Föreläsning 2+3: Fouriertransformen

I kursen skall vi ägna oss åt olika typer av transformer,
som kan användas för att analysera signaler och system.
De används även för att konstruera / designa system,
eller för att utföra beräkningar!

Bas: $\{e^{j\omega t}\}$

Tidsdomän (alt. rumsdomän) | Frekvensdomän (alt. transformdomän)

Transform ("basbyte") $\longrightarrow$

Signaler / funktioner
- Tidsdiskreta vs tidskontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .

Transformer / spektrum (också funktioner!)
- (Frekvens)diskreta vs kontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .

$\longleftarrow$ Invers transform

Några egenskaper

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

1) Tidsförskjutning

$$\tilde{x}(t) = x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(\omega)e^{-j\omega t_0}}_{\tilde{X}(\omega)} e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

2) Tidsskalning med a>0

$$\tilde{x}(t) = x(at) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\overbrace{\omega a}^{\tilde{\omega}} t} d\omega = \Big/ \begin{matrix} \tilde{\omega} = \omega a \\ d\tilde{\omega} = a\, d\omega \\ \omega = \frac{\tilde{\omega}}{a} \end{matrix} \Big/ =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X\left(\frac{\tilde{\omega}}{a}\right) e^{j\tilde{\omega}t} \frac{d\tilde{\omega}}{a} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right) e^{j\omega t} d\omega$$

Byt namn från $\tilde{\omega}$ till ω!

$$\Rightarrow x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

i allmänhet: (även a<0) $\frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

(Fortsättning)

Några egenskaper

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$

3) Frekvensförskjutning

Visa själva som övning!

$X(\omega-\omega_0) \longleftrightarrow ?$

4) Derivering

$x^{(n)}(t) \longleftrightarrow (j\omega)^n$

$x^{(n)}(t)$ är n:e derivatan av $x(t)$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \Rightarrow \tilde{x}(t)=x'(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)j\omega e^{j\omega t}d\omega$$

5) Dualitet ("symmetri")

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

byt namn på t till ω
och ω till −t

$$X(-t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)e^{-j(-t)\omega}d\omega = 2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)e^{j\omega t}d\omega = 2\pi\,\mathcal{F}^{-1}\{x(\omega)\}$$

$$\Rightarrow 2\pi x(\omega) \longleftrightarrow X(-t)$$

6) Konjugering

Visa själva som övning!

$x^*(t) \longleftrightarrow X^*(-\omega)$

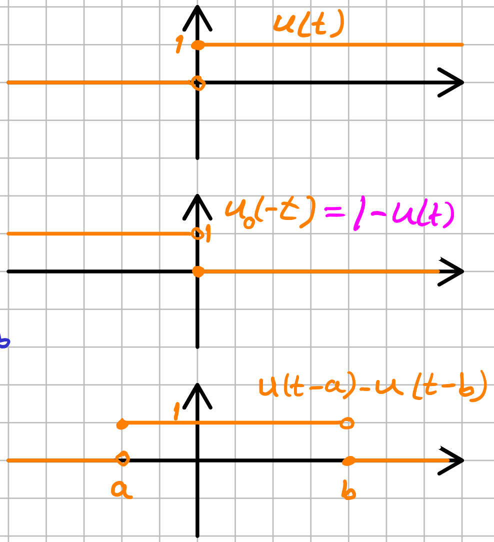
Heaviside-funktion

Enhetssteget u(t)

Definition: $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } t < 0 \\ 1 & \text{för } t \geq 0 \end{cases}$

$u_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } t \leq 0 \\ 1 & \text{för } t > 0 \end{cases}$

$(u(t-a) - u(t-b))\, f(t) = \begin{cases} f(t) & \text{om } a \leq t < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

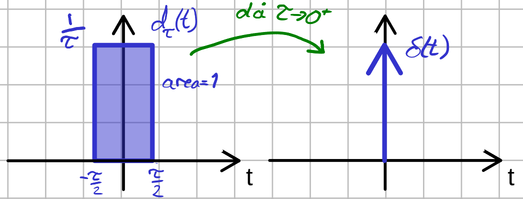


"unit impulse", "Dirac delta", ...

Diracimpulsen $\delta(t)$

"Funktion" med egenskapen

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \end{cases}$$



Derivata av enhetssteget:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \Leftrightarrow u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

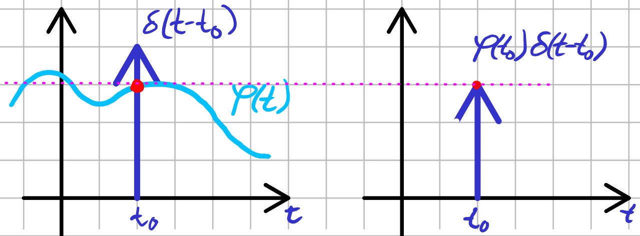
Mer formell definition (distributionsbegreppet):

$\delta(t)$ definieras av hur den fungerar tillsammans med andra funktioner under integraltecken:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(t_0)$$ "sampling / sifting property"

