

① a) LTI-system med insignal $x(t) = 6 + \sqrt{104} \cos(2t) \Rightarrow$

Om systemet är stabilt gäller $y(t) = 6 \cdot H(0) + \sqrt{104} \cdot |H(2)| \cdot \cos(2t + \arg H(2))$
 där $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

$H(s) = ?$ Laplacetransformera differentialekvationen:

$$\mathcal{L}_{II} \left\{ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) \right\} = \mathcal{L}_{II} \left\{ 5 \frac{dx(t)}{dt} + 13x(t) \right\}$$

Formelsaml. Tab. 4:10 $\Rightarrow (s^2 + 5s + 6)Y(s) = (5s + 13)X(s)$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5s + 13}{s^2 + 5s + 6} = \frac{5(s + 13/5)}{(s+3)(s+2)} \quad (\text{poler i } s = -3, -2)$$

Kausalt system, enligt uppgift \Rightarrow konv. område $\text{Re}\{s\} > -2$

\Rightarrow $j\omega$ -axeln ligger i konv. området \Rightarrow Systemet är stabilt.

$$\Rightarrow \begin{cases} H(\omega=0) = H(s=0) = \frac{13}{6} \\ H(\omega=2) = H(s=j2) = \frac{13 + j5 \cdot 2}{6 - 2^2 + j5 \cdot 2} = \frac{13 + j10}{2 + j10} \\ = \frac{\sqrt{13^2 + 10^2} \cdot e^{j \arctan \frac{10}{13}}}{\sqrt{2^2 + 10^2} \cdot e^{j \arctan \frac{10}{2}}} = \underbrace{\sqrt{\frac{269}{104}}}_{= |H(2)|} \cdot e^{j(\arctan \frac{10}{13} - \arctan \frac{10}{2})} \\ = \arg H(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{y(t)} = 6 \cdot \frac{13}{6} + \sqrt{104} \cdot \sqrt{\frac{269}{104}} \cdot \cos(2t + \arctan \frac{10}{13} - \arctan \frac{10}{2})$$

$$\approx \underline{13 + \sqrt{269} \cdot \cos(2t - 0,72)}$$

b) LTI-system $\Rightarrow g(t) = (u * h)(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

där $G(s) = U(s) \cdot H(s) = \left(\begin{array}{l} \text{Tab. 5:3} \Rightarrow \\ U(s) = \frac{1}{s}, \text{Re}\{s\} > 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{H(s) från a)} \\ \text{Ty kausalt system} \end{array}$

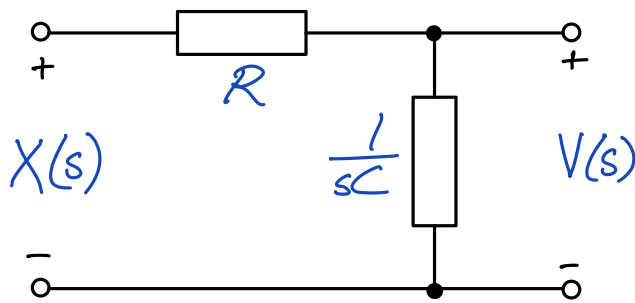
$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{5(s + 13/5)}{(s+3)(s+2)} = \frac{1}{s} \left(13 \frac{1}{s} - 4 \frac{1}{s+3} - 9 \frac{1}{s+2} \right)$$

$\text{Re}\{s\} > 0$ $\text{Re}\{s\} > -3$ $\text{Re}\{s\} > -2$

Formelsamlingen,

Tab. 5:3 & 5:11 $\Rightarrow \underline{g(t) = \frac{1}{6} (13 - 4e^{-3t} - 9e^{-2t}) u(t)}$

② a) Operatorschema:



