

① a) Energifritt LTI-system $\Rightarrow y(t) = y_{zs}(t) = (x * h)(t)$

$$\Leftrightarrow Y(s) = X(s) \cdot H(s), \text{ där}$$

$$\underline{X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}_{TL}\{\delta(t) - 3e^{-t}u(t)\}} \stackrel{\text{Tab. 5:1}}{\& \text{5:11}} = 1 - 3 \frac{1}{s+1} = \frac{s-2}{s+1}; \underline{\text{Re}\{s\} > -1}$$

$$\text{Pol-nollställediagrammet} \Rightarrow \underline{H(s) = \frac{3s}{(s-2)(s^2+3^2)}}$$

Kausalt system, enligt uppgift \Rightarrow högersidigt konv. område, $\underline{\text{Re}\{s\} > 2}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s) &= \frac{s-2}{s+1} \cdot \frac{3s}{(s-2)(s^2+3^2)} = \frac{3s}{(s+1)(s^2+3^2)} = \text{P.B.U.} \\ &= \frac{3}{10} \left(\frac{-1}{s+1} + \frac{s+9}{s^2+3^2} \right) = \frac{3}{10} \left(\underbrace{\frac{-1}{s+1}}_{\text{Re}\{s\} > -1} + \frac{s}{s^2+3^2} + 3 \cdot \frac{3}{s^2+3^2} \right) \\ &\quad \leftarrow \text{Re}\{s\} > 0 \text{ (från } H(s)) \end{aligned}$$

$$\text{Tab. 5:1, 5:18 \& 5:19} \Rightarrow \underline{y(t) = \frac{3}{10} (-e^{-t} + \cos(3t) + 3 \sin(3t)) u(t)}$$

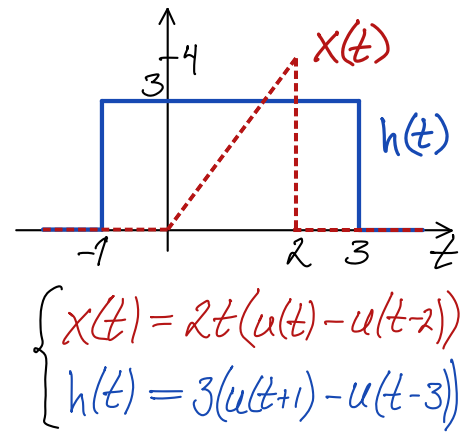
b) Systemfunktionens konvergensområde är $\text{Re}\{s\} > 2$ (se a) ovan)
 \Rightarrow $j\omega$ -axeln ingår inte i konvergensområdet
 \Rightarrow systemet är instabilt

Anm: För ett instabilt system gäller att dess utsignal är obegränsad (vanligen när $t \rightarrow \infty$) för alla begränsade insignaler. Här kancelleras dock polen i $s=2$ hos $H(s)$, som annars skulle ge en obegränsad utsignalskomponent.

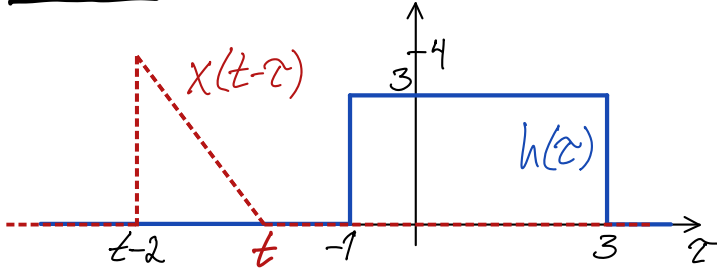
2) Energifritt LTI-system \Rightarrow

$$y(t) = y_{zs}(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$$

(eller $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$)

