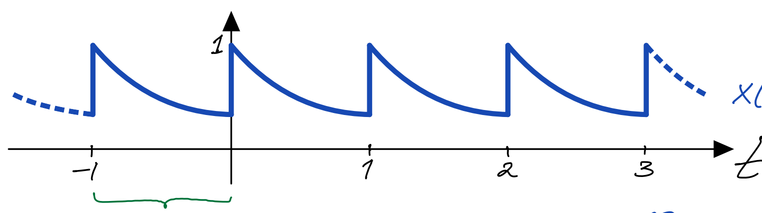
## 1

Uppgiften är baserad på lektionsuppgift 2.5:

Det elektriska nätet utgör ett kausalt och stabilt LTI-system med, i detta fall, en periodisk insignal och – på grund av stabiliteten – en periodisk utsignal med samma period som insignalen:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$




$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}; & 0 \le t < 1 \\ x(t+1); & \forall t \end{cases}$$

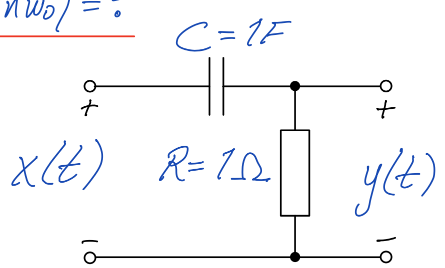
Periodtiden $T_0 = 1$ sek $\Rightarrow$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi$ rad/s.

Stabilt LTI-system $\Rightarrow$ Sökt $\hat{D}_n = D_n \cdot H(n \cdot \omega_0)$

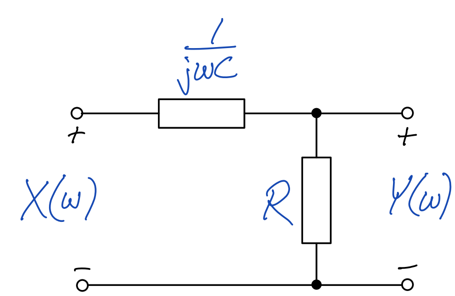
där $D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{1}\int_0^1 e^{-t} \cdot e^{-jn2\pi t} dt = \int_0^1 e^{-(1+j2\pi n)t} dt$

$$= \left[\frac{e^{-(1+j2\pi n)t}}{-(1+j2\pi n)}\right]_0^1 = \frac{e^{-1} \cdot e^{-j2\pi n} - e^0}{-(1+j2\pi n)} = \left/ \begin{matrix} e^{-j2\pi n} = (e^{j2\pi})^n \\ = 1^n = 1 \end{matrix} \right/ = \frac{1-e^{-1}}{1+j2\pi n}$$

$H(n\omega_0) = ?$




Komplexschema $\Longrightarrow$



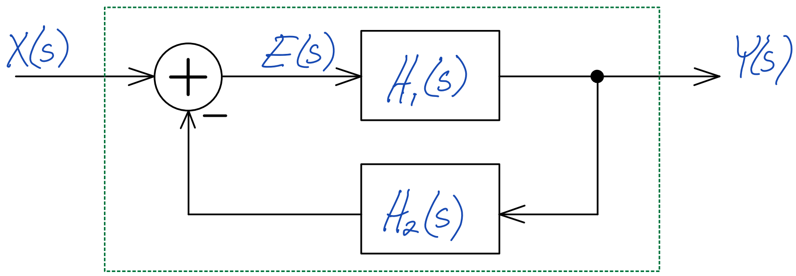

Spänningsdelning:

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + R} \Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} = \frac{j\omega}{1+j\omega}$$

$$\Rightarrow H(n\omega_0) = H(n \cdot 2\pi) = \frac{j2\pi n}{1+j2\pi n}, \qquad \text{dvs.} \quad \hat{D}_n = \frac{(1-e^{-1}) \cdot j2\pi n}{(1+j2\pi n)^2}$$

② Uppgiften är baserad på lektionsuppgift 7.1:

Inför hjälpstorheten $e(t)$ efter summatorn och Laplacetransformera alla signaler $\Rightarrow$




$\left(= Y_{zs}(s)\right.$ vid energifritt system$\left.\right)$

$$H_{tot}(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}, \text{ där } Y_{zs}(s) = E(s) \cdot H_1(s) \text{ och}$$

$$E(s) = X(s) - Y_{zs}(s) \cdot H_2(s)$$

$$\Rightarrow \quad Y(s)\left(1 + H_1(s)H_2(s)\right) = X(s) \cdot H_1(s)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{H_{tot}(s)} = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \underline{\frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}}$$

(Måste härledas i lösningen, annars poängavdrag.)