Spänningsdelning \Rightarrow

$$V(s) = X(s) \cdot \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = X(s) \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = X(s) \cdot \frac{2}{s+2}$$

$$\Rightarrow \underline{H_A(s) = \frac{V(s)}{X(s)} = \frac{2}{s+2}}$$

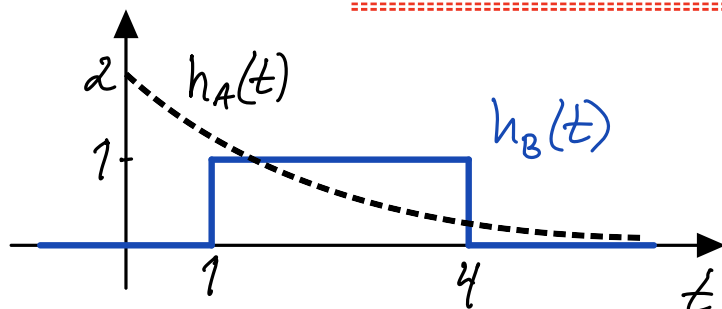
Fysikaliskt RC-nät \Rightarrow kausalt system \Rightarrow

konv. området för $H_A(s)$ är $\underline{\text{Re}\{s\} > -2}$

Formels. Tab. 5:11 $\Rightarrow \underline{h_A(t) = 2e^{-2t} u(t)}$

b) A & B är LTI-system $\Rightarrow y_{zs}(t) = v(t) * h_B(t) = (x(t) * h_A(t)) * h_B(t)$
 $= x(t) * (h_A(t) * h_B(t)) = x(t) * h(t) \Rightarrow \underline{h(t) = h_A(t) * h_B(t)}$

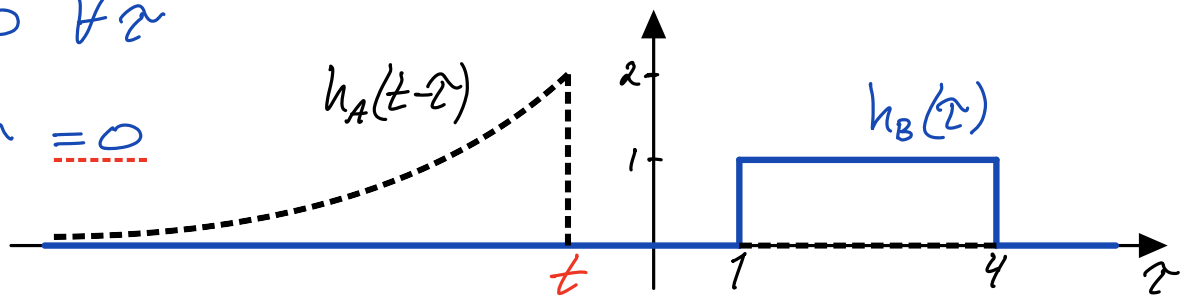
dvs. $h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_A(t-\tau) h_B(\tau) d\tau$



$$\underline{t < 1:}$$

$$h_A(t-\tau)h_B(\tau) = 0 \quad \forall \tau$$

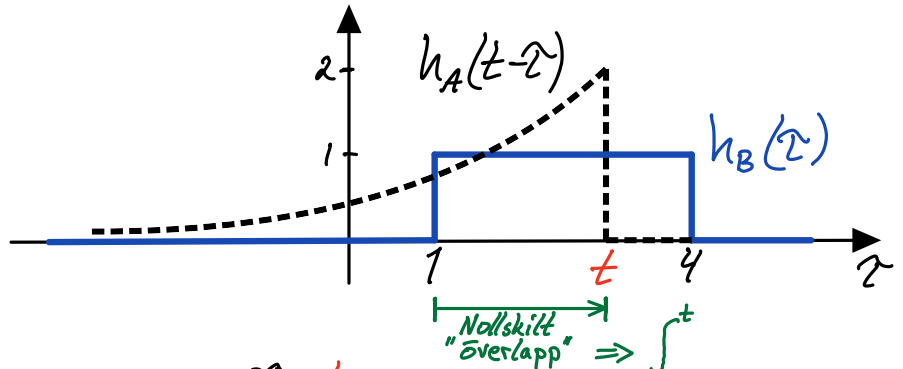
$$\Rightarrow \underline{h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 d\tau = 0}$$