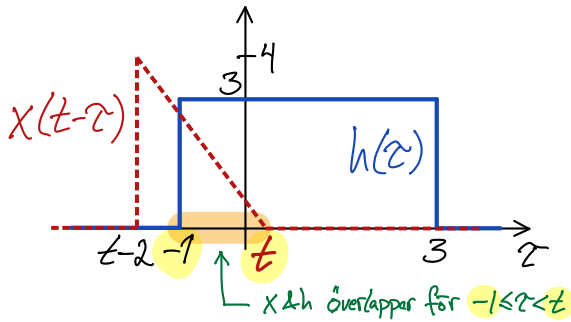


$t < -1$:



$$x(t-\tau)h(\tau) = 0 \quad \forall \tau \Rightarrow \underline{y(t) = 0}$$

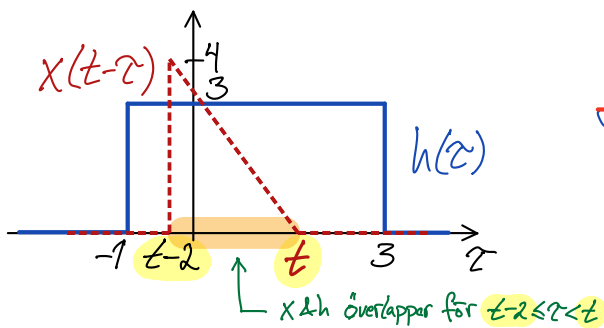
$t \geq 1$ & $t-2 < -1$, dvs. $-1 \leq t < 1$:



$$\underline{y(t)} = \int_{-1}^t 2(t-\tau) \cdot 3 d\tau = 6 \int_{-1}^t (t-\tau) d\tau$$

$$= 6 \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_{-1}^t = \dots = \underline{3t^2 + 6t + 3}$$

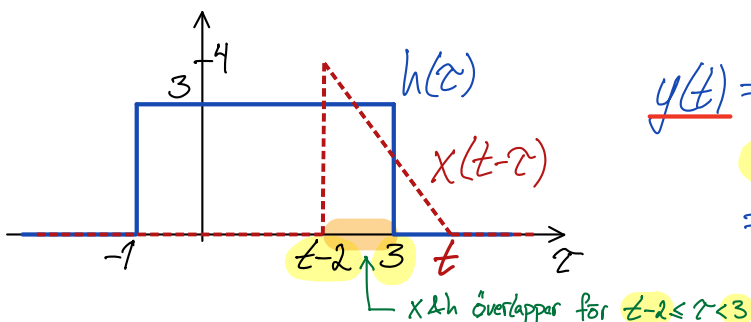
$t < 3$ & $t-2 \geq -1$, dvs. $1 \leq t < 3$:



$$\underline{y(t)} = \int_{t-2}^t 2(t-\tau) \cdot 3 d\tau = 6 \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_{t-2}^t$$

$$= \dots = \underline{12}$$

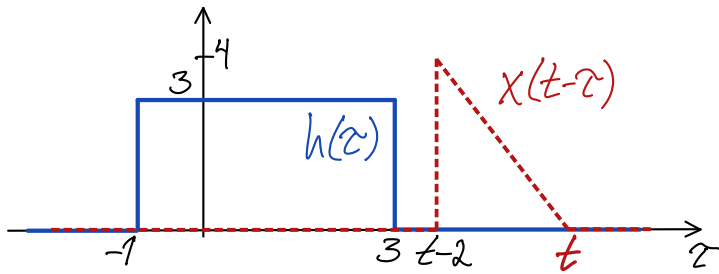
$t \geq 3$ & $t-2 < 3$, dvs. $3 \leq t < 5$:



$$\underline{y(t)} = \int_{t-2}^3 2(t-\tau) \cdot 3 d\tau = 6 \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_{t-2}^3$$

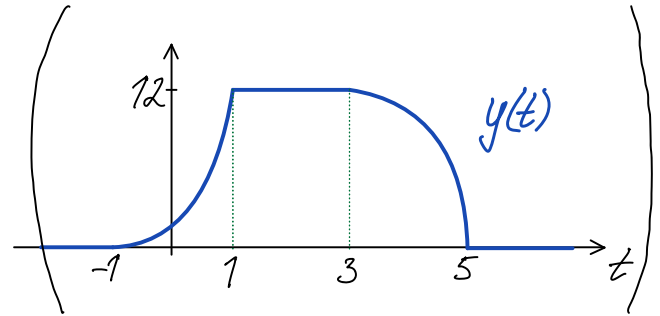
$$= \dots = \underline{-3t^2 + 18t - 15}$$

$t-2 \geq 3$, dvs. $t \geq 5$:



$x(t-\tau)h(\tau) = 0 \quad \forall \tau \Rightarrow \underline{y(t) = 0}$

Dvs. $y(t) = \begin{cases} 0; & t < -1 \\ 3t^2 + 6t + 3; & -1 \leq t < 1 \\ 12; & 1 \leq t < 3 \\ -3t^2 + 18t - 15; & 3 \leq t < 5 \\ 0; & t \geq 5 \end{cases}$



Alt. lösning: $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, där $Y(s) \stackrel{\text{Energifritt LTI-system}}{=} Y_{zs}(s) = X(s)H(s)$

• $x(t) = 2t(u(t) - u(t-2)) = 2t \cdot u(t) - 2(t-2)u(t-2) - 4u(t-2)$

Tab. 5:3, 5:4 & 4:5 $\Rightarrow X(s) = \frac{2}{s^2}(1 - e^{-2s}) - \frac{4}{s}e^{-2s}; \quad \text{Re}\{s\} > -\infty$

• $h(t) = 3(u(t+1) - u(t-3)) \xrightarrow{\text{Tab. 5:3 \& 4:5}} H(s) = \frac{3}{s}(e^s - e^{-3s}); \quad -\infty < \text{Re}\{s\} < \infty$

$\Rightarrow Y(s) = \left(\frac{2}{s^2}(1 - e^{-2s}) - \frac{4}{s}e^{-2s}\right) \cdot \frac{3}{s}(e^s - e^{-3s}) =$

$= \frac{6}{s^3}(e^s - e^{-3s} - e^{-s} + e^{-5s}) - \frac{12}{s^2}(e^{-s} - e^{-5s})$ Konvergenansområden:

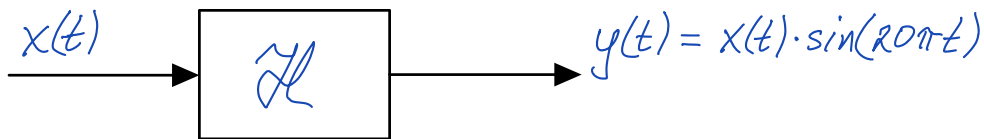
- $0 < \text{Re}\{s\} < \infty$ för $\frac{6e^s}{s^3}$.
- $\text{Re}\{s\} > 0$ för övriga termer.

Tab. 5:4, 5:5 & 4:5 \Rightarrow

$y(t) = 3((t+1)^2 u(t+1) - (t-3)^2 u(t-3) - (t-1)^2 u(t-1) + (t-5)^2 u(t-5))$
 $- 12((t-1)u(t-1) - (t-5)u(t-5))$

$= 3((t+1)^2 u(t+1) - ((t-1)^2 + 4(t-1))u(t-1) - (t-3)^2 u(t-3)$
 $+ ((t-5)^2 + 4(t-5))u(t-5))$

3



a) Insignal $x_n(t) \rightarrow y_n(t) = x_n(t) \cdot \sin(20\pi t)$

Låt $x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(t) = (a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)) \cdot \sin(20\pi t)$

$= a \cdot x_1(t) \sin(20\pi t) + b \cdot x_2(t) \sin(20\pi t) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$

\Rightarrow Systemet är linjärt

b) Låt $\hat{x}(t) = x(t - T)$

$\Rightarrow \hat{y}(t) = \hat{x}(t) \cdot \sin(20\pi t) = x(t - T) \sin(20\pi t)$

Men $y(t - T) = x(t - T) \sin(20\pi(t - T)) = x(t - T) \sin(20\pi t - 20\pi T)$

$\Rightarrow \hat{y}(t) \neq y(t - T)$ för alla $T \Rightarrow$ Systemet är tidsvariant

