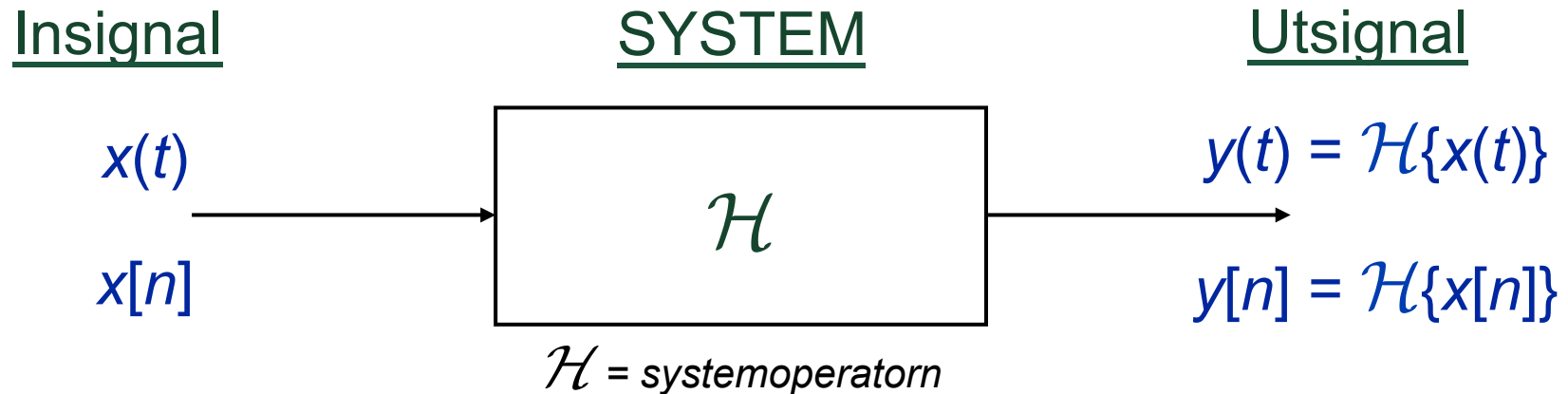


# System, Insignal & Utsignal



- ◆ Ett **SYSTEM** = en **matematisk modell** av ett fysikaliskt system, alt. en **algorithm**, som för olika **insignaler  $x$**  genererar olika **utsignaler  $y$** .
- ◆ En **SIGNAL** = en informationsbärande matematisk **funktion** som *representerar* en (ofta mätbar) fysikalisk storhet.
- ◆ Signalerna är här oftast deterministiska, endimensionella, periodiska eller icke-periodiska, tidskontinuerliga eller tidsdiskreta.

## Periodisk summa av cos/sin

Låt  $x(t) = A\sin(\omega_a t + \alpha) + B\cos(\omega_b t + \beta)$ .

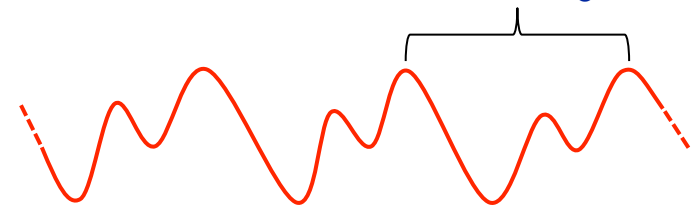
- Om  $\omega_b = \omega_a \Rightarrow x(t) = C\cos(\omega_a t + \gamma)$  är  $T_0$ -periodisk,

$$\text{dvs. } x(t) = x(t + T_0) \text{ med } T_0 = \frac{2\pi}{\omega_a}$$

- Om  $\omega_a \neq \omega_b$  &  $\frac{\omega_a}{\omega_b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x(t)$  är  $T_0$ -periodisk, med  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ ,

där  $\omega_0 = \text{SGD}(\omega_a, \omega_b)$

(SGD = Största Gemensamma Delare (SGD), alt. GCD, GCF)



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_a T_0 = k \cdot 2\pi \\ \omega_b T_0 = m \cdot 2\pi \end{cases}, \quad k, m \in \mathbb{N}_+ \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_a = k \cdot \omega_0 \\ \omega_b = m \cdot \omega_0 \end{cases}, \quad \text{där } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

