7]\right) = \sum_{m=1}^{6} \frac{3}{2}\delta[n-m]$$



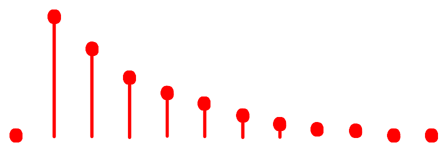
$$h[n] = 0{,}8^n \cdot u[n]$$



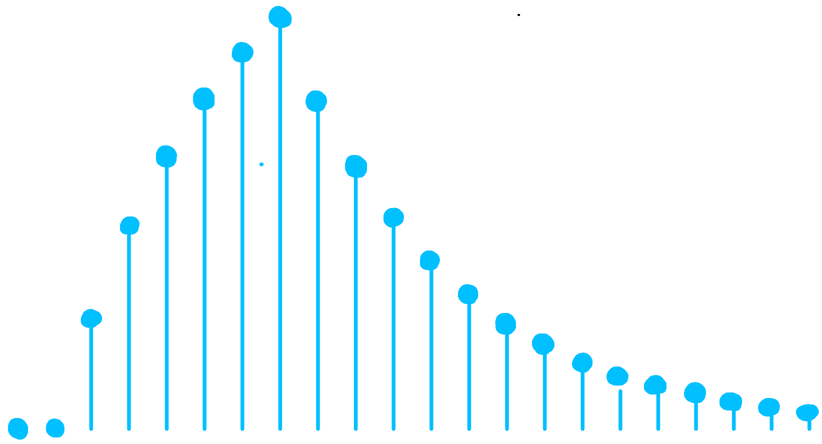




Lasses hjälpgrafer under föreläsningen:



$x[i]h[n-i]$



Faltning

(faltningssumman):

$$\boxed{y[n]\Big|_{\substack{\text{Energifritt}\\ \text{system}}} = y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]}$$

Beteckning: $y_{zs}[n] = (x*h)[n]$ eller $x[n]*h[n]$

Viktiga faltningsegenskaper:

- $x[n]*h[n] = h[n]*x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]$

- $\sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]s[n-m] = \begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} & \text{om } f[n] \text{ kausal fkn} \\ \sum_{m=-\infty}^{n} & \text{om } s[n] \text{ kausal fkn} \end{cases}$

Jämför ovanstående med tidskontinuerlig faltning!

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI-system}} \longrightarrow y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}\Big|_{\text{Energifritt system}}$$

Faltning (faltningsintegralen): $\boxed{y(t)\Big|_{\substack{\text{Energifritt}\\ \text{system}}} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$

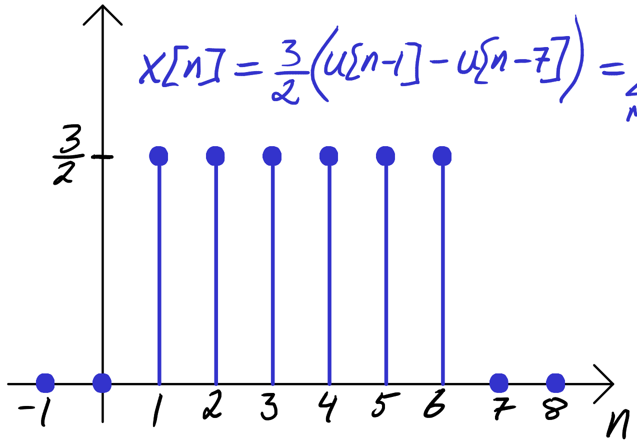
Beteckning: $y(t)\Big|_{\substack{\text{Energifritt}\\ \text{system}}} = x(t)*h(t)$ eller $(x*h)(t)$

