Föreläsning 2+3: Fouriertransformen

I kursen skall vi ägna oss åt olika typer av transformer, som kan användas för att analysera signaler och system. De används även för att konstruera / designa system, eller för att utföra beräkningar!

Bas: $\{e^{j\omega t}\}$

Tidsdomän (alt. rumsdomän) | **Frekvensdomän (alt. transformdomän)**

Transform ("basbyte") →

Signaler / funktioner
- Tidsdiskreta vs tidskontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .

Transformer / spektrum (också funktioner!)
- Diskreta vs kontinuerliga

← Invers transform

Några egenskaper

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

1) Tidsförskjutning

$$\tilde{x}(t) = x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega(t-t_0)}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-j\omega t_0}\cdot X(\omega)}_{\tilde{X}(\omega)} e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow \quad x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(\omega)$$

2) Tidsskalning med a>0

$$\tilde{X}(t) = X(at) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega at}d\omega = \Big/ \begin{matrix}\tilde{\omega} = \omega a \\ d\tilde{\omega} = a\,d\omega\end{matrix} \Big/ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\tilde{\omega}}{a}\right)e^{j\tilde{\omega}t}\frac{d\tilde{\omega}}{a} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{a}X\left(\frac{\tilde{\omega}}{a}\right)}_{\tilde{X}(\tilde{\omega})} e^{j\tilde{\omega}t}d\tilde{\omega}$$

Byt namn till ω

$$X(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(Mer allmänt: $X(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$ då $a \neq 0$)

(Fortsättning)

Fortsättning 2020-09-11

Några egenskaper

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

3) Frekvensförskjutning

Visa själva som (lätt) övning!

$X(\omega-\omega_0) \longleftrightarrow \ldots ?$

4) Derivering $x^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n X(\omega)$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow \underbrace{x'(t)}_{\tilde{x}(t)}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overbrace{X(\omega)\cdot(j\omega)}^{\tilde{X}(\omega)}e^{j\omega t}d\omega$$

5) Dualitet ("symmetri") $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$

byt w mot -t och t mot w

$$\Rightarrow X(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\omega)e^{-j(-t)\omega}d\omega=2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow 2\pi x(\omega) \longleftrightarrow X(-t)$$

6) Konjugering

Visa själva som (lätt) övning!

$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-\omega)$

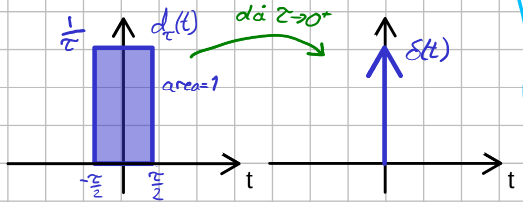
"unit impulse", "Dirac delta", ...

Diracimpulsen $\delta(t)$

"Funktion" med egenskapen

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \end{cases}$$

tolkning



Derivata av enhetssteget:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \Leftrightarrow u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

Mer formell definition (distributionsbegreppet):

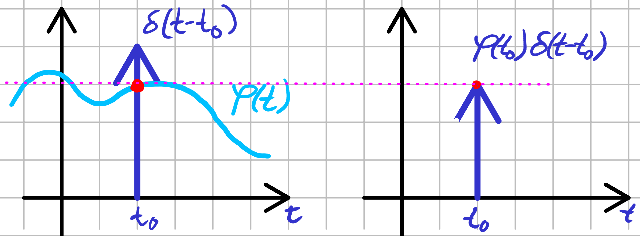
$\delta(t)$ definieras av hur den fungerar tillsammans med andra funktioner under integraltecken:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(t_0)$$

"sampling / sifting property"

Tolkning utanför integraltecken:

$$\varphi(t)\,\delta(t-t_0) = \underbrace{\varphi(t_0)}_{\text{konst!}}\,\delta(t-t_0)$$



Diracimpulsen $\delta(t)$

Fouriertransformen och Diracimpulsen

Vad händer om vi beräknar $\mathcal{F}\{\delta(t)\}$?