Egenskaper för delsystemen $H_1$ & $H_2$ samt det totala återkopplade systemet $H_{tot}$:

- Eftersom båda delsystemen är kausala, så är även det totala systemet kausalt

  $\Rightarrow$ konvergensområdet för $H_{tot}(s)$ är högersidigt, dvs. av typen $Re\{s\} > \sigma_0$, där $\sigma_0$ är realdelen av den pol hos systemfunktionen som ligger längst till höger i s-planet.

- För ett tidskontinuerligt stabilt LTI-system gäller att $j\omega$-axeln ligger i konvergensområdet för systemets systemfunktion vilket, för $Re\{s\} > \sigma_0$, innebär att alla systemfunktionens poler ligger i vänstra halvplanet.

Poäng för inledningen på föregående sida, dvs. härledningen av $H_{tot}(s)$ och motivering av stabilitet, ingår i a) & b) nedan!

a) $\begin{cases} H_1(s) = \dfrac{1}{s-1} \\ H_2(s) = 2 \end{cases}$ $\left( \underset{\text{system}}{\overset{\text{Kausalt}}{\Longrightarrow}} Re\{s\} > 1 \Rightarrow \text{Instabilt system} \right)$

$$\Rightarrow \underline{H_{tot}(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = \frac{\frac{1}{s-1}}{1 + \frac{1}{s-1}\cdot 2} = \underline{\frac{1}{s+1}}.$$

Kausalt system $\Rightarrow$ Konvergensområde $Re\{s\} > -1$

$\Rightarrow$ $j\omega$-axeln ligger i konvergensområdet

$\Rightarrow$ Systemet är <u>stabilt</u>

b) $\begin{cases} H_1(s) = \dfrac{K}{s^2+2s} = \dfrac{K}{s(s+2)} \underset{}{\overset{\text{kausalt system}}{\Longrightarrow}} Re\{s\} > 0 \\ \text{(Enkelpol på } j\omega\text{-axeln, som är rand till konv.området} \Rightarrow \text{marginellt stabilt system.)} \\ H_2(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{H_{tot}(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+2)}}{1 + \frac{K}{s(s+2)}\cdot 1} = \underline{\frac{K}{s^2+2s+K}}$$

$\Rightarrow$ Systemets poler finns där $s^2+2s+K=0$

dvs. i $\underline{s = -1 \pm \sqrt{1-K}}$

Enligt det inledande resonemanget, så måste alla poler hos systemfunktionen för ett kausalt och stabilt LTI-system ligga i s-planets vänstra halvplan.
Då ligger $j\omega$-axeln i systemfunktionens konvergensområde.

- $K=-3$ $\Rightarrow$ polerna finns i $s=-1\pm 2$, dvs. i $s=-3$ & $s=1$

$\Rightarrow$ Konvergensområde $\mathrm{Re}\{s\}>1$ $\left( H_{tot}(s) = \frac{-3}{(s+3)(s-1)} \right)$

$\Rightarrow$ $j\omega$-axeln ligger inte i konvergensområdet $\Rightarrow$ Instabilt system

- $K=2$ $\Rightarrow$ polerna finns i $s=-1\pm\sqrt{-1}=-1\pm j$

$\Rightarrow$ Konvergensområde $\mathrm{Re}\{s\}>-1$ $\left( H_{tot}(s) = \frac{2}{(s+1)^2+1} \right)$

$\Rightarrow$ $j\omega$-axeln ligger i konvergensområdet $\Rightarrow$ Stabilt system

- $K=0$ $\Rightarrow$ polerna finns i $s=-1\pm 1$, dvs. i $s=-2$ & $s=0$

$\Rightarrow$ Konvergensområde $\mathrm{Re}\{s\}>0$ $\left( H_{tot}(s) = \frac{0}{s(s+2)} \right)$

Samma polplaceringar som hos $H_1(s)$ har $\Rightarrow$ Systemet verkar vara marginellt stabilt.