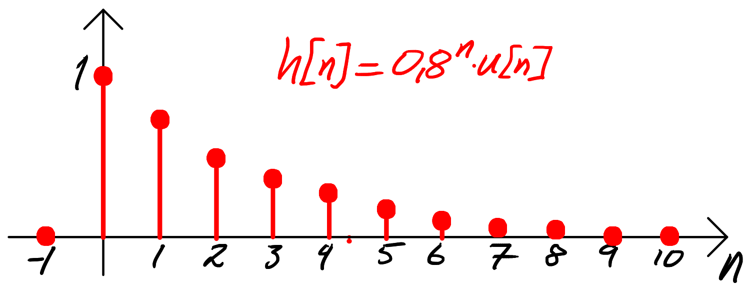
Viktiga faltningsegenskaper:

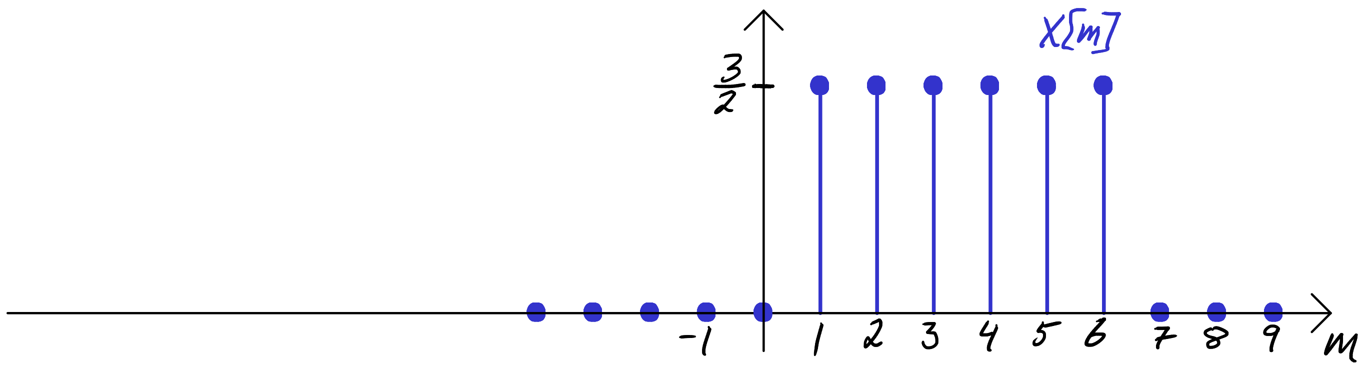
- $x(t)*h(t) = h(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$

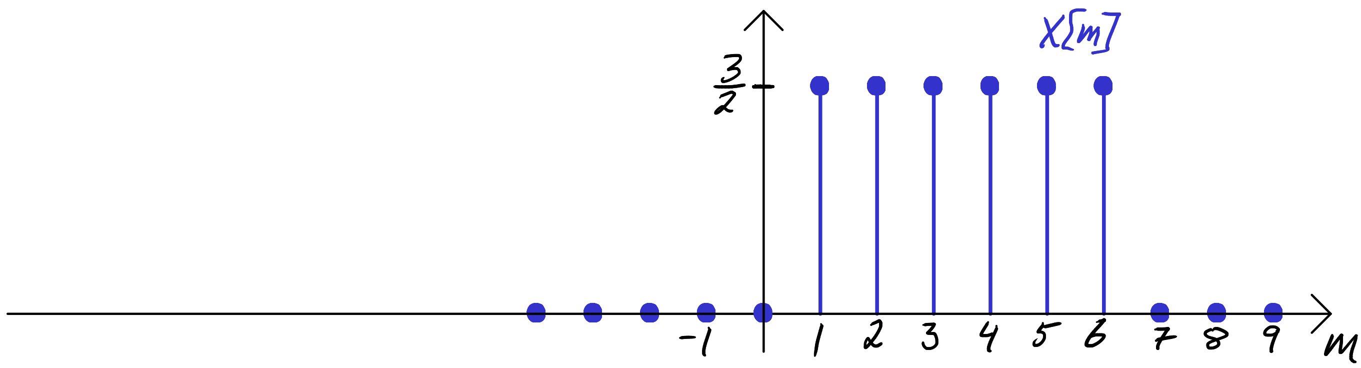
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)s(t-\tau)d\tau = \begin{cases} \int_0 & \text{om } f(t) \text{ kausal fkn} \\ \int^t & \text{om } s(t) \text{ kausal fkn} \end{cases}$

