Lösningar till Kontrollskrivning 2020-10-29

Fråga	$x(t) \Leftrightarrow C_n, D_n$			$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$			$x(t) \Leftrightarrow X(s)$			$x[n] \Leftrightarrow X[z]$			$x[n] \Leftrightarrow X[\Omega]$		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Svar	**c)**	**b)**	**a)**	**a)**	**b)**	**d)**	**c)**	**d)**	**d)**	**b)**	**a)**	**b)**	**d)**	**b)**	**a)**

1. Alternativ a) och b) är helt orimliga — indexet måste vara ett heltal, och kan inte bero av skalfaktorn (som ju inte behöver vara ett heltal). Vad skulle t ex hända med signalen $x(\sqrt{3}t)$?

   Med tanke på att D_0 är medelvärdet av signalen $x(t)$ över en period måste alternativ d) vara fel, eftersom medelvärdet $\tilde{D}_0$ måste vara samma för $\tilde{x}(t)$.

   Rätt svar måste alltså vara c).

   Ett annat sätt att komma fram till detta är att helt enkelt sätta in $\frac{t}{3}$ istället för t i den komplexa fourierserien till $x(t)$. Detta ger

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \implies x\left(\frac{t}{3}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t/3},$$

   där vi ser att det fortfarande är samma fourierseriekoefficienter, men att grundvinkelfrekvensen ändras. Slutsatsen blir återigen att c) är korrekt, dvs $\tilde{D}_n = D_n$.

   Svar: c)

2. Det enda vi kan säga direkt här är att påstående a) *inte* kan vara det felaktiga, eftersom det påståendet måste vara sant om påstående d) är sant.

   Här behöver vi faktiskt kontrollera att signalen är periodisk, och därefter beräkna dess grundvinkelfrekvens ω_0, eftersom den informationen behövs för att avgöra huruvida b), c), eller d) är felaktigt. Med $\omega_1 = \frac{2\pi}{3}$ rad/s, $\omega_2 = 2\pi$ rad/s, och $\omega_3 = \frac{4\pi}{5}$ rad/s får vi

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \qquad \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\frac{4\pi}{5}} = \frac{5}{6} \in \mathbb{Q}, \qquad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{5}} = \frac{5}{2} \in \mathbb{Q}.$$

   Eftersom alla kvoter av de ingående vinkelfrekvenserna är rationella tal är signalen periodisk med en grundvinkelfrekvens som ges av $\mathrm{sgd}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Lättaste sättet att bestämma ω_0 i det här fallet är att faktorisera vinkelfrekvenserna:

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{2\pi}{3}\,\mathrm{rad/s} = 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{rad/s} = 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot 5\cdot\frac{1}{5}\,\mathrm{rad/s} \\ \omega_2 = 2\pi\,\mathrm{rad/s} = 2\cdot\pi\cdot 3\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{rad/s} = 2\cdot\pi\cdot 3\cdot\frac{1}{3}\cdot 5\cdot\frac{1}{5}\,\mathrm{rad/s} \\ \omega_3 = \frac{4\pi}{5}\,\mathrm{rad/s} = 2\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{5}\cdot 3\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{rad/s} = 2\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{1}{5}\cdot 3\cdot\frac{1}{3}\,\mathrm{rad/s}. \end{cases}$$

   Genom att identifiera de gemensamma faktorerna (markerade i cinnoberrött) ser vi att grundvinkelfrekvensen är $\omega_0 = \frac{2\pi}{15}$ rad/s. Detta strider mot påstående b), som alltså är felaktigt.

