Föreläsning 2020-10-02

Föreläsning 6: Diskret-tid Fouriertransform (DTFT

INTE samma som Diskret Fouriertransform DFT

I kursen skall vi ägna oss åt olika typer av transformer, som kan användas för att analysera signaler och system. De används även för att konstruera / designa system, eller för att utföra beräkningar!

Bas: $\{e^{j\Omega n}\}$, $|\Omega| < \pi$

Tidsdomän (alt. rumsdomän) | Frekvensdomän (alt. transformdomän)

Transform ("basbyte") $\longrightarrow$

Signaler / funktioner
- Tidsdiskreta vs tidskontinuerliga
- Periodiska vs icke-periodiska
- . . .

Transformer / spektrum (också funktioner!)
- Diskreta vs kontinuerliga
- Periodisk

$\longleftarrow$ Invers transform

Definitionen av DTFT och invers DTFT

Diskret-tid Fouriertransform (DTFT):

$$X[\Omega] = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

$$= \mathcal{Z}\{x[n]\}\Big|_{z=e^{j\Omega}}$$

om enhetscirkeln i konv. omr.

Invers DTFT:

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X[\Omega]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X[\Omega]e^{j\Omega n}\,d\Omega$$

Fourierserier:

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

Invers:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Några transformer

$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{om } n=0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$ Kroneckers delta

1) $\delta[n] \leftrightarrow 1$

$\mathcal{F}\{\delta[n]\} = \underbrace{\ldots + \delta[-1]e^{j\Omega}}_{=0} + \underbrace{\delta[0]\cdot 1}_{=1} + \underbrace{\delta[1]e^{-j\Omega} + \ldots}_{=0}$

$\delta[n-m] \leftrightarrow e^{-jm\Omega}$

skifta $\delta[0]$ i summan ovan

$1 \leftrightarrow 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\cdot 2\pi)$

$z = e^{j\Omega}$ förbjudet!

2) $u[n] \leftrightarrow vp\left\{\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-1}\right\} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\cdot 2\pi)$

jämför: $\mathcal{Z}\{u[n]\} = \frac{z}{z-1}, \quad |z|>1$

3) $\gamma^n u[n] \leftrightarrow \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\gamma}$ om $|\gamma|<1$

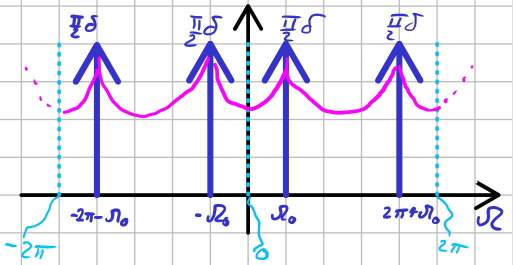
$\gamma^n u[-n-1] \leftrightarrow -\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}-\gamma}$ om $|\gamma|>1$

(fortsättning)

Några transformer

4) $\cos(\Omega_0 n) \longleftrightarrow \frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\delta(\Omega+\Omega_0-k\cdot 2\pi)+\delta(\Omega-\Omega_0-k\cdot 2\pi)\right)$

$\sin(\Omega_0 n) \longleftrightarrow j\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\delta(\Omega+\Omega_0-k\cdot 2\pi)-\delta(\Omega-\Omega_0-k\cdot 2\pi)\right)$



5)

$\cos(\Omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow vp\left\{\frac{e^{j\Omega}(e^{j\Omega}-\cos\Omega_0)}{e^{2j\Omega}-2e^{j\Omega}\cos\Omega_0+1}\right\}+\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\delta(\Omega+\Omega_0-k\cdot 2\pi)+\delta(\Omega-\Omega_0-k\cdot 2\pi)\right)$

$\sin(\Omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow vp\left\{\frac{e^{j\Omega}\sin\Omega_0}{e^{2j\Omega}-2e^{j\Omega}\cos\Omega_0+1}\right\}+j\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\delta(\Omega+\Omega_0-k\cdot 2\pi)-\delta(\Omega-\Omega_0-k\cdot 2\pi)\right)$