Exempel – analytisk & "grasfisk" faltning för samma LTI-system och insignal som tidigare:

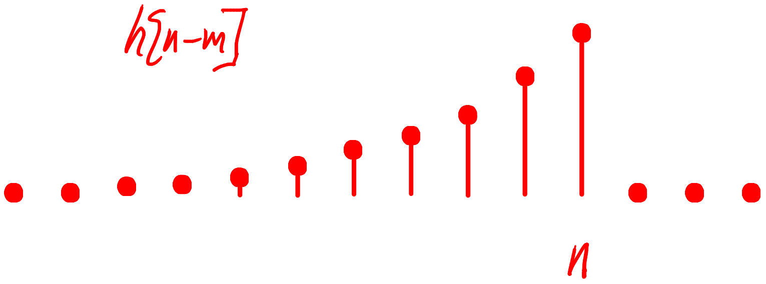




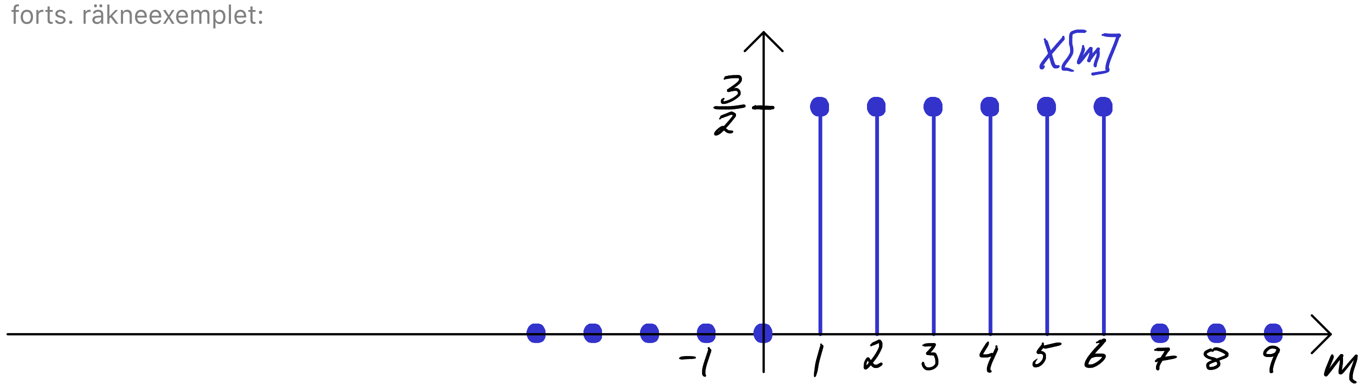


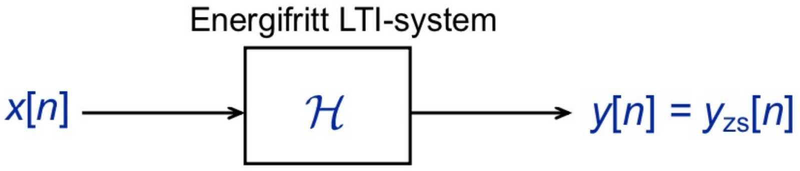


Lasses hjälpgraf under föreläsningen:



forts. räkneexemplet:





forts. viktiga faltningsegenskaper:

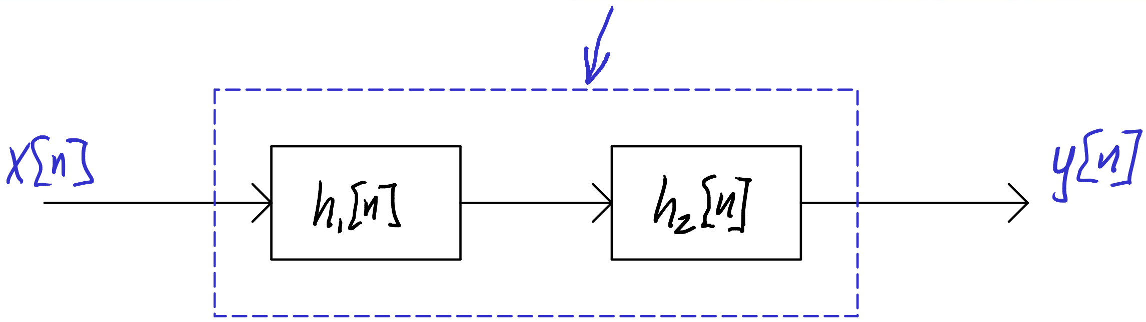
- Kausalt system $\Rightarrow$ $h[n] = 0$ för $n < 0$

- Stegsvaret $g[n] = y[n]$ då $x[n] = u[n]$ $\Rightarrow$ $g[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} h[m]$

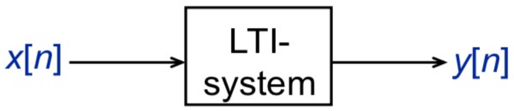
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \underset{\text{LTI}}{\Rightarrow} h[n] = g[n] - g[n-1]$$

- Faltning med enhetsimpuls: $f[n] * \delta[n-k] = f[n-k]$

- Kaskadkoppling: $h[n] = h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]$



Klassisk differensekvationslösning (kap. 3.9)



Vi har hittills allmänt beräknat

$$y[n] = \underbrace{y_{\text{zi}}[n]}_{=y_0[n] \text{ i boken}} + \underbrace{y_{\text{zs}}[n]}_{=x[n]*h[n]} \qquad (1)$$

Vid differensekvationsbeskrivning: $$y[n] = y_c[n] + y_\phi[n] \qquad (2)$$

- $y_c[n]$ = *"Natural response"* = ***Homogen lösning*** $y_{\text{hom}}[n]$, *oberoende* av $x[n]$
- $y_\phi[n]$ = *"Forced response"* = ***Partikulärlösning*** $y_{\text{part}}[n]$, *beror* på $x[n]$

Oftast är (1) att föredra framför (2):

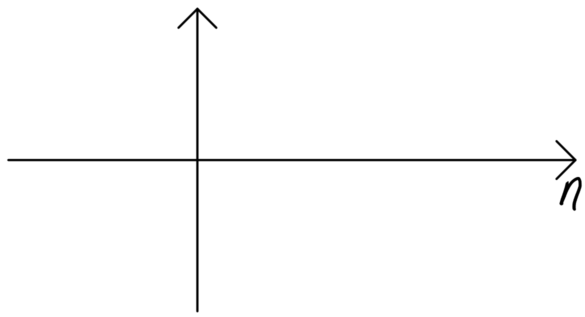
- (1) $\Longrightarrow$ initialtillstånden för $y_{\text{zi}}[n]$ krävs vid $n < 0$ (2) $\Longrightarrow$ initialtillstånd krävs vid $n \geq 0$
- $y_{\text{zi}}[n] + y_{\text{zs}}[n]$ kan delas upp i $y_c[n] + y_\phi[n]$, men inte tvärtom
- (2) är begränsad till vissa insignalstyper, med kända ansättningar av $y_\phi[n]$
- Dock: $y_\phi[n]$ är mycket intressant & lätt att beräkna för vissa centrala insignalstyper!

Stabilitet – för LTI-system

Stabilt system:

Varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal.

$$\overset{\text{Faltning}}{\Leftrightarrow} \quad \boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|h[m]\right| < \infty}$$



Marginellt stabilt system:

De flesta begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler.

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|h[m]\right| \nless \infty \\ \quad \text{men} \\ \left|h[n]\right| < \infty \quad \forall n \end{cases}$$

Instabilt system:

Ingen begränsad nollskild insignal kan ge upphov till en begränsad utsignal.

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|h[m]\right| \nless \infty \\ \quad \text{och} \\ \left|h[n]\right| \nless \infty \quad \forall n \end{cases}$$