   Svar: b)

3. Om grundperiodtiden är T_0 s blir grundvinkelfrekvensen $\omega_0 = \pi$ rad/s.

   Eftersom $D_0 = \frac{1}{2}$ är signalens medelvärde över en period kan vi direkt utesluta alternativen c) och d), eftersom deras medelvärden är noll. Udda n kan skrivas som $n = 2k-1$ för heltal k, så

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\pi t} = \frac{1}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{2k-1} e^{j(2k-1)\pi t} = \frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k-1)^2} e^{j(2k-1)\pi t}.$$

Sätter vi in $t = 0$ ser vi att $x(0) = \frac{1}{2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k-1)^2}$, vilket *inte* kan bli 1 (alla termerna inne i summan är positiva, och vi har ett minustecken framför). Alternativ b) kan därför inte stämma, utan det korrekta alternativet är a).

Svar: a)

Spännande observation: Genom att ta fram de komplexa fourierseriekoefficienterna till funktionen i a), och bekräfta att de blir som angavs i uppgiften, ser vi att

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi^2(2k-1)^2} = \frac{1}{2} \iff \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4} \iff \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Detta är nära besläktat med det så kallade *Baselproblemet*, att beräkna värdet $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Baselproblemet formulerades 1644, och löstes 90 år senare av Leonhard Euler. Det är enkelt att kontrollera att serien i problemet är konvergent (med integraljämförelse, eller jämförelse med serien med termer $\frac{1}{n(n-1)}$), dvs att talet S är väldefinierat och begränsat. Vidare visar beräkningen

$$\sum_{\substack{n\geq 1\\ n \text{ jämnt}}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = [n = 2k] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{S}{4}$$

att endast en fjärdedel av seriens summa kommer från de termer med jämna index. Tre fjärdedelar kommer alltså från de udda indexen, och som vi såg summerar dessa termer till $\frac{\pi^2}{8}$. Vi kan därför lösa ut S, och få $S = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$.

4. Eftersom $\mathscr{F}\{\delta(t)\} = 1$ är samma för alla ω innehåller $\delta(t)$ precis lika mycket av alla frekvenser, och alltså är alternativ a) korrekt.

   Det går förstås lika bra att utesluta de andra alternativen. I alternativ b) stämmer det förvisso att både $\cos(\omega_0 t)$ och $\sin(\omega_0 t)$ har allt sitt frekvensinnehåll koncentrerat till $\omega = \pm\omega_0$, men fouriertransformerna är trots detta olika:

   $$\begin{aligned} \mathscr{F}\{\cos(\omega_0 t)\} &= \ \ \pi\delta(\omega+\omega_0) + \ \ \pi\delta(\omega-\omega_0), \\ \mathscr{F}\{\sin(\omega_0 t)\} &= j\pi\delta(\omega+\omega_0) - j\pi\delta(\omega-\omega_0). \end{aligned}$$

   Alternativ c) är falskt, eftersom $\mathrm{rect}(t)$ har ändlig utbredning i tiden medan $\mathscr{F}\{\mathrm{rect}(t)\} = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ inte har ändlig utbredning i frekvensdomänen. Det finns med ett minustecken i dualitetsegenskapen, vilken innebär att $X(\omega) = \mathscr{F}\{x(t)\} \iff \mathscr{F}\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega)$, så alternativ d) är felaktigt.

   Svar: a)

5. Vi skriver ut integralen som definierar den aktuella fouriertransformen, vilken blir

   $$\tilde{X}(\omega) = \mathscr{F}\{\tilde{x}(t)\} = \mathscr{F}\{x^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}\,dt.$$

   För att relatera denna till fouriertransformen av $x(t)$ behöver vi få bort konjugatet från signalen under integraltecknet. Detta kan vi göra genom att konjugera hela uttrycket *under* integraltecknet och samtidigt konjugera *hela* integralen (konjugeringarna tar ut varandra), vilket ger

   $$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}\,dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(x^*(t)e^{-j\omega t}\,dt\right)^*\right)^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t}\,dt\right)^* = X^*(-\omega).$$

   Slutsatsen blir att alternativ b) är korrekt.

   Svar: b)

6. Vi kan omedelbart utesluta alternativ a), eftersom signalens belopp $\left|\frac{e^{2t}}{1+e^{t}}\right| \to \infty$ då $t \to \infty$. Även signalen i b) kan uteslutas, då den har fouriertransformen $\mathscr{F}\left\{e^{-2t}u(t)\right\} = \frac{1}{2+j\omega}$.