Några egenskaper

$x[n] \longleftrightarrow X[\Omega]$

1) Tidsskift $\quad x[n-n_0] \leftrightarrow X[\Omega]e^{-j\Omega n_0}$

$$x[n-n_0] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X[\Omega]e^{j\Omega(n-n_0)}d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X[\Omega]e^{-j\Omega n_0} \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$$

2) Frekvensskift

$$x[n]\,e^{j\Omega_0 n} \longleftrightarrow X[\Omega-\Omega_0]$$

speciellt: $x[n](-1)^n \leftrightarrow X[\Omega-\pi]$

3) Spegling $\quad x[-n] \leftrightarrow X[-\Omega]$

$$x[-n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X[\Omega]e^{-j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X[-\Omega]e^{j\Omega n}d\Omega$$

4) Mult. med n $\quad nx[n] \leftrightarrow j\dfrac{dX[\Omega]}{d\Omega}$

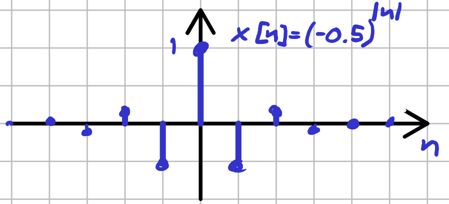
$$j\frac{dX[\Omega]}{d\Omega} = j\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega}\cdot(-jn)$$

5) Symmetri för reella signaler $\quad X[-\Omega] = X^*[\Omega]$

Exempel: Amplitudspektrum via Pol-Nollställen

Beräkna och skissera amplitudspektrum

för signalen $x[n]=(-0.5)^{|n|} = (0,5)^{|n|}\cdot(-1)^{|n|}$



Skriv om $x[n] = \underbrace{(-0.5)^{-n}}_{(-2)^n} \underbrace{u[-n-1]} + (-0.5)^n u[n]$

innanför pol

utanför pol

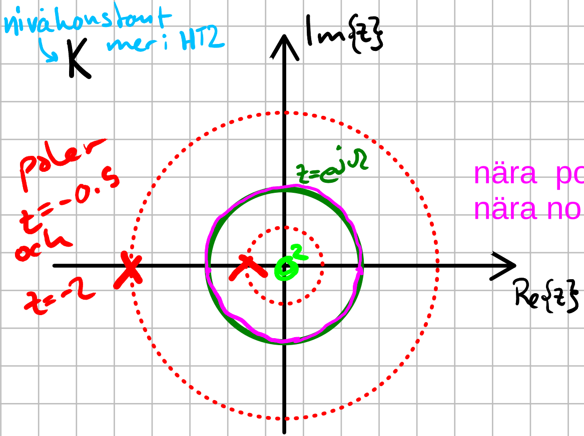
$$X[z] = \mathcal{Z}\{x[n]\} = -\frac{z}{z+2} + \frac{z}{z+0.5}$$

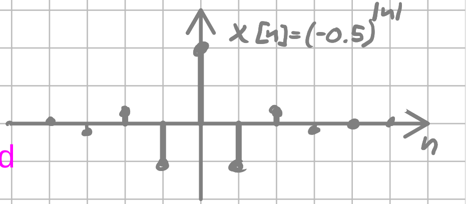
$\Rightarrow$ enhetscirkeln i konv. omr!

$$X[\Omega] = -\frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}+2} + \frac{e^{j\Omega}}{e^{j\Omega}+0.5}$$

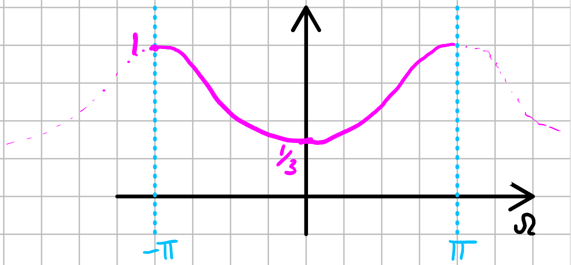
(forts.)

Exempel: Amplitudspektrum via Pol-Nollställen





nära poler = större amplitud
nära nollställe = mindre



Tänk: Tung, elastisk gummiduk som är uppspänd över z-planet.
Polerna är oändligt höra tältpinnar, nollställena är tältspikar.
Dukens höjd längs enhetscirkeln ger amplitudspektrum.