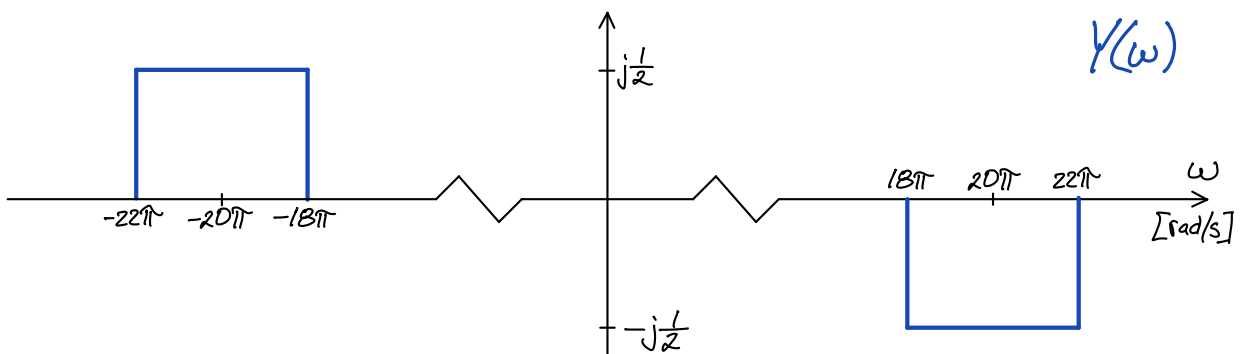
($\hat{y}(t) = y(t - T)$ gäller bara för $10T \in \mathbb{Z}$, dvs. då $20\pi T$ är en multipel av 2π)

c) $Y(\omega) = \mathcal{F}\{x(t) \sin(20\pi t)\} \stackrel{\text{Tab. 2:14}}{=} \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \mathcal{F}\{\sin(20\pi t)\}$, där

$\left\{ \begin{aligned} X(\omega) &= \mathcal{F}\left\{2 \cdot \frac{\sin(2t \cdot \pi)}{2t \cdot \pi}\right\} = \mathcal{F}\{2 \cdot \text{sinc}_\pi(2t)\} \stackrel{\text{Tab. 3:13}}{=} \begin{cases} 1; & |\omega| \leq 2\pi \\ 0; & |\omega| > 2\pi \end{cases} \\ \mathcal{F}\{\sin(20\pi t)\} &\stackrel{\text{Tab. 3:23}}{=} j\pi(\delta(\omega + 20\pi) - \delta(\omega - 20\pi)) \end{aligned} \right.$

$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{j\pi}{2\pi} (X(\omega) * \delta(\omega + 20\pi) - X(\omega) * \delta(\omega - 20\pi))$

$= \frac{j}{2} (X(\omega + 20\pi) - X(\omega - 20\pi))$



d) Givet: $E_B = 0,99 \cdot E_x$,

där $E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \int |X(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{t^2 + (\frac{1}{3})^2}\right\}|^2 = 2\pi e^{-\frac{1}{3}|\omega|}$ / Tab. 3:16

$$= 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} 4\pi^2 e^{-\frac{2}{3}\omega} d\omega = 6\pi \left[-e^{-\frac{2}{3}\omega}\right]_0^{\infty} = \underline{6\pi}$$

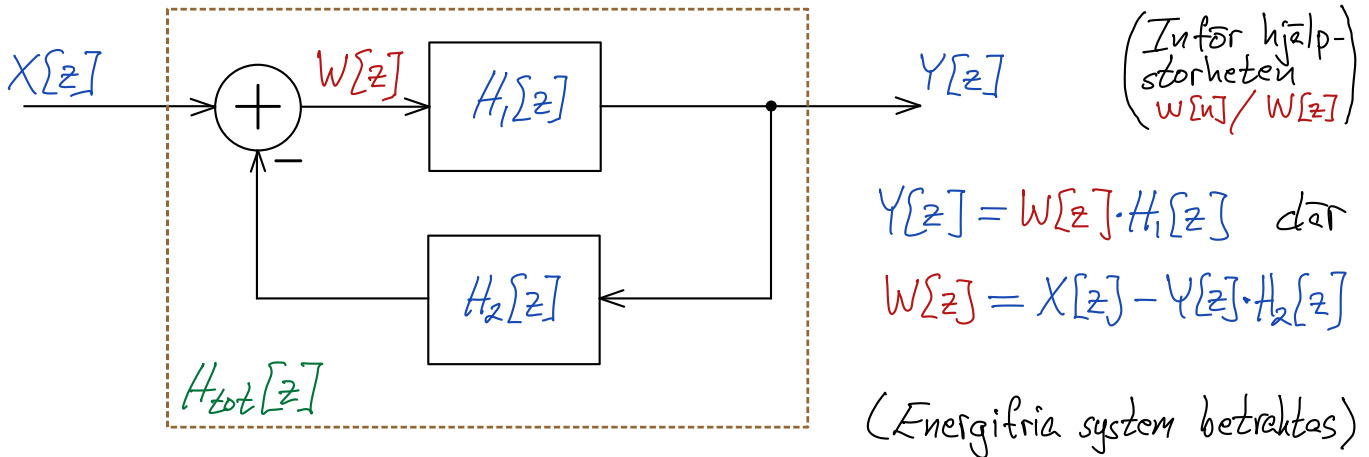
och $E_b = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi B}^{2\pi B} |X(\omega)|^2 d\omega = 6\pi \left[-e^{-\frac{2}{3}\omega}\right]_0^{2\pi B} = \underline{6\pi \left(1 - e^{-\frac{4\pi B}{3}}\right)}$