Dock så är $H_{tot}(s) = \frac{0}{s(s+2)} = 0$

$\Rightarrow$ $Y_{zs}(s) = X(s)\cdot H_{tot}(s) = 0$ $\Rightarrow$ $y_{zs}(t)=0$ för alla $x(t)$

$\Rightarrow$ Systemet är stabilt ($y_{zs}(t)$ är begränsad för alla begränsade $x(t)$)

3 Uppgiften är baserad på lektionsuppgift 7.5:

a) Enligt pol-nollställediagrammet för $H(s)$ så har systemfunktionen nollställen i $s = \pm j3$ och poler i $s = -2 \pm j$

$$\Rightarrow \quad H(s) = K \cdot \frac{s^2 + 3^2}{(s+2)^2 + 1^2} = K \cdot \frac{s^2 + 9}{s^2 + 4s + 5}$$

$\left( (s+a)^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \text{nollställen/poler i } s = -a \pm j\omega_0 \right)$

$\Rightarrow \underline{b_1 = 0,\ b_2 = 9,\ a_1 = 4,\ a_2 = 5}$

Systemet förstärker konstanter med en faktor 9

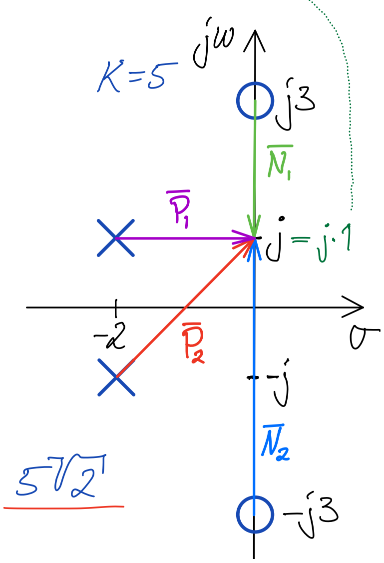
$\Rightarrow H(\omega = 0) = H(s = 0) = 9$, dvs. $K \cdot \frac{b_2}{a_2} = K \cdot \frac{9}{5} = 9 \Rightarrow \underline{K = 5}$

(Har förutsatts att $H(\omega)$ existerar — se motivering i b) nedan)

b) $x(t) = 2 + \cos(t) \Rightarrow$ Om LTI-systemet är stabilt, så är utsignalen $y(t) = 2 \cdot H(0) + |H(1)| \cos(t + \arg H(1))$

Vinkelfrekvensen = 1 rad/s

Enligt uppgift är systemet kausalt $\Rightarrow$
Konvergensområdet för $H(s)$ är $\mathrm{Re}\{s\} > -2 \Rightarrow$
$j\omega$-axeln ligger i konv.området
$\Rightarrow$ systemet är stabilt.




- $\omega = 0 \Rightarrow |H(0)| = 9$, enligt uppgift.
- $H(1)$ erhålls från pol-nollställevektorerna i pol-nollställediagrammet till höger:

$$\underline{|H(1)|} = |K| \cdot \frac{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|}{|\bar{P}_1| \cdot |\bar{P}_2|} = 5 \cdot \frac{2 \cdot 4}{2\sqrt{2^2 + 2^2}} = \underline{5\sqrt{2}}$$

$$\arg H(1) = \arg K + \arg \overline{N_1} + \arg \overline{N_2} - \arg \overline{P_1} - \arg \overline{P_2}$$
$$= 0 - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 - \arctan\frac{2}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

LTI-systemets utsignal är därför

$$y(t) = \underbrace{18}_{=2\cdot 9} + 5\sqrt{2}\cdot\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

---

**4** Uppgiften är baserad på lektionsuppgift 8.9:

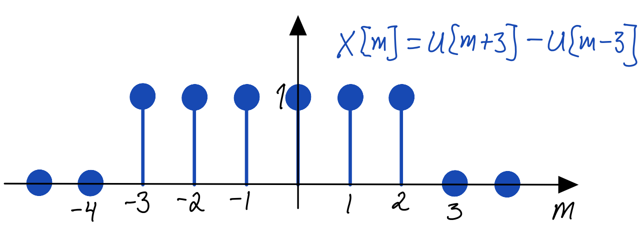
$$h[n] = \delta[n] + \left(\tfrac{1}{3}\right)^n \cdot u[n-1] = \Big/ \text{Eftersom } \left(\tfrac{1}{3}\right)^0 = 1 \Big/ = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n \cdot u[n].$$

a) $h[n] = 0$ för $n < 0$ $\Rightarrow$ LTI-systemet är kausalt.