Tolkning utanför integraltecken:

$$\varphi(t)\,\delta(t-t_0) = \varphi(t_0)\,\delta(t-t_0)$$



(forts. av)

Diracimpulsen $\delta(t)$

Fouriertransformen och Diracimpulsen

Vad blir $\mathcal{F}\{\delta(t)\}$? Vi får

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot 1\, dt = 1 \quad \Rightarrow \quad \delta(t) \longleftrightarrow 1$$

finns i t=0

Dualitetsegenskapen ger $\left(X(-t) \longleftrightarrow 2\pi x(\omega) \right)$ $\quad 1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

Exempel: $\cos(at) = \dfrac{e^{jat} + e^{-jat}}{2} = \frac{1}{2} e^{jat} \cdot 1 + \frac{1}{2} e^{-jat} \cdot 1$

$$\cos(at) \longleftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2\pi\, \delta(\omega - a) + \frac{1}{2} \cdot 2\pi\, \delta(\omega + a)$$

(Lite överkurs!)

Tolkning som basbyte mellan ON-baser

$x(t)$ periodisk, dvs fourierserie

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \int_{T_0} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

period som innehåller t

koordinater

basfunktioner

Skalärprodukt: $\langle f(t) | g(t) \rangle = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} f^*(t)\,g(t)\,dt$

$\{e^{jn\omega_0 t}\}$ är ON-bas!

$$\langle e^{jm\omega_0 t} | e^{jn\omega_0 t} \rangle = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^{j(n-m)\omega_0 t}\,dt =$$

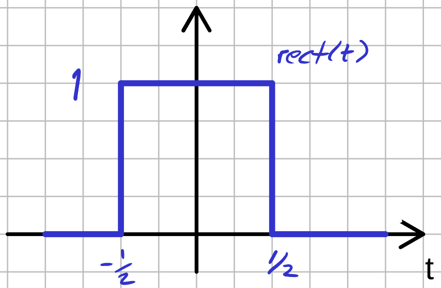
$$= \begin{cases} 1 & \text{om } m=n \\ \left[\frac{e^{j(n-m)\omega_0 t}}{j(n-m)}\right]_0^{T_0} = 0 & \text{om } m \neq n \end{cases}$$

I en ON-bas fås koordinater som skalärprodukter!

$$\langle e^{jn\omega_0 t} | x(t) \rangle = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt = D_n$$

Funktionerna rect & sinc

- $\Pi(t) = \mathrm{rect}(t) = u(t+\tfrac{1}{2}) - u(t-\tfrac{1}{2})$ "unit gate function"

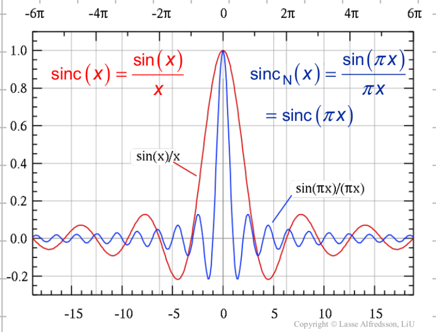


- $\mathrm{sinc}\, t = \dfrac{\sin t}{t}$ $\quad (=0$ då $t = n\pi)$

  $\mathrm{sinc}_N\, t = \mathrm{sinc}(\pi t)$ $\quad (=0$ då $t = n)$

- $\mathcal{F}\left\{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\right\} = \tau\, \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$

  (visas strax)



(Fortsättning)

Funktionerna rect & sinc

Vi beräknar

$$\mathcal{F}\{\text{rect}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{e^{-j\omega/2} - e^{j\omega/2}}{-j\omega} = 2 \cdot \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{2j\omega} = \frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega} = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Eulers formel

Använd tabell 8.2.6 (tidsskalning) med $a = \frac{1}{\tau}$: $\tau > 0$

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \frac{1}{|\frac{1}{\tau}|} \text{sinc}\left(\frac{\omega/2}{\frac{1}{\tau}}\right) \iff \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \tau\, \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Exempel

Bestäm fouriertransformen av

$$x(t) = \underbrace{e^{-3(t+2)}u(t+2)}_{} + \underbrace{te^{2t}u_0(-t)}_{} + \underbrace{\frac{3}{5-3jt}}_{}$$

Hantera en term i taget!

$$\mathcal{F}\{e^{-3(t+2)}u(t+2)\} = /\text{identifiera tidsförskjutning}/ = e^{2j\omega}\mathcal{F}\{e^{-3t}u(t)\} = \frac{e^{2j\omega}}{3+j\omega}$$

$$\mathcal{F}\{te^{2t}u_0(-t)\} = /\text{tabell } 8.2.11/ = j\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{e^{2t}u_0(-t)\} = /\text{tabell } 8.3.6/ =$$

$$= j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{2-j\omega}\right\} = j(-1)\cdot(-j)(2-j\omega)^{-2} = \frac{-1}{(2-j\omega)^2}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{3}{5-3jt}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\frac{5}{3}-jt}\right\} = /\text{dualitetsegenskapen}/ = 2\pi e^{-\frac{5}{3}\omega}u(\omega)$$

$$\Rightarrow \quad X(\omega) = \frac{e^{2j\omega}}{3+j\omega} + \frac{-1}{(2-j\omega)^2} + 2\pi e^{-5\omega/3}u(\omega)$$

Exempel

Beräkna $\mathcal{F}\{e^{-2|t+3|}\}$.