   För signalen i c) blir

   $$\begin{aligned}\mathscr{F}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \delta(t-n)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \delta(t-n) e^{-j\omega t}\, dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-n) e^{-j\omega t}\, dt}_{=e^{-j\omega n}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2e^{-j\omega}\right)^n,\end{aligned}$$

   och denna geometriska serie divergerar eftersom $\left|2e^{-j\omega}\right| = 2 \not< 1$.

   För signalen i d) blir däremot

   $$\begin{aligned}\mathscr{F}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \delta(t-n)\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \delta(t-n) e^{-j\omega t}\, dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-n) e^{-j\omega t}\, dt}_{=e^{-j\omega n}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2e^{j\omega}}\right)^n = \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2e^{j\omega}}} = \frac{2e^{j\omega}}{2e^{j\omega}-1},\end{aligned}$$

   vilket stämmer med den sökta fouriertransformen. I det här fallet konvergerar den geometriska serien, eftersom $\left|\frac{1}{2e^{j\omega}}\right| = \frac{1}{2} < 1$.

   Svar: d)

7. Alternativ a) skulle ha varit korrekt om det hade stått ”imaginära axeln” istället ”enhetscirkeln”, men det som står stämmer alltså inte.

   Påstående b) skulle göra laplacetransformen oanvändbar för dubbelsidiga signaler, vilket förstås är helt fel.

   Påstående c) är korrekt, och uttrycker *speglingsegenskapen* (tidsskalning med skalfaktorn -1).

   Påstående d) är fel; exempelvis är signalen $x(t) = e^t u(t)$ laplacetransformerbar, men inte absolutintegrerbar.

   Svar: c)

8. Enkelsidiga laplacetransformen av en derivata fås som

   $$\mathscr{L}\{x'(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x'(t)\, e^{-st}\, dt = [x(t)\, e^{-st}]_{0^-}^{\infty} + \int_{0^-}^{\infty} x(t)\, s e^{-st}\, dt = sX(s) - x(0^-).$$

   Låter vi nu $y(t) = x'(t)$ ser vi att

   $$\begin{aligned}\mathscr{L}\{x''(t)\} = \mathscr{L}\{y'(t)\} = s\mathscr{L}\{y(t)\} - y(0^-) = s\mathscr{L}\{x'(t)\} - x'(0^-) = \\ = s\big(sX(s) - x(0^-)\big) - x'(0^-) = s^2X(s) - sx(0^-) - x'(0^-),\end{aligned}$$

   vilket visar att alternativ d) är korrekt.

   Svar: d)

9. Eftersom signalen varken är högersidig eller vänstersidig kan vi utesluta alternativ b) och c) på grund av deras konvergensområden.

   För att välja mellan alternativ a) och d) transformerar vi signalen, och får

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{x(t)\} &= \mathscr{L}\{3e^{-2t}u(t)\} + \mathscr{L}\{2e^{-t}u_0(-t)\} + \mathscr{L}\{u_0(-t)\} = \\ &= \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s} = \frac{3s(s+1) - 2s(s+2) - (s+1)(s+2)}{s(s+1)(s+2)} = \\ &= \frac{3s^2+3s-2s^2-4s-s^2-3s-2}{s^3+3s^2+2s} = \frac{-4s-2}{s^3+3s^2+2s},\end{aligned}$$

   vilket är alternativ d).

   Svar: d)

10. Sambandet i b) är felaktigt, och de övriga är korrekta. Påstående b) kan enkelt vederläggas genom motexemplet $\mathscr{Z}\{u[n]\} = \dfrac{z}{z-1}$, där $|z| > 1$.