$$\underline{1 \leq t < 4:}$$

$$\underline{h(t) = \int_1^t 2e^{-2(t-\tau)} \cdot 1 d\tau}$$

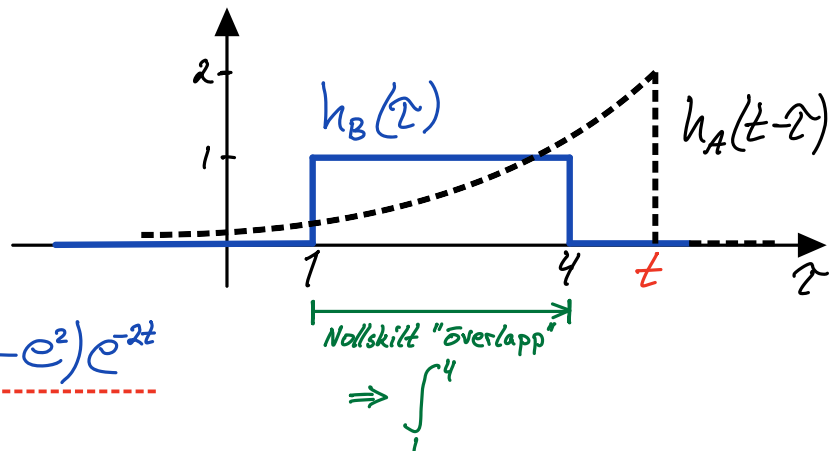
$$= 2e^{-2t} \int_1^t e^{2\tau} d\tau = 2e^{-2t} \left[\frac{e^{2\tau}}{2} \right]_1^t = \underline{1 - e^{-2(t-1)}}$$



$$\underline{t \geq 4:}$$

$$\underline{h(t) = \int_1^4 2e^{-2(t-\tau)} \cdot 1 d\tau}$$

$$= 2e^{-2t} \left[\frac{e^{2\tau}}{2} \right]_1^4 = \underline{(e^8 - e^2)e^{-2t}}$$



$$\text{Dvs. } \underline{h(t)} = \begin{cases} 0; & t < 1 \\ 1 - e^{-2(t-1)}; & 1 \leq t < 4 \\ (e^8 - e^2)e^{-2t}; & t \geq 4 \end{cases}$$

$$= (1 - e^{-2(t-1)})(u(t-1) - u(t-4)) + (e^8 - e^2)e^{-2t}u(t-4)$$

$$= \underline{(1 - e^{-2(t-1)})u(t-1) - (1 - e^{-2(t-4)})u(t-4)}$$

Alternativ lösning via transformdomänen - se nästa sida!

Alternativt kan $h(t) = h_A(t) * h_B(t)$ erhållas som $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$,

där $H(s) = H_A(s) \cdot H_B(s)$, med $H_A(s) = \frac{2}{s+2}$, $\text{Re}\{s\} > -2$ från a)

$$H_B(s) = \mathcal{L}\{h_B(t)\} = \int_1^4 1 \cdot e^{-st} dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_1^4 = \frac{1}{s} (e^{-s} - e^{-4s}), \text{Re}\{s\} > -\infty$$

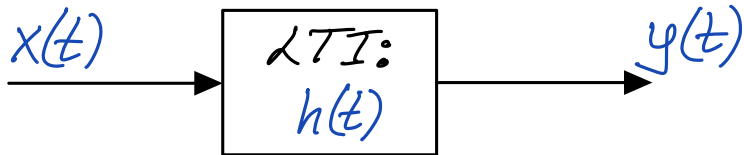
(Notera att $H_B(s=0) \neq 0$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(s) &= \frac{2}{s+2} \cdot \frac{1}{s} (e^{-s} - e^{-4s}) = \text{P.B.U.} = (e^{-s} - e^{-4s}) \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) \\ &= e^{-s} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) - e^{-4s} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) \end{aligned}$$

