LÖSNINGAR, TSDT18/84 Signaler & System 2023-01-11

1 a) $H_1(s) = \dfrac{Y_{zs}(s)}{W(s)}$, där $Y_{zs}(s)$ och $W(s)$ erhålls genom att Laplacetransformera differentialekvationen:

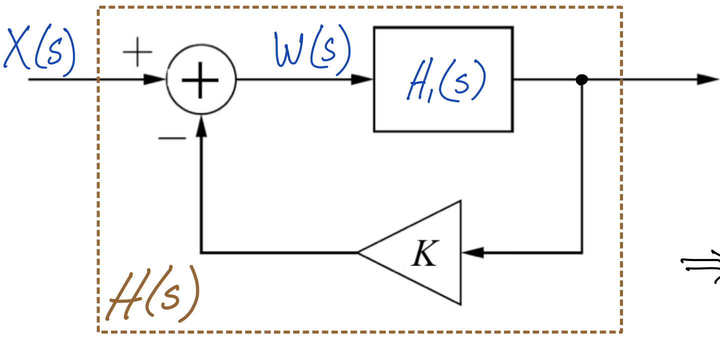
$$\mathcal{L}_{II}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t)\right\} = \mathcal{L}_{II}\left\{2\frac{dw(t)}{dt} + 2w(t)\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{Tab. 4:11}]{\text{Formels.}} (s^2+2s-3)Y(s) = (2s+2)W(s) \Rightarrow \quad \mathcal{L}_{II} \Rightarrow Y(s) = Y_{zs}(s)$$

$$\Rightarrow \underline{H_1(s)} = \frac{Y_{zs}(s)}{W(s)} = \frac{2s+2}{s^2+2s-3} = \underline{\frac{2(s+1)}{(s-1)(s+3)}}$$

Kausalt LTI-system $\Rightarrow$ högersidigt konvergensområde, $\underline{\mathrm{Re}\{s\} > 1}$

b)



$Y(s) = W(s)\cdot H_1(s)$, där

$W(s) = X(s) - K\cdot Y(s)$

$\Rightarrow Y(s)\left(1 + K\cdot Y(s)\right) = X(s)H_1(s)$

Betrakta energifritt system $\Rightarrow$ $Y(s) = Y_{zs}(s)$ $\Longrightarrow$

$$\underline{H(s)} = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1+K\cdot H_1(s)} = \frac{\frac{2s+2}{s^2+2s-3}}{1+K\cdot\frac{2s+2}{s^2+2s-3}} =$$

$$= \frac{2s+2}{s^2+2s-3+2K(s+1)} = \underline{\frac{2(s+1)}{(s+(1+K))^2-(K^2+4)}}$$

Eftersom alla delsystem/delar i det totala systemet är kausala (H_1, $\oplus$, $\triangleleft K$) så är även det totala systemet kausalt $\Longrightarrow$ konvergensområdet för $H_1(s)$ är högersidigt; till höger om den "högraste" polen hos $H_1(s)$. För att systemet ska vara stabilt, så måste $j\omega$-axeln ligga i konvergensområdet.

Följaktligen måste båda polerna $s = -(1+K) \pm \sqrt{K^2+4}$ hos $H(s)$ ligga i vänster halvplan:

För alla reellvärda konstanter K är $K^2+4>0$, dvs. båda polerna är reellvärda. För polen längst till höger gäller att $s = -(1+K) + \sqrt{K^2+4} < 0 \Rightarrow$

$$K^2+4 < (1+K)^2 = K^2+2K+1 \Rightarrow \underline{K > \frac{3}{2}}$$

(Anm: Alla poler hamnar också i vänster halvplan om alla koefficienter i nämnarpolynomet $s^2+(2+2K)s+2K-3$ är strikt positiva, dvs. $\begin{cases} 2(K+1)>0 \\ 2K-3>0 \end{cases} \Rightarrow \underline{K > \frac{3}{2}}$)

---

② a) i) Låt systemet, för insignalen $x_n(t)$, generera utsignalen $y_n(t) = \mathcal{H}\{x_n(t)\}$ och betrakta insignalen $x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$, där $a, b \in \mathbb{C}$ ($\in \mathbb{R}$ är OK).