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega \cdot 0} = 1 \qquad \therefore \quad \delta(t) \longleftrightarrow 1$$

Dualitetsegenskapen ger: $\qquad 1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

Frekvensförskjutningsegenskapen ger att $\quad \sin/\cos \longleftrightarrow$ lin. komb av $\delta(\omega-\omega_0)$

Funktionerna rekt & sinc

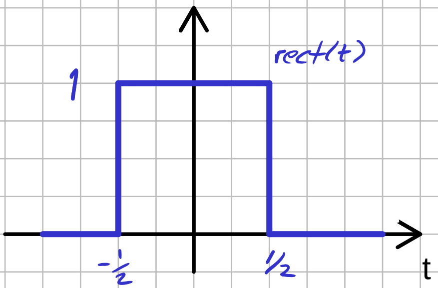
- $\Pi(t) = \mathrm{rect}(t) = u(t+\tfrac{1}{2}) - u(t-\tfrac{1}{2})$ "unit gate function"

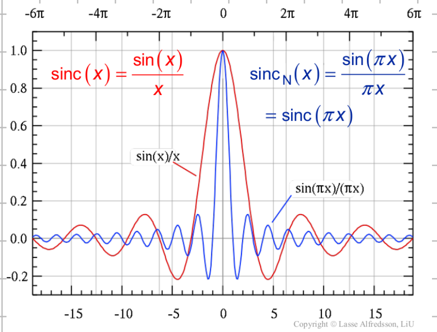
- $\mathrm{sinc}\, t = \dfrac{\sin t}{t}$ $(=0$ då $t = n\pi)$

  $\mathrm{sinc}_N\, t = \mathrm{sinc}(\pi t)$ $(=0$ då $t = n)$

- $\mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right\} = \tau\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

  (visas strax)





(Fortsättning)

Funktionerna rekt & sinc

Vi beräknar

$$\mathcal{F}\{rect(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} rect(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \left[-\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \right]_{-\frac{1}{2}}^{1/2} = -\frac{e^{-j\omega/2}}{j\omega} + \frac{e^{j\omega/2}}{j\omega} = 2\,\frac{\overbrace{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}^{\sin\frac{\omega}{2}}}{2j\omega} = \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} = sinc\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad rect(t) \longleftrightarrow sinc\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Exempel

Beräkna $\mathcal{F}\left\{\text{rekt}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right\}$.

Tidsskalning: $x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

+

Transformparet: $\text{rect}(t) \longleftrightarrow \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

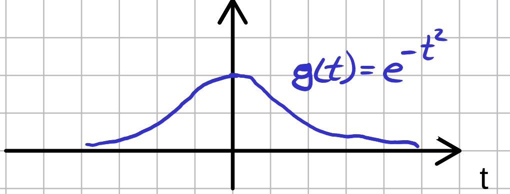
$a = \frac{1}{\tau}$ skalfaktorn

$$\text{rekt}(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} \text{sinc}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \text{rekt}\left(\frac{t}{\tau}\right) \longleftrightarrow \frac{1}{1/\tau} \cdot \text{sinc}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\omega}{1/\tau}\right) \Leftrightarrow$$

$$\text{rekt}\left(\frac{t}{\tau}\right) \longleftrightarrow \tau \, \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Exempel (Gaußkurva)



Definiera: $g(t)=e^{-t^2}$, $G(\omega)=\mathcal{F}\{g(t)\}$.

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt=\sqrt{\pi}\right)$$

Derivera: $g'(t) = -2te^{-t^2} = -2t\,g(t) = -2t\,g(t)$

Tab. 2:10

Tab. 2:11

Fouriertransformera: $j\omega G(\omega) = -2j \frac{dG}{d\omega}$

Lös separabla differentialekvationen:

$$\frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)} = -\frac{\omega}{2} \Rightarrow \int \frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)}\,d\omega = -\int \frac{\omega}{2}\,d\omega$$

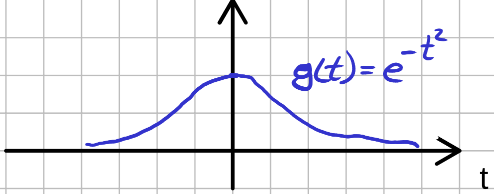
$$\int \frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)}\,d\omega = /\text{kedjeregeln}/ = \int \frac{dG}{G} = \ln G$$

Vi samlar konstanterna från båda integralerna på andra sidan!

$$-\int \frac{\omega}{2}\,d\omega = -\frac{\omega^2}{4} + C$$

(Fortsättning)

Exempel (Gaußkurva)



Lös separabla differentialekvationen:

$$\frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)} = -\frac{\omega}{2} \Rightarrow \int \frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)} d\omega = -\int \frac{\omega}{2} d\omega$$

$$\Leftrightarrow \ln G = -\frac{\omega^2}{4} + C \Leftrightarrow G(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \cdot \underbrace{e^C}_{=C_1}.$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = \sqrt{\pi} \right)$$

Men ger DC-komponenten $G(0)=\sqrt{\pi}$, så $C_1 = \sqrt{\pi}$.

Slutsats: Viktigt transformpar (jfr Tab. 3:18)

$$e^{-t^2} \longleftrightarrow \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$