\uparrow $\text{Re}\{s\} > 0$ \uparrow $\text{Re}\{s\} > -2$

Tab. 4:5, 5:3 & 5:11 \Rightarrow $h(t) = (1 - e^{-2(t-1)})u(t-1) - (1 - e^{-2(t-4)})u(t-4)$

3



$$h(t) = t \cdot e^{-3t} u(t)$$

T_0 -periodisk insignal med $T_0 = 8$ sek, enligt grafen

$$\Rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \quad \text{där} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}$$

Här: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ (behöver ej visas) \Rightarrow LTI-systemet är stabilit

$$\Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n \cdot e^{jn\omega_0 t}, \quad \text{där} \quad \hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0)$$

$$* \underline{D_n} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{8} \int_0^2 3 \cdot e^{jn\frac{\pi}{4}t} dt = \frac{3}{-jn\frac{\pi}{4} \cdot 8} \left[e^{jn\frac{\pi}{4}t} \right]_0^2$$

$n \neq 0$ ty division med n

$$= \frac{3}{-jn2\pi} \left(\underbrace{e^{-jn\frac{\pi}{2}} - e^0}_{=(e^{-j\frac{\pi}{2}})^n = (-j)^n} \right) = \frac{3(1 - (-j)^n)}{jn2\pi}$$

$$\underline{D_0} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \underbrace{e^{-j0 \cdot \omega_0 t}}_{=e^0=1} dt = \frac{1}{8} \int_0^2 3 dt = \underline{\frac{3}{4}}$$

$$* H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\{t \cdot e^{-3t} u(t)\} \stackrel{\text{Tab. 3:8}}{=} \frac{1}{(3+j\omega)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{H(n \cdot \omega_0)} \Big|_{\omega_0 = \frac{\pi}{4} \text{ rad/s}} = \frac{1}{(3+jn\frac{\pi}{4})^2} \quad \left(\Rightarrow \underline{H(0 \cdot \omega_0) = \frac{1}{3^2}} \right)$$

$$\Rightarrow \hat{D}_n = \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{12}; & n=0 \\ \frac{3(1 - (-j)^n)}{jn2\pi(3+jn\frac{\pi}{4})^2}; & n \neq 0 \end{cases}$$