Systemet är linjärt om utsignalen $y(t)$ kan skrivas på formen $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$

Systemexempel: Se kursboken eller lektionsuppgifter

ii) Antag att systemet, för insignalen $x(t)$, genererar utsignalen $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ samt betrakta den tidsförskjutna insignalen $\tilde{x}(t) = x(t-T)$, $T \in \mathbb{R}$.

Systemet är tidsinvariant om utsignalen förskjuts på samma sätt, dvs. $\tilde{y}(t) = \mathcal{H}\{\tilde{x}(t)\} = y(t-T)$.

Systemexempel: Se kursboken eller lektionsuppgifter

b) $h(t) = 4t\,e^{-2t}u(t) \implies \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$

$\implies \begin{cases} \text{Stabilt (LTI-)system} \\ \mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) \text{ existerar: Tab 3:8} \xRightarrow{n=1} H(\omega) = \dfrac{4}{(2+j\omega)^2} \end{cases}$

Stabilt LTI-system med insignal $x(t) = 6\cdot\cos(2t+\frac{\pi}{4})$

$\implies$ Utsignalen är $y(t) = 6\,|H(2)|\cos(2t + \frac{\pi}{4} + \arg H(2))$

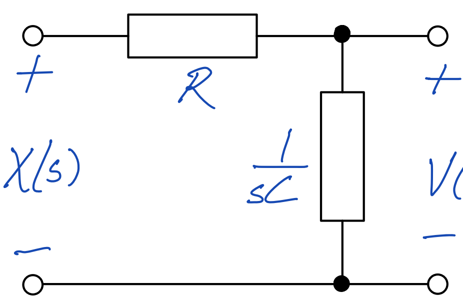
där $H(2) = \dfrac{4}{(2+j2)^2} = \dfrac{1}{(1+j)^2} = \dfrac{1}{(\sqrt{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}})^2} = \dfrac{1}{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}$

$\implies |H(2)| = \frac{1}{2}$, $\arg H(2) = -\frac{\pi}{2}$ rad

$\implies y(t) = 3\cdot\cos(2t - \frac{\pi}{4})$

---

(3) a) Operatorschema:



Spänningsdelning, utgående från energifritt system (ty systemanalys)

$\implies V(s) = V_{zs}(s)$:

$V(s) = X(s)\cdot\dfrac{1/sC}{R + 1/sC} = X(s)\cdot\dfrac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$

LTI-system $\implies H_A(s) = \dfrac{V_{zs}(s)}{X(s)} \overset{RC=\frac{1}{2}}{=} \dfrac{2}{s+2}$ Konv.område?

Fysikaliskt RC-nät $\implies$ Kausalt LTI-system $\implies \mathrm{Re}\{s\} > -2$

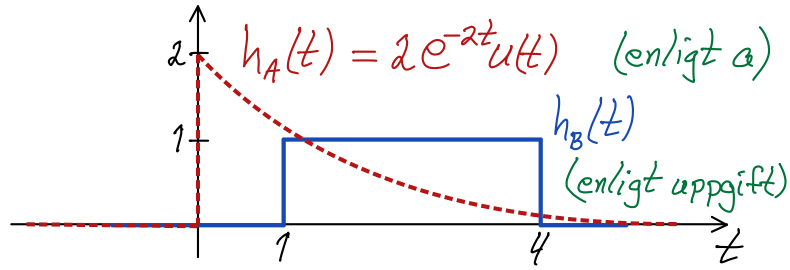
Formelsaml. Tab. 5:11 $\implies h_A(t) = 2e^{-2t}u(t)$