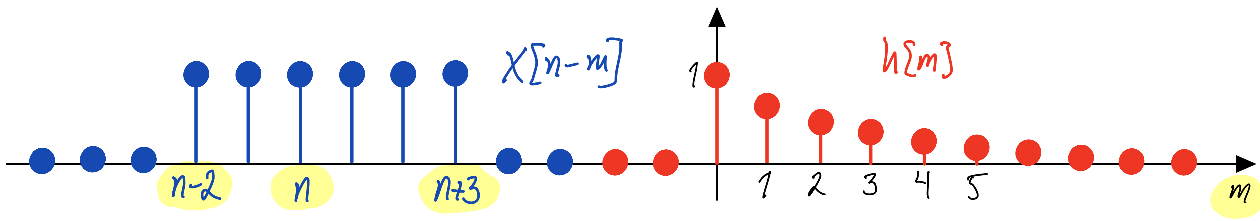
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3}\right)^n = \Big/ \left|\tfrac{1}{3}\right| < 1 \Rightarrow \textstyle\sum \text{ konvergerar} \Big/$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} < \infty \Rightarrow \text{LTI-systemet är stabilt}$$

b) Systemet är energifritt $(y_{zi}[n] = 0)$ $\Rightarrow$

$$y[n] = y_{zs}[n] = (x * h)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]\,h[m] \quad \left(\text{eller } \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,h[n-m]\right)$$




$\Longrightarrow$ (forts. nästa sida)

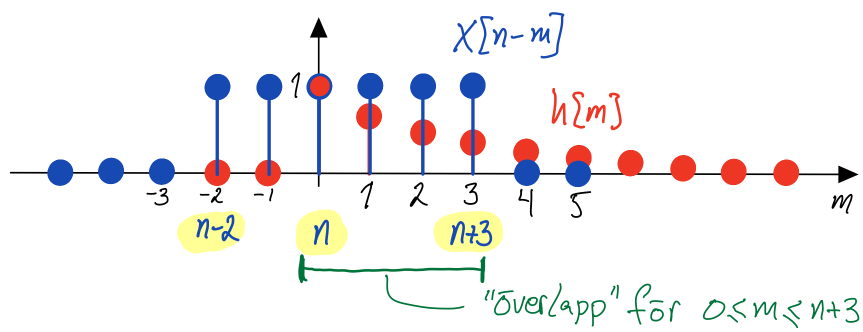



* $n+3<0$, dvs $n<-3$ (vilket grafen ovan visar):

$$x[n-m]\cdot h[m]=0 \ \forall m \quad \Rightarrow \quad y_{zs}[n]=0$$

* $n+3\geq 0$ och $n-2\leq 0$, dvs. $-3\leq n\leq 2$:

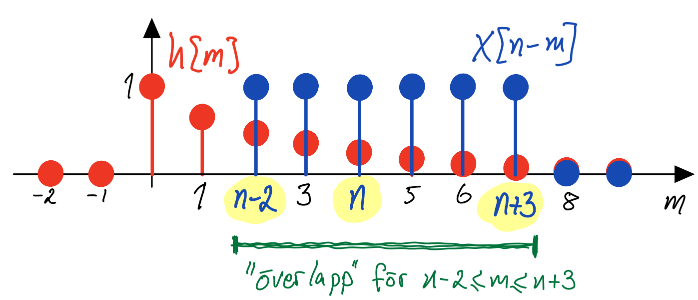
(I grafen är $n=0$)




$$y_{zs}[n]=\sum_{m=0}^{n+3} 1\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^m = \Big/\text{Formels. sid.3}\Big/ = \left(\tfrac{1}{3}\right)^0\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+4}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n+4}\right)$$

* $n-2>0$, dvs. $n>2$:

($\geq 0$ är också ok)




$$\Rightarrow y_{zs}[n]=\sum_{m=n-2}^{n+3} 1\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^m = \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^6}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3(3^6-1)}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{364}{27}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