$$E_b = 0,99 E_x \Rightarrow 6\pi \left(1 - e^{-\frac{4\pi B}{3}}\right) = 0,99 \cdot 6\pi$$

$$\Rightarrow \underline{B = -\frac{3}{4\pi} \cdot \ln 0,01 \approx 1,1 \text{ Hz}}$$

4

a)



$$\Rightarrow Y[z] (1 + H_1[z] H_2[z]) = X[z] H_1[z]$$

$$\Rightarrow \underline{H_{tot}[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{H_1[z]}{1 + H_1[z] H_2[z]}}$$

Från pol-nollställediagrammen erhålls

$$\begin{cases} H_1[z] = \frac{z}{z-2}; \text{ Instabilt enligt uppgift} \Rightarrow |z| > 2 \text{ (} \Rightarrow \text{Kausalt system)} \\ H_2[z] = \frac{z-A}{z}; \text{ } |z| > 0 \text{ är enda möjliga konv. område (} \Rightarrow \text{Kausalt \& stabilt system)} \end{cases}$$

Enhetscirkeln ligger inte i konvergensområdet.

$$\Rightarrow \underline{H_{tot}[z] = \frac{z/(z-2)}{1 + \frac{z}{z-2} \cdot \frac{z-A}{z}} = \frac{z}{2(z - \frac{A+2}{2})}} \text{ (Enkelpol i } z = \frac{A+2}{2}\text{)}$$

Kausala delsystem \Rightarrow totala systemet är kausalt $\Rightarrow |z| > \left|\frac{A+2}{2}\right|$

forts. 4a):

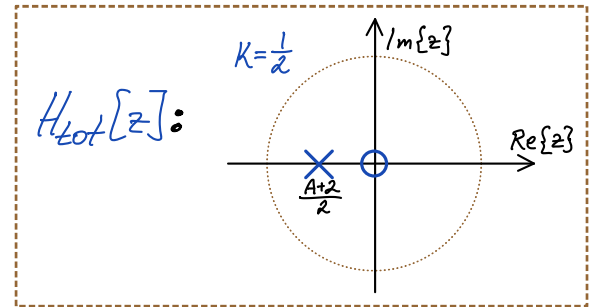
Stabilt totalt system \Rightarrow enhetscirkeln ligger i konv. området för $H_{tot}[z]$

$$\Rightarrow \left| \frac{A+2}{2} \right| < 1 \quad (\text{dvs. polen i } z = \frac{A+2}{2} \text{ ligger innanför enhetscirkeln})$$

$$\Rightarrow -1 < \frac{A+2}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \underline{-4 < A < 0}$$

(Anm: Systemet är marginellt stabilt för $A = -4, 0$)



b) Givet: $x[n] = 5 \cos(\pi n) \rightarrow y[n] = \frac{1}{3} \cdot 5 \cos(\pi n + \varphi)$

Detta förutsätter stabilt (LTI-)system

$$\Rightarrow y[n] = 5 |H_{tot}[\Omega = \pi]| \cos(\pi n + \arg H_{tot}[\Omega = \pi])$$

$$\text{där } H_{tot}[\Omega = \pi] \stackrel{z=e^{j\Omega}}{=} H_{tot}[z=-1] \stackrel{a)}{=} \frac{-1}{2(-1 - \frac{A+2}{2})} = \frac{1}{A+4}$$

$$\Rightarrow |H_{tot}[\Omega = \pi]| = \left| \frac{1}{A+4} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \underline{A = -1} \\ A = -7, \text{ vilket inte} \\ \text{är en giltig lösning:} \\ -4 < A < 0 \text{ enligt a)} \\ \text{för stabilt system.} \end{cases}$$