b) A & B är LTI-system $\Rightarrow$ $y(t) = (v * h_B)(t)$

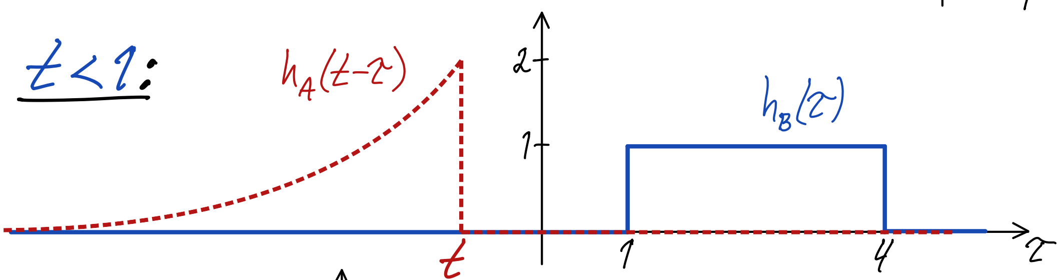
$$= ((x * h_A) * h_B)(t) = (x * (h_A * h_B))(t) = (x * h)(t)$$

$$\Rightarrow h(t) = (h_A * h_B)(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h_A(t-\tau)\, h_B(\tau)\, d\tau$$



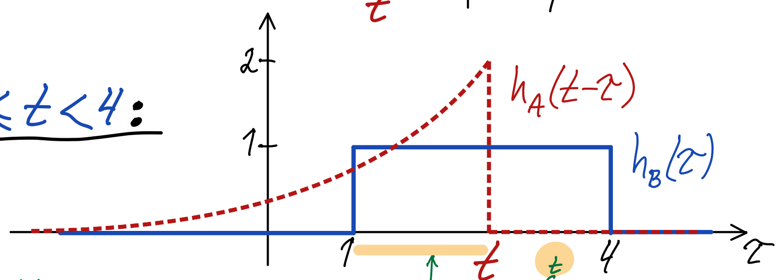
$t<1$:



$$h_A(t-\tau)\, h_B(\tau) = 0$$

$$\Rightarrow h(t) = 0$$

$1 \leq t < 4$:



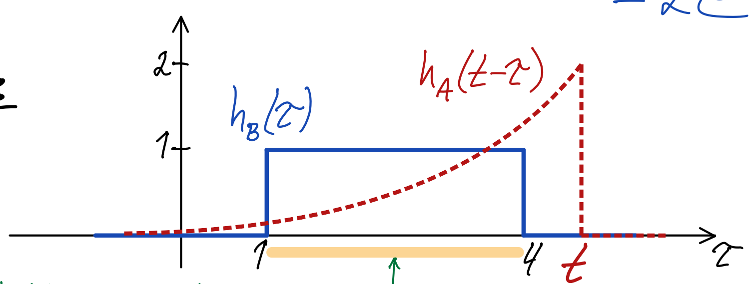
$h_A(t-\tau)h_B(\tau) \neq 0$ endast för $\tau \in [1,t]$ $\Rightarrow \int_1^t$

$$h(t) = \int_1^t 2e^{-2(t-\tau)} \cdot 1\, d\tau$$

$$= 2e^{-2t}\int_1^t e^{2\tau}\, d\tau$$

$$= 2e^{-2t}\left[\frac{e^{2\tau}}{2}\right]_1^t = 1 - e^{-2(t-1)}$$

$t \geq 4$:



$h_A(t-\tau)h_B(\tau) \neq 0$ endast för $\tau \in [1,4]$ $\Rightarrow \int_1^4$

$$h(t) = \int_1^4 2e^{-2(t-\tau)} \cdot 1\, d\tau$$

$$= \ldots = (e^8 - e^2)e^{-2t}$$

Dvs. $h(t) = \left(1 - e^{-2(t-1)}\right)\left(u(t-1) - u(t-4)\right) + (e^8 - e^2)e^{-2t}u(t-4)$