Inför $\tilde{x}(t) = x(t-3) = e^{-2|t|}$, och beräkna först $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$!

Vi får

$$\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{0} e^{2t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-2t} e^{-j\omega t} dt =$$

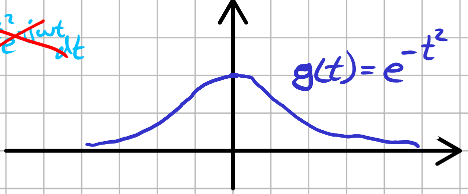
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(2-j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(2+j\omega)t} dt = \left[\frac{e^{(2-j\omega)t}}{2-j\omega}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(2+j\omega)t}}{-(2+j\omega)}\right]_{0}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{2-j\omega} + 0 + 0 - \frac{1}{-(2+j\omega)} = \frac{1}{2-j\omega} + \frac{1}{2+j\omega} = \frac{2+j\omega+2-j\omega}{(2-j\omega)(2+j\omega)} = \frac{4}{4+\omega^2} = \tilde{X}(\omega)$$

Tidsförskjutning ger nu $X(\omega) = e^{3j\omega}\tilde{X}(\omega) = \frac{4e^{3j\omega}}{4+\omega^2}$

Exempel (Gaußkurva)

$\cancel{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-j\omega t}\,dt}$



$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = \sqrt{\pi} \right)$$

Definiera: $g(t) = e^{-t^2}$, $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\}$.

Derivera: $g'(t) = -2te^{-t^2} = -2t\,g(t)$

Tab. 2:10

Tab. 2:11

Fouriertransformera: $j\omega G(\omega) = -2j \frac{dG}{d\omega}$

$$\int \frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)}\,d\omega = /\text{kedjeregeln}/ = \int \frac{dG}{G} = \ln G$$

Vi samlar konstanterna från båda integralerna på andra sidan!

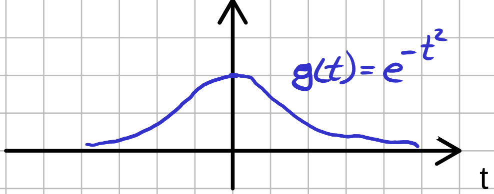
$$-\int \frac{\omega}{2}\,d\omega = -\frac{\omega^2}{4} + C$$

Lös separabla differentialekvationen:

$$\frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)} = -\frac{\omega}{2} \Rightarrow \int \frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)}\,d\omega = -\int \frac{\omega}{2}\,d\omega$$

(Fortsättning)

Exempel (Gaußkurva)



Lös separabla differentialekvationen:

$$\frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)} = -\frac{\omega}{2} \Rightarrow \int \frac{\frac{dG}{d\omega}}{G(\omega)} d\omega = -\int \frac{\omega}{2} d\omega$$

$$\Leftrightarrow \ln G = -\frac{\omega^2}{4} + C \Leftrightarrow G(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{4}} \underbrace{e^{C}}_{=C_1}.$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt = \sqrt{\pi} \right)$$

Men $\nearrow$ ger DC-komponenten $G(0) = \sqrt{\pi}$, så $C_1 = \sqrt{\pi}$.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \qquad I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx\, dy$$

polära koordinater $\Rightarrow I^2 = \pi$

$\Rightarrow I = \sqrt{\pi}$

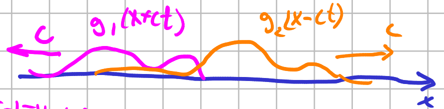
Slutsats: Viktigt transformpar (jfr Tab. 3:18)

$$e^{-t^2} \longleftrightarrow \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}}.$$

(Avancerat)

Exempel

Vågekvationen i 1D:



Avvikelse från "jämvikt": $y(x,t) \longleftrightarrow Y(\xi,t)$ ← istället för ω

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

vågutbredningshastighet

Fouriertransformera! (i x-led)

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - c^2 (j\xi)^2 Y(x,t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + (c\xi)^2 Y = 0$$

Lös som ODE i t: Kar. ekv. $r^2 + (c\xi)^2 = 0 \Rightarrow r = \pm j c \xi$

$$Y(\xi,t) = \underline{G_1(\xi) e^{jc\xi t}} + \underline{G_2(\xi) e^{-jc\xi t}}$$

$$\Rightarrow y(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\xi,t)\} = g_1(x+ct) + g_2(x-ct)$$

SLUTSATS: en vågfront som rör sig åt höger med farten c, och en åt vänster med farten c!