    Svar: b)

11. Alla svarsalternativen är på formen $Az\dfrac{dX[z]}{dz}$, för olika komplexa konstanter A. Vi skriver om detta uttryck för att ta reda på vilken signal det hör ihop med. Utifrån definitionen av z-transformen får vi

$$\begin{aligned}Az\frac{dX[z]}{dz} &= Az\frac{d}{dz}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,z^{-n}\right\} = Az\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{d}{dz}\{x[n]\,z^{-n}\} = \\ &= Az\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,(-n)z^{-n-1} = Az\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,(-n)z^{-n-1} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -Anx[n]\,z^{-n} = \mathscr{Z}\{-Anx[n]\}.\end{aligned}$$

    Ur detta ser vi att $A = -1$ ger transformparet i a), som alltså är korrekt.

    Svar: a)

12. Faktorisering av nämnaren ger singulära punkter (poler) i $z = -5$ och $z = \frac{1}{2}$, vilket betyder att inversa z-transformen kommer att innehålla $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ och $(-5)^n$. Detta begränsar oss till alternativ b) eller alternativ c).

    Termerna som innehåller $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ och $(-5)^n$ måste göras höger- eller vänstersidiga med hjälp av $u[n]$ och $u_0[-n]$ — vilken det skall vara ser vi av konvergensområdesgränserna. På grund av konvergensområdesgränsen $|z| < |-5|$ skall $(-5)^n$ kombineras med $u_0[-n]$, och på grund av konvergensområdesgränsen $\frac{1}{2} < |z|$ skall 1 kombineras med $u[n]$. Enda kvarstående alternativet som passar in på detta är b).

    Svar: b)

13. Bytet från den komplexa variabeln z till den normerade vinkelfrekvensen Ω ges av $z = e^{j\Omega}$, och dessa z-värden, dvs enhetscirkeln, måste ligga i konvergensområdet. Detta gör att alternativ d) är korrekt.

    Svar: d)

14. Det är uppenbart att alternativ b) och alternativ d) i allmänhet är oförenliga, eftersom det inte är säkert att $x^*[n] = x[-n]$, så ett av dem måste vara fel.

Alternativ d) går lätt att kontrollera, då

$$X[\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \iff X[-\Omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{-j(-\Omega)(-n)} = \mathscr{F}\{x[-n]\},$$

så alltså är alternativ b) felaktigt.

Svar: b)

15. Vi kan omedelbart utesluta alternativ c) eftersom uttrycket där inte är periodiskt (eftersom det inte finns något j i exponenten på första termen). På samma sätt kan vi utesluta alternativ d), som visserligen är periodisk, men med minsta period 6π istället för 2π.

I alternativ b) kan vi bryta ut $e^{j\Omega}$, och på vis förenkla uttrycket enligt

$$\frac{3e^{2j\Omega} - e^{j\Omega}}{3e^{j\Omega} - 1} = e^{j\Omega} \cdot \frac{3e^{j\Omega} - 1}{3e^{j\Omega} - 1} = e^{j\Omega}.$$

Detta är transformen av enbart termen $\delta[n+1]$, så alternativ b) stämmer inte. Kvar blir alternativ a).

Det går förstås även att komma fram till alternativ a) genom att helt enkelt transformera signalen. Vi får då

$$\begin{aligned}
X[\Omega] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\delta[n+1] + \Big(-\frac{1}{3}\Big)^n u[n]\Big) e^{-j\Omega n} = \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n+1]e^{-j\Omega n} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(-\frac{1}{3}\Big)^n u[n]\, e^{-j\Omega n} = \\
&= e^{j\Omega} + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{1}{3}\Big)^n e^{-j\Omega n} = e^{j\Omega} + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(-\frac{1}{3e^{j\Omega}}\Big)^n = \\
&= e^{j\Omega} + \frac{1}{1 - \big(-\frac{1}{3e^{j\Omega}}\big)} = e^{j\Omega} + \frac{3e^{j\Omega}}{3e^{j\Omega}+1} = \frac{3e^{2j\Omega} + 4e^{j\Omega}}{3e^{j\Omega}+1}.
\end{aligned}$$

Svar: a)