Alt. lösning: $h(t) = (h_A * h_B)(t) \Longleftrightarrow H(s) = H_A(s)\cdot H_B(s)$, där $H_A(s) = \frac{2}{s+2}$, $\mathrm{Re}\{s\} > -2$

och $H_B(s) = \mathcal{L}\{h_B(t)\} = \int_1^4 1 \cdot e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_1^4 = \frac{1}{s}\left(e^{-s} - e^{-4s}\right)$, $\mathrm{Re}\{s\} > -\infty$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{2}{s+2}\cdot\frac{1}{s}\left(e^{-s} - e^{-4s}\right) = /\text{PBU}/ = \left(e^{-s} - e^{-4s}\right)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right)$$

$$= e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right) - e^{-4s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right); \ \mathrm{Re}\{s\} > 0 \text{ resp. } \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

Tab. 4:5, 5:3 & 5:11 $\Rightarrow$ $h(t) = \left(1 - e^{-2(t-1)}\right)u(t-1) - \left(1 - e^{-2(t-4)}\right)u(t-4)$

④ a) $y[n] = \frac{2}{3}\left(y[n+1] - y[n-1] - 2x[n]\right) \quad (\star)$

$\Rightarrow y[n+1] - \frac{3}{2}y[n] - y[n-1] = 2x[n]$

$\mathcal{Z}_{II}\{VL\} = \mathcal{Z}_{II}\{HL\} \underset{\substack{\text{Tab. 9:3} \\ \text{\& 9:4}}}{\Rightarrow} \left(z - \frac{3}{2} - z^{-1}\right) Y[z] = 2X[z]$

$\mathcal{Z}_{II} \Rightarrow Y[z] = Y_{zs}[z]$

$$\Rightarrow H[z] = \frac{Y_{zs}[z]}{X[z]} = \frac{2}{z - \frac{3}{2} - z^{-1}} = \frac{2z}{z^2 - \frac{3}{2}z - 1} = \frac{2z}{(z+0{,}5)(z-2)}$$

$(\star) \Rightarrow$ Utsignalen $y[n]$ beror på $\begin{cases} y[n+1] = \frac{2}{3}\left(y[n+2] - y[n] - 2x[n+1]\right) \\ y[n-1] = \frac{2}{3}\left(y[n] - y[n-2] - 2x[n-1]\right) \\ x[n] \end{cases}$

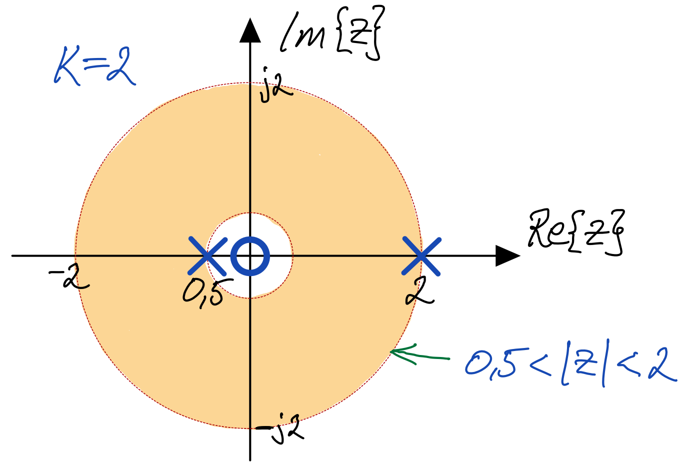
dvs. utsignalen beror både på insignalens framtida värden ("$x[n+1]$") och tidigare värden ("$x[n-1]$") [och $y[n+2]$ resp. $y[n-2]$ beror i sin tur på ytterligare framtida resp. tidigare insignalsvärden].

$\Rightarrow$ Systemet är icke-kausalt och konvergensområdet för $H[z]$ är därför "cirkelbandet" mellan systemfunktionens poler $z=-0{,}5$ & $z=2$, dvs. $0{,}5 < |z| < 2$ ($|z|>0{,}5$ p.g.a. tidigare x-värden, $|z|<2$ p.g.a. framtida x-värden)

Pol-nollställediagram för $H[z] = \frac{2z}{(z+0{,}5)(z-2)}$:

(Nollställe i $z=0$ och poler i $z=-0{,}5$ & $z=2$)