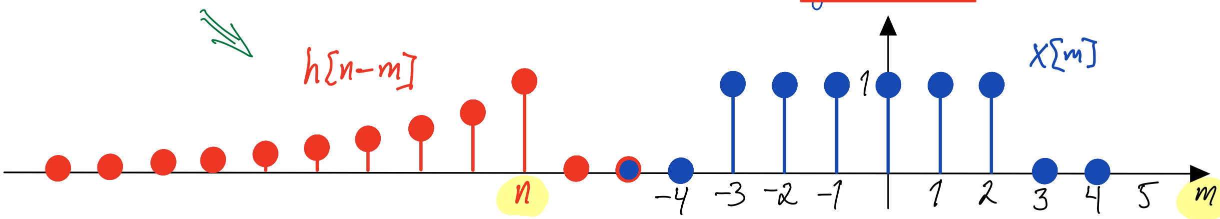
**Svar:** $y[n] = y_{zs}[n] = \begin{cases} 0; & n<-3 \\ \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+4}\right); & -3\leq n\leq 2 \\ \frac{364}{27}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n}; & n>2 \quad (n\geq 3) \end{cases}$

---

**Kommentar:** Det går naturligtvis även bra att spegla och förskjuta $h[n]$, dvs. beräkna i stället $y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$

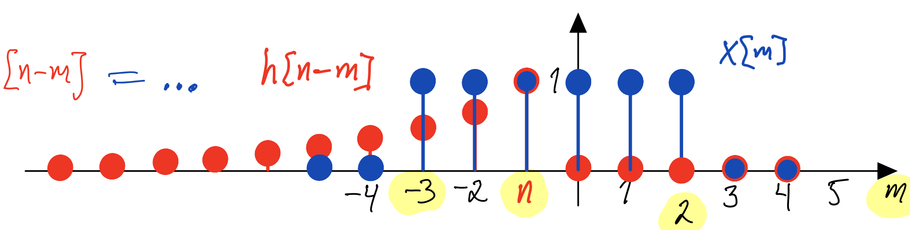
Det brukar till och med bli enklare att få korrekta summationsgränser om man speglar och förskjuter en funktion som är noll för $n<0$, som $h[n]$ i detta fall:

* $n<-3 \Rightarrow x[m]h[n-m]=0 \Rightarrow y_{zs}[n]=0$



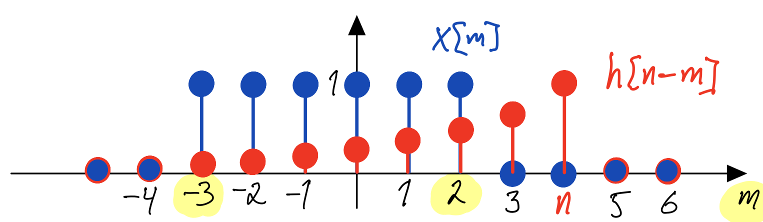

* $-3\leq n\leq 2 \Rightarrow$

$y_{zs}[n] = \sum_{n=-3}^{n} x[m]h[n-m] = \ldots$




* $n>2 \quad (n\geq 3) \Rightarrow$

$y_{zs}[n] = \sum_{n=-3}^{2} x[m]h[n-m] = \ldots$



Alternativ lösning av uppgift 4b – m.h.a. z-transformen:

Energifritt LTI-system ($y_{zi}[n]=0$) $\Rightarrow$ $y[n]=y_{zs}[n]=(x*h)[n]$

$$\Rightarrow \quad Y[z]=Y_{zs}[z]=X[z]\cdot H[z]$$

* $x[n]=u[n+3]-u[n-3]$. Formelsaml. Tab. 10:3, 9:3 & 9:5 $\Rightarrow$

$$X[z]=z^3\cdot\frac{z}{z-1}-z^{-3}\cdot\frac{z}{z-1}=\frac{z^6-1}{z^2(z-1)}=\frac{z^5+z^4+z^3+z^2+z+1}{z^2}$$

$\Rightarrow$ Konvergensområde $0<|z|<\infty$ Ty fler nollställen än poler $\Rightarrow \lim_{|z|\to\infty}|H[z]|=\infty$

* $h[n]=\delta[n]+\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]=\Big/$ Eftersom $\left(\frac{1}{3}\right)^0=1\Big/=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot u[n]$.