4

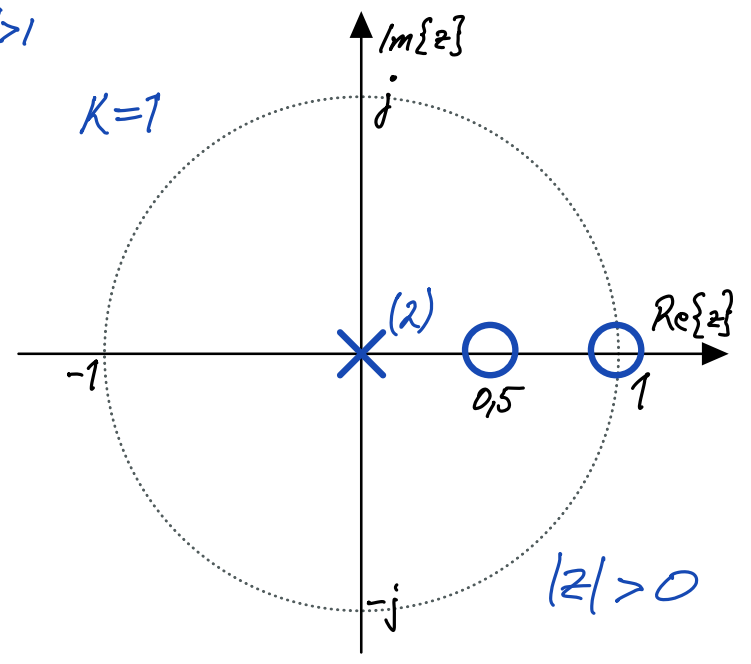
a) $H[z] = \frac{Y_{zs}[z]}{X[z]}$, där

$y[n] = y_{zs}[n]$ ty energifritt system

Tab. 10:1 & 10:2

$$\begin{cases} Y_{zs}[z] = \mathcal{Z}\{2\delta[n] - 1.5\delta[n-1]\} = 2 - 1.5z^{-1} = \frac{2z - 1.5}{z}, & |z| > 0 \\ X[z] = \mathcal{Z}\{0.5^n u[n] + u[n]\} = \frac{z}{z-0.5} + \frac{z}{z-1} & \begin{matrix} |z| > 0.5 \\ |z| > 1 \end{matrix} \\ = \frac{z(2z-1.5)}{(z-0.5)(z-1)}, & |z| > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{H[z] = \frac{2z-1.5}{z} \cdot \frac{(z-0.5)(z-1)}{z(2z-1.5)}} \\ = \underline{\frac{(z-0.5)(z-1)}{z^2}}, |z| > 0$$



b) Konvergensområdet är av typen $|z| > R_0$

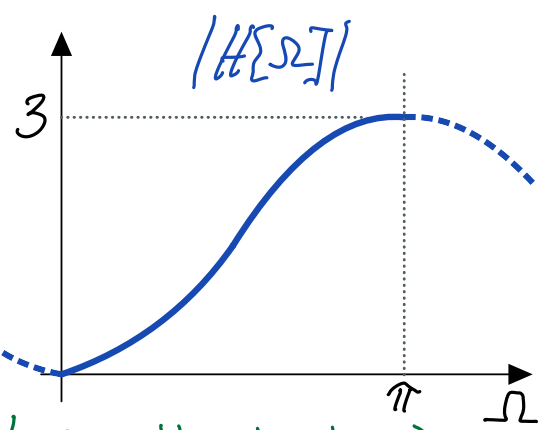
\Rightarrow Systemet är kausalt

(Se även anm. i uppg. d)

c) Enhetscirkeln ingår i konvergensområdet för $H[z]$

$\Rightarrow H[\Omega] = H[z]_{z=e^{j\Omega}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H[\Omega=0]| = |H[z=1]| = 0 \\ |H[\Omega=\pi]| = |H[z=-1]| = \frac{1.5 \cdot 2}{1^2} = 3 \end{cases}$$



(Enkelnollställe i $z=1 \Rightarrow \lim_{\Omega \rightarrow 0} |H[\Omega]|$ går rätlinjigt mot 0.)

d) $|H[\Omega]|$ -grafen \Rightarrow systemet dämpar frekvenssignaler med låg normerad vinkelfrekvens ($\lim_{\Omega \rightarrow 0} |H[\Omega]| = 0$) och släpper igenom (med förstärkning) frekvenssignaler med hög normerad vinkelfrekvens ($\lim_{\Omega \rightarrow \pi} |H[\Omega]| = 3$)
 \Rightarrow LTI-systemet utgör ett högpassfilter

$$c) H[z] = \frac{(z-0,5)(z-1)}{z^2} = \frac{z^2 - 1,5z + 0,5}{z^2} = 1 - 1,5z^{-1} + 0,5z^{-2}$$

$$\text{Tab. 10:1 \& 10:2} \Rightarrow \underline{h[n] = \delta[n] - 1,5\delta[n-1] + 0,5\delta[n-2]}$$

(Anm: Här ser vi att $h[n] = 0$ för $n < 0$
 \Rightarrow Systemet är kausalt, en alternativ motivering i uppgift b).)

$$5) a) h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\text{Tab. 10:4} \Rightarrow H[z] = \frac{z}{z-1/2} + \frac{z}{z+1/2} = \frac{2z^2}{z^2-1/4}, |z| > \frac{1}{2}$$