$K=2$



b) $y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n]$ Energifritt system $\Rightarrow y_{zi}[n] = 0$

$\Rightarrow Y[z] = Y_{zs}[z] = X[z] \cdot H[z]$, där $X[z] = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \mathcal{Z}\{\delta[n] - u[n-1]\}$

$= /\text{Tab. 10:1 \& 10:5}/ = 1 - \frac{1}{z-1} = \frac{z-2}{z-1}, \ |z|>1$

$$\Rightarrow \quad Y[z] = \frac{z-2}{z-1} \cdot \frac{2z}{(z+0{,}5)(z-2)} = \frac{2z}{(z-1)(z+0{,}5)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y[z]}{z} = \frac{2}{(z-1)(z+0{,}5)} = /\text{P.B.U.}/ = \frac{2/1{,}5}{z-1} + \frac{-2/1{,}5}{z+0{,}5}$$

$$\Rightarrow \quad Y[z] = \frac{4}{3}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-(-0{,}5)}\right) \; ; \; |z|>1 \text{ resp. } |z|>0{,}5 \text{ (från a)}$$

Tab. 10:4 $\Rightarrow$ $\underline{y[n] = \frac{4}{3}\left(1-(-0{,}5)^n\right)u[n]}$

---

5 a) $h[n] = 0{,}5^n u[n] - (-0{,}5)^n u[n] \xrightarrow{\text{Tab. 10:4}}$

$$H[z] = \underbrace{\frac{z}{z-0{,}5} - \frac{z}{z-(-0{,}5)}}_{(|z|>0{,}5)} = \frac{z}{(z-0{,}5)(z+0{,}5)} = \frac{z}{z^2-0{,}5^2}$$

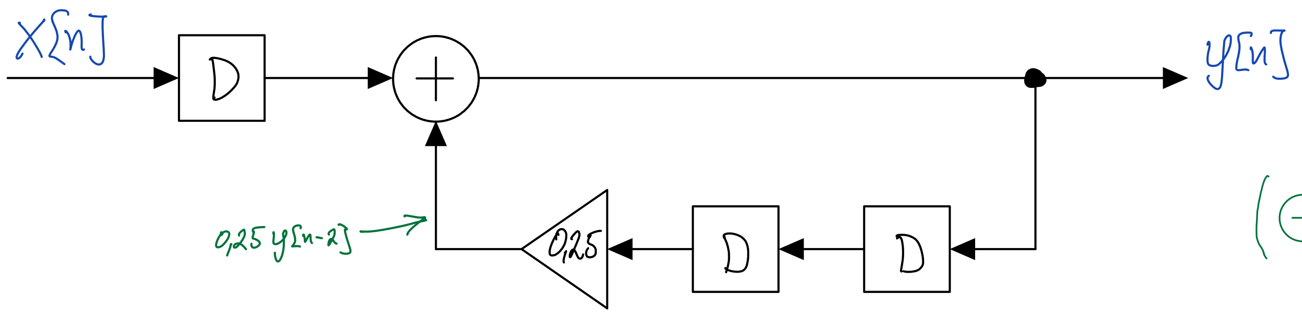
$$= \frac{z^{-1}}{1-0{,}25z^{-2}} = \frac{Y_{zs}[z]}{X[z]}$$

Betrakta energifritt system, med insignal $x[n]$ & utsignal $y[n]$ $\Rightarrow y[n] = y_{zs}[n]$

$$\xRightarrow{Y[z]=Y_{zs}[z]} \quad Y[z] - 0{,}25z^{-2}Y[z] = z^{-1}X[z] \xRightarrow{\text{Tab. 9:4}} y[n] - 0{,}25y[n-2] = x[n-1]$$

Väljs som utsignal, ty kausaltsystem (konv.omr. $|z|>\ldots$)

$$\Rightarrow \quad y[n] = x[n-1] + 0{,}25y[n-2]$$



(⊕ eller Σ)

b) Enhetscirkeln ingår i konvergensområdet för $H[z]$ $(|z|>0{,}5)$

$\Rightarrow$ LTI-systemet är stabilt $\Rightarrow$ /Formelsamlingen, sid 15/

$\Rightarrow$ För den stationära insignalen $x[n] = 2 + 5\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

erhålls utsignalen $y[n] = 2\cdot H[0] + 5\left|H\left[\frac{\pi}{2}\right]\right|\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}n + \arg H\left[\frac{\pi}{2}\right]\right)$

där $H[\Omega] = H[z]\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega}}{e^{j2\Omega}-0{,}25}$

OK, ty enhetscirkeln ligger i konvergensomr.