Formels. Tab. 10:4 $\Rightarrow$ $H[z]=\dfrac{z}{z-1/3}$, $|z|>\frac{1}{3}$

$$Y[z]=X[z]\cdot H[z]=\left(z^3\cdot\frac{z}{z-1}-z^{-3}\cdot\frac{z}{z-1}\right)\frac{z}{z-1/3}$$

$$=\left(z^3-z^{-3}\right)\cdot\frac{z^2}{(z-1)(z-1/3)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{Y[z]}{z}=\underbrace{\left(z^3-z^{-3}\right)}\cdot\frac{z}{(z-1)(z-1/3)}\overset{\text{P.B.U.}}{=}\left(z^3-z^{-3}\right)\left(\frac{\frac{3}{2}}{z-1}+\frac{-\frac{1}{2}}{z-1/3}\right)$$

(Behåll denna del utanför P.B.U. – den representerar tidsförskjutningar)

$$\Rightarrow \quad Y[z]=\left(z^3-z^{-3}\right)\left(\frac{3}{2}\cdot Y_1[z]-\frac{1}{2}\cdot Y_2[z]\right)$$

$$=\frac{3}{2}z^3Y_1[z]-\frac{1}{2}z^3Y_2[z]-\frac{3}{2}z^{-3}Y_1[z]+\frac{1}{2}z^{-3}Y_2[z]$$

där $Y_1[z]=\dfrac{z}{z-1}$; $|z|>1$ och $Y_2[z]=\dfrac{z}{z-1/3}$; $|z|>\frac{1}{3}$

Formels. Tab. 9:3 & 9:5 $\Rightarrow$

$$y[n] = \frac{3}{2}y_1[n+3] - \frac{1}{2}y_2[n+3] - \frac{3}{2}y_1[n-3] + \frac{1}{2}y_2[n-3]$$

$$= \big/ \text{Tab. } 10{:}3 \ \& \ 10{:}4 \big/$$

$$= \frac{3}{2}u[n+3] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+3}u[n+3] - \frac{3}{2}u[n-3] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}u[n-3]$$

$$= \begin{cases} \bullet\ 0; \quad n < -3 \\ \bullet\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+3} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+4}\right); \quad -3 \le n \le 2 \\ \bullet\ \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+3} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3^3} + 3^3\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \qquad = \frac{364}{27}\left(\frac{1}{3}\right)^n; \quad n \ge 3 \end{cases}$$

Dvs. samma svar som vid faltningsberäkning (förstås!), men det blir oftast "krångliga" transformberäkningar när $x[n]$ och/eller $h[n]$ har ändlig tidsutbredning.
Då är det vanligen smidigare att falta!

5

Uppgiften är baserad på lektionsuppgift 9.1a:

Kausalt (LTI-)system $\Rightarrow$ Skriv om differensekvationen på negativ form, så initialtillstånden kan användas när differensekvationen z-transformeras med den enkelsidiga z-transformen:

$$2y[n+2]-3y[n+1]+y[n]=4x[n+2]-3x[n+1] \quad \xrightarrow[\text{system}]{\text{Tidsinvariant}}$$

$$2y[n]-3y[n-1]+y[n-2]=4x[n]-3x[n-1]$$

Enkelsidig z-transform av vänsterledet & högerledet, med $\mathcal{Z}_I\{y[n-1]\}=z^{-1}Y[z]+y[-1]$ och

$$\mathcal{Z}_I\{y[n-2]\}=z^{-2}Y[z]+z^{-1}y[-1]+y[-2] \quad \Rightarrow$$

$$2Y[z]-3\Big(z^{-1}Y[z]+\underbrace{y[-1]}_{=0}\Big)+z^{-2}Y[z]+z^{-1}\underbrace{y[-1]}_{=0}+\underbrace{y[-2]}_{=1}$$

$$=4X[z]-3\Big(z^{-1}X[z]+\underbrace{x[-1]}_{=0,\text{ ty } x[n<0]=0 \text{ här}}\Big),$$

$$\Rightarrow \quad (2-3z^{-1}+z^{-2})Y[z]+1=(4-3z^{-1})X[z]$$

$$\Rightarrow \quad (2z^2-3z+1)Y[z]=-z^2+(4z^2-3z)X[z]$$

$$\Rightarrow \quad Y[z]=\underbrace{\frac{-z^2}{2z^2-3z+1}}_{=Y_{zi}[z]}+\underbrace{X[z]\cdot\frac{4z^2-3z}{2z^2-3z+1}}_{=Y_{zs}[z]=X[z]\cdot H[z]}$$