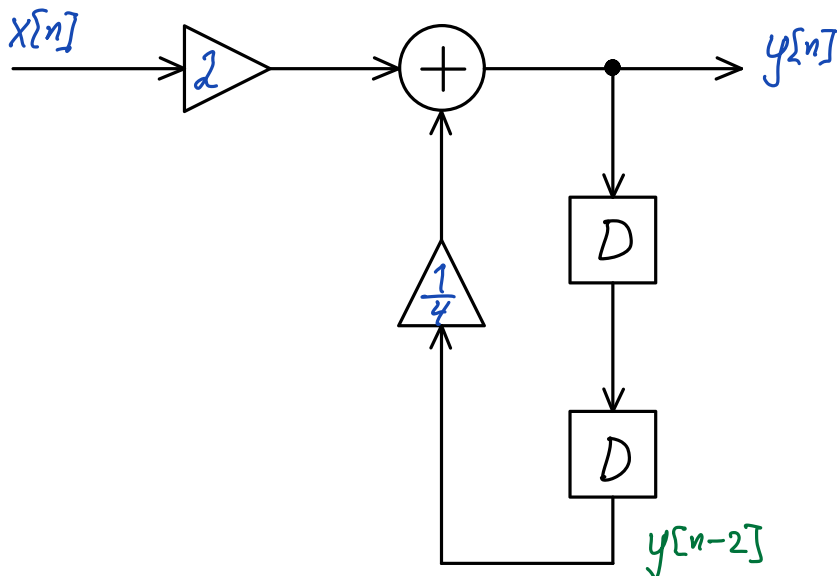
$$H[z] = \frac{Y_{zs}[z]}{X[z]} \stackrel{*}{=} \frac{2}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} \Rightarrow Y[z] - \frac{1}{4}z^{-2}Y[z] = 2X[z]$$

↑
 Betrakta energifritt system
 $\Rightarrow y[n] = y_{zs}[n], Y[z] = Y_{zs}[z]$

$$\text{Tab. 9:4} \Rightarrow y[n] - \frac{1}{4}y[n-2] = 2x[n]$$

$$\Rightarrow \underline{y[n] = 2x[n] + \frac{1}{4}y[n-2]}$$

Realisering:



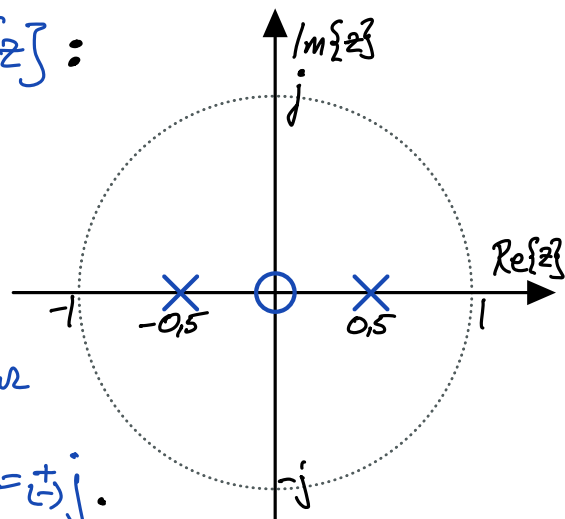
$$\begin{aligned}
 b) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right| = \sum_{\substack{n=0 \\ \text{j\u00e4mn } n=0}}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n \stackrel{n=2p}{=} 2 \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^p \\
 &= \frac{2}{1-1/4} = \frac{3}{8} < \infty \Rightarrow \text{LTI-systemet \u00e4r } \underline{\text{st\u00e4bilt}}
 \end{aligned}$$

(\u00c4tt: $H[z]$ har konvergensomr\u00e5de $|z| > \frac{1}{2} \Rightarrow$
 Enhetscirkeln ligger i konv.omr\u00e5det \Rightarrow Systemet \u00e4r st\u00e4bilt)

c) Pol-nollst\u00e4llediagrammet till $H[z]$:

Eftersom $|H[\Omega]|$ erh\u00e5lls som $|H[z]|$ l\u00e4ngs enhetscirkeln, s\u00e5 erh\u00e5lls $|H[\Omega]|_{\min}$ f\u00f6r det Ω

d\u00e4r avst\u00e5ndet mellan polerna och $z = e^{j\Omega}$ \u00e4r st\u00f6rst \Rightarrow f\u00f6r $\Omega = \pm \frac{\pi}{2}$, dvs. $z = \pm j$.



$$\Rightarrow \underline{|H[\Omega]|_{\min}} = |H[\Omega = \frac{\pi}{2}]| = |H[z = j]| = \left| \frac{2(-1)}{-1 - \frac{1}{4}} \right| = \underline{\frac{8}{5} = 1,6}$$

6 a) SANT: Om $H[z]$ har ett nollställe i $z=1$, så är $H[\Omega]=0$ för $\Omega=0$, dvs. konstanter filtreras bort av systemet, vilket inte kan gälla för ett LP-filter.

b) FALSKT: Polernas placering i realdel (innanför enhetscirkeln) beror på HP-filtrets bandbredd. (Kämpligen/vanligen har systemfunktionen till HP-filtret nollställen i $z=1$ och för HP-filtret med stor bandbredd har då poler i höger halvplan.)

Motexempel: $H[z] = \frac{z-1}{z-0,5}$, $|z| > 0,5$, har en pol i $z=0,5$ dvs. med positiv realdel

c) FALSKT: (Nollställen & poler i origo påverkar inte amplitudkaraktärstiken)
Dvs. $H[z]$ har minst ett nollställe i origo.
Motexempel: Låt $H[z] = z \cdot H_1[z]$, där $H_1[z]$ inte har en pol i origo.

⇒ $H[\Omega] = H[z=e^{j\Omega}] = e^{j\Omega} \cdot H_1[e^{j\Omega}]$ (För stabilt system)
⇒ $\arg H[\Omega] = \arg(e^{j\Omega}) + \arg H_1[e^{j\Omega}] = \underline{\Omega} + \arg H_1[e^{j\Omega}]$
⇒ Fasbidrag Ω rad för varje nollställe i origo.

d) FALSKT: $h[n] = n(u[n+1] - u[n-1]) = -\delta[n+1]$
⇒ $g[n] = u[n] * h[n] = -u[n] * \delta[n+1] = -u[n+1] \neq -\delta[n+1] + \delta[n-1]$

e) FALSKT: (Påståendet gäller för kausaltet)

Motexempel: Ett LTI-system med systemfunktion $H[z] = \frac{(z-1)^2}{z}$, $0 < |z| < \infty$, är stabilt, ty enhetscirkeln ingår i konvergensområdet för $H[z]$.

f) SANT: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]|$ är inte begränsad, men $|h[n]| < \infty \forall n$
(dvs. $h[n]$ är begränsad för alla n), vilket innebär att LTI-systemet
är marginellt stabilt.

(Alt. motivering: $H[z] = \mathcal{Z}\{h[n]\}$ har enkelpoler på enhetscirkeln,
som är en rand till konvergensområdet $|z| > 1$.)

g) SANT: Vid samplingen erhålls ett spektrum som är en
 f_s -periodisk upprepning av $X(f)$. Korrekt rekonstruktion
dvs. att den rekonstruerade signalen är lika med $x(t)$, kan ske
om de periodiska upprepningarna inte överlappar varandra
(dvs. ingen vikning inträffar) $\Rightarrow f_s - B > B \Rightarrow f_s > 2B$.

(Här är det lämpligt, men inte nödvändigt, att du förtydligar
detta samband med en graf av den samplade signalens spektrum.)

h) FALSKT: DFT:n är f_s -periodisk m.a.p. frekvensen f
och N_0 -periodisk m.a.p. det samplade (DFT-)spektrumet,
dvs. $f_s = N_0 \cdot f_0 \Rightarrow N_0 = \frac{f_s}{f_0}$ (dvs. $N_0 \neq \frac{f_0}{f_s}$)