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet\ H[0] = \dfrac{1}{1-0{,}25} = \dfrac{4}{3} \\ \bullet\ H[\frac{\pi}{2}] = \dfrac{e^{j\frac{\pi}{2}}}{e^{j\pi}-0{,}25} = \dfrac{j}{-1-0{,}25} = -j\dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{5}e^{j\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

$|H[\frac{\pi}{2}]| = \frac{4}{5}$; $\arg H[\frac{\pi}{2}] = -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{8}{3} + 4\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right)$$

6

a) $x(t) = \dfrac{75}{25t^2+1} = 3\cdot\dfrac{1}{t^2+(\frac{1}{5})^2} \overset{\text{Tab. 3:16}}{\Longrightarrow} X(\omega) = 15\pi e^{-\frac{|\omega|}{5}}$

- $|X(2\pi B)| = 15\pi e^{-\frac{2\pi B}{5}} \overset{\text{Enl. uppg.}}{=} \frac{1}{80}|X(\omega)|_{max} = \frac{1}{80}\cdot 15\pi$

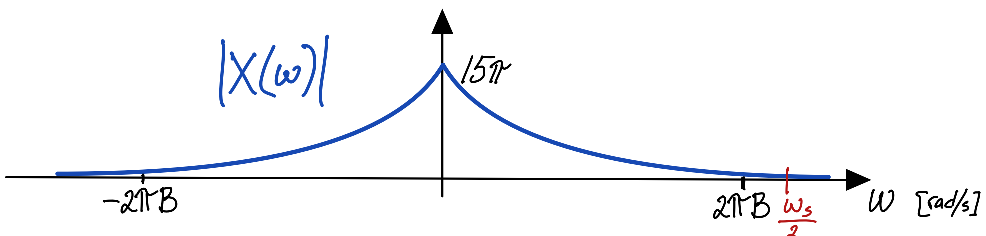
  $\Rightarrow e^{-\frac{2\pi B}{5}} = \frac{1}{80} \Rightarrow B = 5\cdot\frac{\ln(80)}{2\pi} \approx 3{,}5\ Hz$
- Samplingsteoremet är uppfyllt om $f_s > 2B \approx 7\ Hz$
- Frekvensrelation för DFT:n : $f_s = N_0\cdot f_0 \Rightarrow N_0 = \frac{f_s}{f_0} > \frac{7}{0{,}5} = 14$
- N_0 ska vara en 2-potens $\Rightarrow N_0 = N_{0,min} = 16$

  $\Rightarrow f_s = N_0\cdot f_0 = 16\cdot 0{,}5 = 8\ Hz$

b) Formels. sid 9 ⇒ Poissons summationsformel:

$$X[\Omega] = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\Omega - n\cdot 2\pi}{T}\right) = 8\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(8(\Omega - n2\pi)), \text{ där } X(\omega) = 15\pi e^{-\frac{|\omega|}{5}}$$

⇒ $X[\Omega]$ är en amplitudskalad (faktor 8) och periodiskt upprepad (frekvensskalning $\Omega = \omega T$ ⇒ period 2π m.a.p. Ω) version av $X(\omega)$:



(Anm: $X(\omega) > 0 \Rightarrow |X(\omega)| = X(\omega)$)

$\omega = \frac{\omega_s}{2} = \frac{2\pi f_s}{2} = 8\pi \Rightarrow \Omega = \omega T = \frac{\omega}{f_s} = \frac{8\pi}{8} = \pi$ rad