Svar: $A = -1$

5

- Här ritas $|H_n[\Omega]|$ i stället för uppgiftens $|H_n[\Theta]|$ ($\Omega = 2\pi\Theta$), vilket ger tydligare koppling till pol-nollställediagrammen, eftersom $H_n[\Omega]$ är lika med $H_n[z]$ längs den övre delen av enhetscirkeln, i vinkelintervallet $0 \leq \Omega \leq \pi$.

a)

- Följande gäller allmänt för alla tre system — $n=1,2,3$:

- $H_n[\Omega]$ existerar \Leftrightarrow systemet är stabilt.

$\Rightarrow H_n[\Omega]$ existerar om systemet är stabilt. \Rightarrow Enligt uppgift är systemen även kausala.

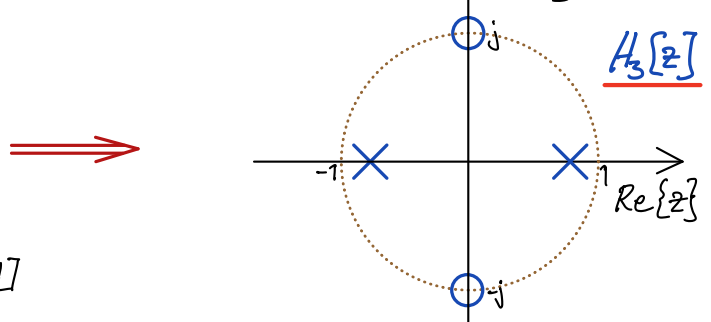
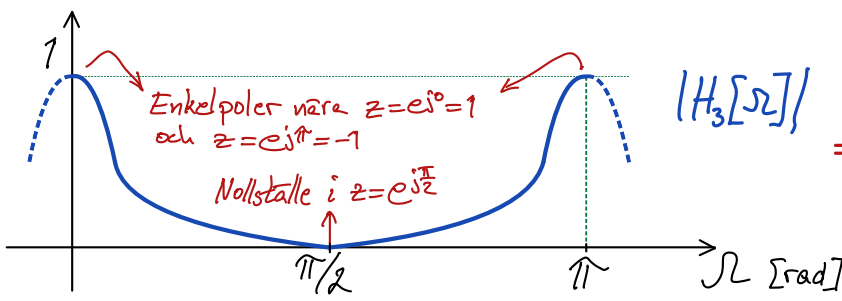
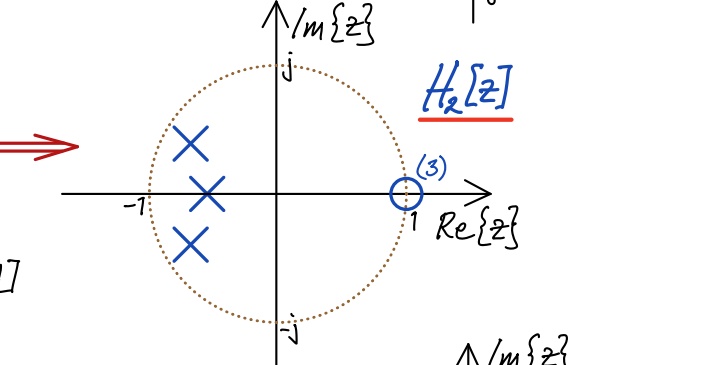
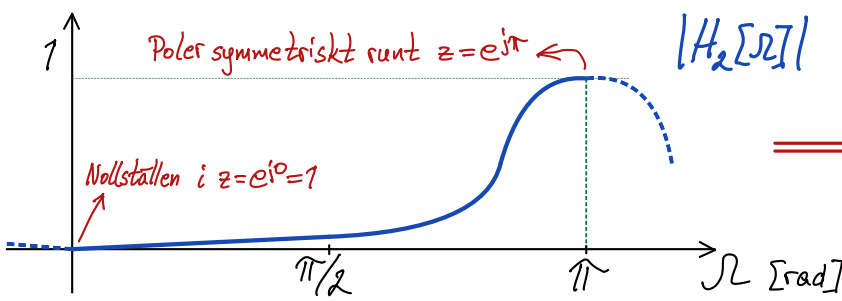
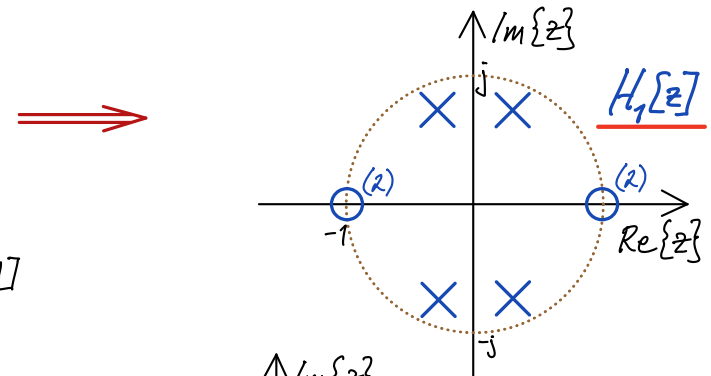
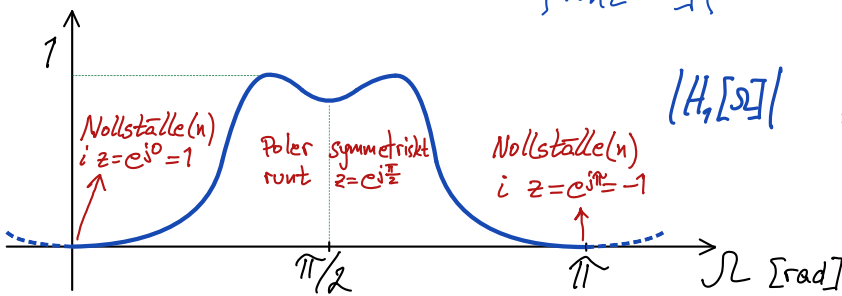
- Alla poler hos $H_n[z]$ ligger innanför enhetscirkeln, (kausalitetskrav)
- Antalet poler \geq antalet nollställen (vanligen är de lika många).

