Föreläsning 4: Laplacetransformen

I kursen skall vi ägna oss åt olika typer av transformer,
som kan användas för att analysera signaler och system.
De används även för att konstruera / designa system,
eller för att utföra beräkningar!

Tidsdomän (alt. rumsdomän) | Frekvensdomän (alt. transformdomän)

Transform ("basbyte") →

Signaler / funktioner
- Tidsdiskreta vs tidskontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .

Transformer / spektrum (också funktioner!)
- Diskreta vs kontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .

← Invers transform

Ev. ej absolutintegrerbara!

Konvergensområde!

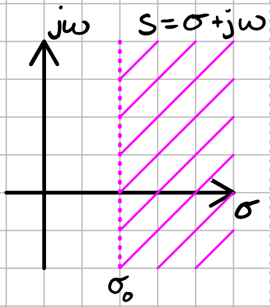
Enkelsidig vs. dubbelsidig

"unilateral"

Enkelsidig laplacetransform

Högersidigt konvergensområde

$\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$

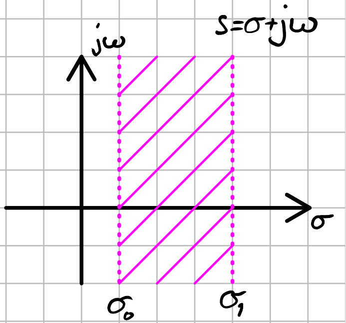


"bilateral"

Dubbelsidig laplacetransform

Konvergensområde

$\sigma_0 < \mathrm{Re}\{s\} < \sigma_1$

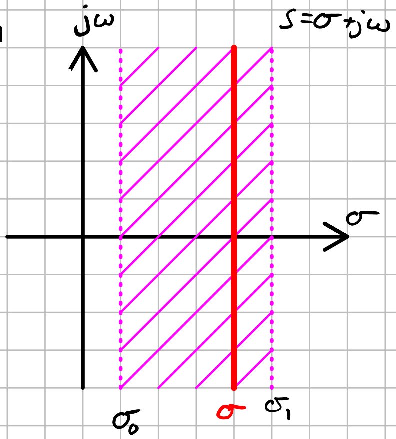


Invers laplacetransform

Inversa laplacetransformen ges, i både det enkelsidiga och det dubbelsidia fallet, av integralen

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

för valfritt σ i konvergensområdet.



Jämför: Fouriers inversionsformel!
(Nu med "dämpning".)

I praktiken använder vi hellre tabeller och partialbråksuppdelning!

Några egenskaper

Enkelsidig

Dubbelsidig

1) Tidsförskjutning

$x(t-t_0)u(t-t_0) \longleftrightarrow X_I(s)e^{-st_0}, \quad t_0 \geq 0$

$x(t-t_0) \longleftrightarrow X_{II}(s)e^{-st_0}$

2) Tidsskalning

$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a}X_I\left(\frac{s}{a}\right), \quad a>0$

$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}X_{II}\left(\frac{s}{a}\right), \quad a \neq 0$

(fortsättning)

Några egenskaper

Enkelsidig

Dubbelsidig

3) Frekvensförskjutning

$$x(t)e^{s_0 t} \longleftrightarrow X(s-s_0)$$

4) Derivering

$$x'(t) \longleftrightarrow sX_I(s) - x(0^-)$$

$$x'(t) \longleftrightarrow sX_{II}(s)$$

Härledning av sambandet för derivering

Enkelsidig

Dubbelsidig

Några viktiga transformpar

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{s}, & \mathrm{Re}\{s\} > 0 \\[2ex] u_0(-t) \leftrightarrow -\dfrac{1}{s}, & \mathrm{Re}\{s\} < 0 \end{array}}$$

Detta visar sig i många samband!

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$\sin(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s^2+\omega_0^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

Exempel: Begynnelsevärdesproblem

Lös diff. ekv. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$, $t \geq 0$ med $y(0) = y'(0) = 1$.

Exempel: Begynnelsevärdesproblem

Inverstransformera:

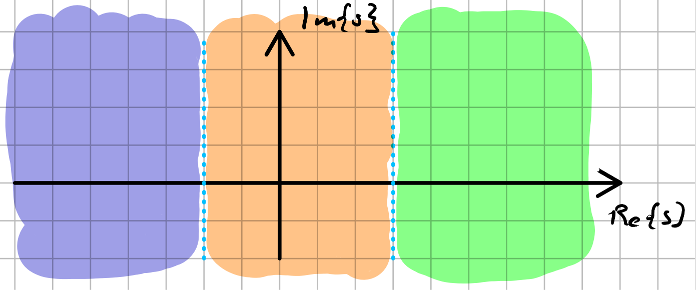
Exempel: Inverstransform via partialbråk

Bestäm den inversa (dubbelsidiga) laplacetransformen till

$$X(s) = \frac{1}{s^2 - s - 6}$$

för alla tänkbara konvergensområden!

Möjliga konvergensområden:



(Fortsättning av)

Exempel: Inverstransform via partialbråk