Betrakta de två signal-/transformdelarna separat:

- $Y_{zi}[z]=\dfrac{-z^2}{2z^2-3z+1}=\dfrac{-z^2}{2(z-0{,}5)(z-1)}$

$$\Rightarrow \frac{Y_{zi}[z]}{z} = \frac{-z}{2(z-0{,}5)(z-1)} = /\text{P.B.U.}/ = \frac{0{,}5}{z-0{,}5} - \frac{1}{z-1}$$

$$\Rightarrow Y_{zi}[z] = 0{,}5\,\underbrace{\frac{z}{z-0{,}5}}_{|z|>0{,}5} - \underbrace{\frac{z}{z-1}}_{|z|>1}$$

(Kausalt (LTI-) system, enligt uppgift ⇒ Både $Y_{zi}[n]$ och $H[z]$ har konv.områdestyp $|z|>R_0$)

Formels. Tab. 10:4 $\Rightarrow$ $\underline{y_{zi}[n] = \left(0{,}5^{n+1} - 1\right)u[n]}$

- $$Y_{zs}[z] = X[z]\cdot\frac{4z^2-3z}{2z^2-3z+1} = \Big/\ x[n] = 0{,}25^n\cdot u[n].\ \text{Tab. 10:4} \Rightarrow X[z] = \frac{z}{z-0{,}25},\ |z|>0{,}25\ \Big/$$

$$= \frac{z(4z^2-3z)}{2(z-0{,}25)(z-0{,}5)(z-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{Y_{zs}[z]}{z} = \frac{2z^2-1{,}5z}{(z-0{,}25)(z-0{,}5)(z-1)} = /\text{P.B.U.}/$$

$$= \frac{-4/3}{z-0{,}25} + \frac{2}{z-0{,}5} + \frac{4/3}{z-1}$$

$$\Rightarrow Y_{zs}[z] = -\frac{4}{3}\cdot\underbrace{\frac{z}{z-0{,}25}}_{\substack{|z|>0{,}25\\ \text{Från } X[z]}} + 2\cdot\underbrace{\frac{z}{z-0{,}5}}_{|z|>0{,}5} + \frac{4}{3}\cdot\underbrace{\frac{z}{z-1}}_{|z|>1}$$

Tab. 10:4 igen $\Rightarrow$ $\underline{y_{zs}[n] = \left(-\frac{4}{3}\cdot 0{,}25^n + 2\cdot 0{,}5^n + \frac{4}{3}\right)u[n]}$

$$\Rightarrow \underline{y[n]} = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$$

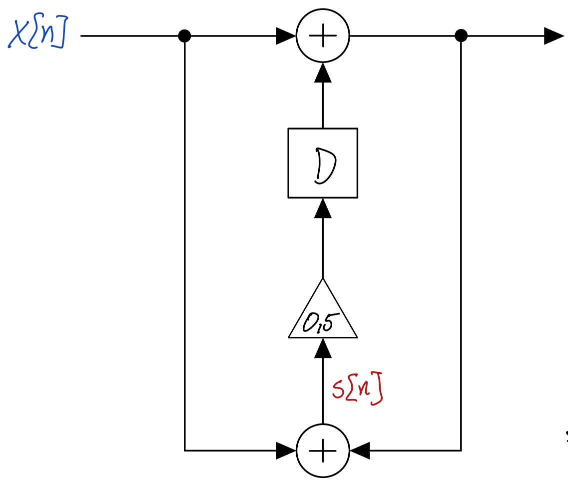
$$= \left(0{,}5^{n+1}-1\right)u[n] + \left(-\frac{4}{3}\cdot 0{,}25^n + 2\cdot 0{,}5^n + \frac{4}{3}\right)u[n]$$

$$= \underline{\left(2{,}5\cdot 0{,}5^n - \frac{4}{3}\cdot 0{,}25^n + \frac{1}{3}\right)u[n]}$$

(6) Uppgiften är baserad på lektionsuppgift 9.8:

a) Sökes: Pol-nollställediagrammet till $H[z] = \frac{Y_{zs}[z]}{X[z]}$.