- Alla poler & nollställen är reellvärda och/eller komplexkonjugerade par.

- Om $H_n[z]$ har en pol nära enhetscirkeln, i $z = R \cdot e^{j\Omega_0}$ där $R < 1$, så har $|H_n[\Omega]|$ ett lokalt max vid $\Omega \approx \Omega_0$.

- Om $H_n[z]$ har minst ett nollställe i $z = e^{j\Omega_0}$, så är $|H_n[\Omega_0]| = 0$.

Notera:
Enligt uppgift krävs ingen motivering av polernas och nollställes placeringar, men här visas ändå de mest centrala sambanden.



b) Formelsamlingen, sid. 8 \Rightarrow

$$\underline{E_{xn}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X[\Omega]|^2 d\Omega = \left/ \begin{array}{l} \text{Formels. sid. 9: } X[\Omega] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\Omega - n \cdot 2\pi}{T}\right) \\ \Omega = \omega T \Rightarrow \omega = \frac{\Omega}{T}, \omega_s = \frac{2\pi}{T}, d\Omega = T \cdot d\omega \end{array} \right/$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \frac{1}{T^2} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n \cdot \omega_s) \right|^2 \cdot T d\omega = \left/ \begin{array}{l} \text{Samplingsteoremet är} \\ \text{uppfyllt} \Rightarrow \text{Ingen viking} \\ \Rightarrow \text{Endast termen för } n=0 \\ \text{finns i intervallet} \\ \left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right] = \left[-\frac{\omega_s}{2}, \frac{\omega_s}{2}\right] \end{array} \right/$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} |X(\omega)|^2 d\omega \stackrel{\text{Formels. sid. 5 med } X(\omega)=0 \text{ för } |\omega| > \frac{\omega_s}{2}}{\downarrow} = \frac{1}{T} \cdot \underline{E_{xt}}$$

$$\Rightarrow \underline{E_{xt} = T \cdot E_{xn}}$$

6

a) Antag energifritt system $\Rightarrow y_{zi}[n] = 0$

$$\Rightarrow \underline{y_1[n]} = y_{zs}[n] = (x_1 * h)[n], \text{ där } h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H[z]\}$$

Pol-nollställediagrammet \Rightarrow

$$H[z] = \frac{z^2 + 1}{z(z-1)} = \frac{z}{z-1} + z^{-1} \frac{1}{z-1} \quad \left(\text{Konv. oms. } |z| < 1 \text{ för bägge termerna} \right) \\ \left. \begin{array}{l} \text{Tab. 10:12} \downarrow \quad \text{Tab. 9:5 \& 10:14} \downarrow \end{array} \right\} \text{ty icke-kausalt system enl. uppgift.}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{h[n]} = -u_0[-n] - u_0[-(n-1)+1] = -u_0[-n] - u_0[-n+2] \\ \underline{x_1[n]} = (-1)^n (u[n-1] - u[n-3]) = -\delta[n-1] + \delta[n-2] \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{y_1[n]} &= (x_1 * h)[n] = (-\delta[n-1] + \delta[n-2]) * h[n] = -h[n-1] + h[n-2] \\ &= u_0[-(n-1)] + u_0[-(n-1)+2] + \left(-u_0[-(n-2)] - u_0[-(n-2)+2] \right) \\ &\quad \begin{array}{cccc} = -n+1 & = -n+3 & = -n+2 & = -n+4 \end{array} \\ &= \underbrace{u_0[-n+1] - u_0[-n+2]}_{=-\delta[n-1]} + \underbrace{u_0[-n+3] - u_0[-n+4]}_{=-\delta[n-3]} = \underline{-\delta[n-1] - \delta[n-3]} \end{aligned}$$

(Alternativ lösning på nästa sida)

Alternativ lösning - i z-transformdomänen: $y_1[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_1[z]\}$

där $Y_1[z] = X_1[z] \cdot H[z]$, där $H[z] = \frac{z^2+1}{z(z-1)}$; $0 < |z| < 1$ (icke-kausalt system)

Från lösningen ovan: $X_1[n] = -\delta[n-1] + \delta[n-2]$

Formels. Tab. 10:2 $\Rightarrow X_1[z] = -z^{-1} + z^{-2} = \frac{-z+1}{z^2}$; $|z| > 0$

$$\Rightarrow Y_1[z] = \frac{-(z-1)}{z^2} \cdot \frac{z^2+1}{z(z-1)} = -\frac{z^2+1}{z^3} = -z^{-1} - z^{-3}; |z| > 0$$

Tab 10:2 $\Rightarrow y_1[n] = -\delta[n-1] - \delta[n-3]$

b) $x_2[n] = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$

För det marginellt stabila (LTI-)systemet (enkelpol hos $H[z]$ på enhetscirkeln [$z=1$], som också utgör en rand till konvergensområdet för $H[z]$)

erhålls då utsignalen $y_2[n] = y_{\cos}[n] + y_{\text{övrigt}}[n]$,

där $y_{\cos}[n] = 3 |H[\frac{\pi}{4}]| \cos\left(\frac{\pi}{4}n + \arg H[\frac{\pi}{4}]\right)$ sökes.

För $z \neq 1$ (där polen i $H[z]$ finns) gäller därför följande:

$$\begin{aligned} H[z=\frac{\pi}{4}] &= H[z] \Big|_{z=e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{j2\frac{\pi}{4}} + 1}{e^{j\frac{\pi}{4}}(e^{j\frac{\pi}{4}} - 1)} = \frac{2j}{2j} \cdot \frac{1+j}{e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\frac{\pi}{8}} (e^{j\frac{\pi}{8}} - e^{-j\frac{\pi}{8}})} \\ &= \frac{\cancel{2j} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}{\cancel{2j} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j\frac{\pi}{8}} \cdot \sin(\frac{\pi}{8})} \stackrel{j=e^{j\frac{\pi}{2}}}{=} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{8})} \cdot e^{-j\frac{5\pi}{8}} \leftarrow -(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |H[\frac{\pi}{4}]| = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{8})} \approx 1,85, \quad \arg H[\frac{\pi}{4}] = -\frac{5\pi}{8} \text{ rad}$$

$$\Rightarrow y_{\cos}[n] \approx 5,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{5\pi}{8}\right)$$

\swarrow
3 · 1,85