$\Rightarrow$ Utgå från energifritt system (dvs. $y[n] = y_{zs}[n]$) och inför hjälpstorheten $s[n]$ efter summatorn, enligt nedan:




$$y[n] = y_{zs}[n] = x[n] + 0{,}5 \cdot s[n-1]$$

där $s[n] = x[n] + y_{zs}[n]$

$$\Rightarrow Y[z] = Y_{zs}[z] = X[z] + 0{,}5\, z^{-1} S[z]$$

där $S[z] = X[z] + Y_{zs}[z]$

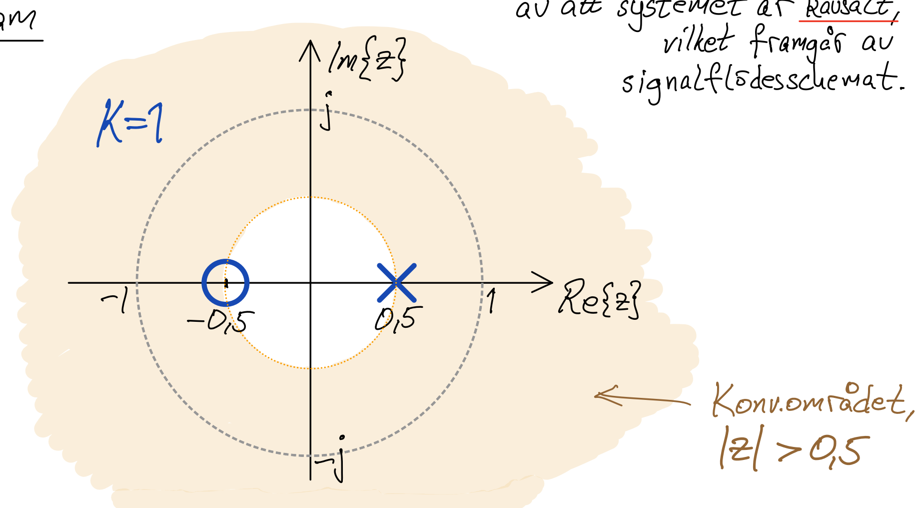
$$\Rightarrow Y_{zs}[z] = X[z] + 0{,}5\, z^{-1}\left(X[z] + Y_{zs}[z]\right)$$

$$\Rightarrow \left(1 - 0{,}5 z^{-1}\right) Y_{zs}[z] = \left(1 + 0{,}5 z^{-1}\right) X[z]$$

$$\Rightarrow \underline{H[z]} = \frac{Y_{zs}[z]}{X[z]} = \underline{\frac{z+0{,}5}{z-0{,}5} \; ; \; |z| > 0{,}5}$$

Pol-nollställediagram för $H[z]$:

Konvergensområdet följer av att systemet är kausalt, vilket framgår av signalflödesschemat.



b) Om LTI-systemet är <u>stabilt</u>, så genererer det, för insignalen $x[n] = 3 \cdot \sin(\frac{\pi}{2} n)$,

utsignalen $\underline{y[n] = 3 \cdot |H[\frac{\pi}{2}]| \cdot \sin(\frac{\pi}{2} n + \arg H[\frac{\pi}{2}])}$,

där $H[\frac{\pi}{2}] = H[z]\big|_{z = e^{j\frac{\pi}{2}}} = H[z=j]$.

Enhetscirkeln ligger i konv.området för $H[z]$

$\Rightarrow$ systemet <u>är</u> stabilt.

$$\Rightarrow \quad \underline{H[\Omega = \tfrac{\pi}{2}]} = H[z=j] = \frac{0{,}5 + j}{-0{,}5 + j}$$

$$= \frac{\sqrt{0{,}5^2 + 1^2} \cdot e^{j \arctan\left(\frac{1}{0{,}5}\right)}}{\sqrt{0{,}5^2 + 1^2} \cdot e^{j\left(\arctan\left(\frac{1}{-0{,}5}\right) \underbrace{-\pi}_{\text{ty negativ realdel}}\right)}}$$

$$= \underline{1 \cdot e^{j(2 \cdot \arctan(2) + \pi)}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H[\frac{\pi}{2}]| = 1 \\ \arg H[\frac{\pi}{2}] = 2 \cdot \arctan(2) + \pi \text{ rad} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y[n] = 3 \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{2} n + 2 \cdot \arctan(2) + \pi\right)}$$