## Fourierserieanalys av periodiska signaler

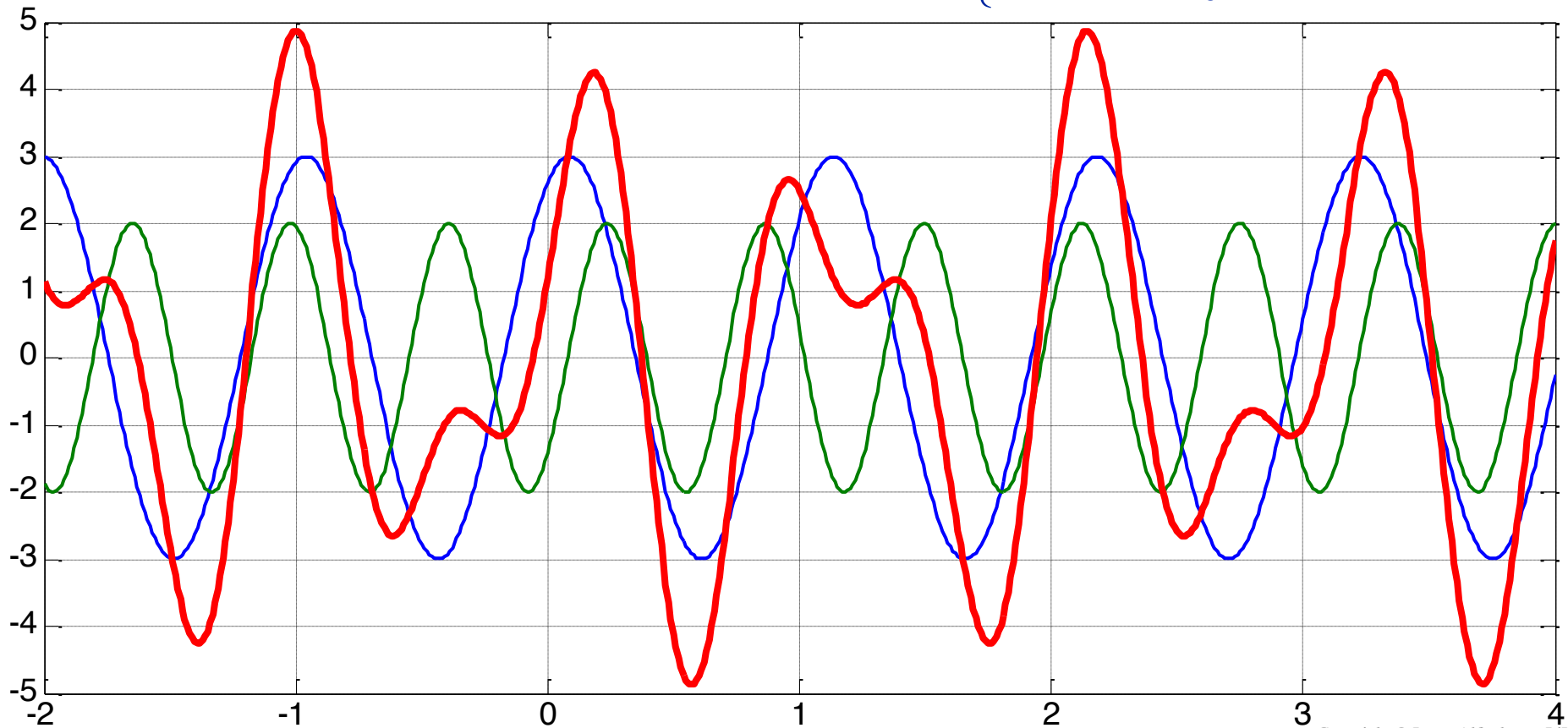
3

**Ex, summa av cos/sin:**

$$x(t) = \underbrace{3 \sin\left(6t + \frac{\pi}{3}\right)}_{\text{röd kurva}} + \underbrace{2 \cos\left(10t - \frac{3\pi}{4}\right)}_{\text{blå kurva}}$$

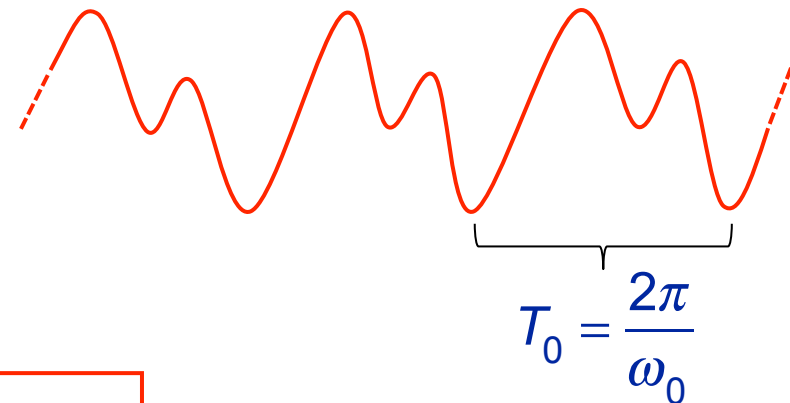
grön kurva

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{6}{10} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \\ \omega_0 = \text{SGD}(6,10) = 2 \text{ rad/s} \\ \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi \text{ sek} \end{array} \right.$$



## Fourierserieutveckling av periodiska signaler

En fysikalisk  $T_0$ -periodisk signal  $x(t)$ ,  
dvs.  $x(t) = x(t + T_0)$ , kan uttryckas  
som den **trigonometriska fourierserien**:



$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

= "Fourierserien till  $x(t)$ " (alt. "fourierserie-utvecklingen av  $x(t)$ ")

$\omega_0 = 2\pi f_0$ : grundvinkelfrekvens

$a_0$ : medelvärdesnivå

$f_0 = \frac{1}{T_0}$ : grundfrekvens

$\cos/\sin(\omega_0 t)$ : grundton(er)

$\cos/\sin(n\omega_0 t)$ ,  $n = 2, 3, 4, \dots$ : övertoner

deltoner

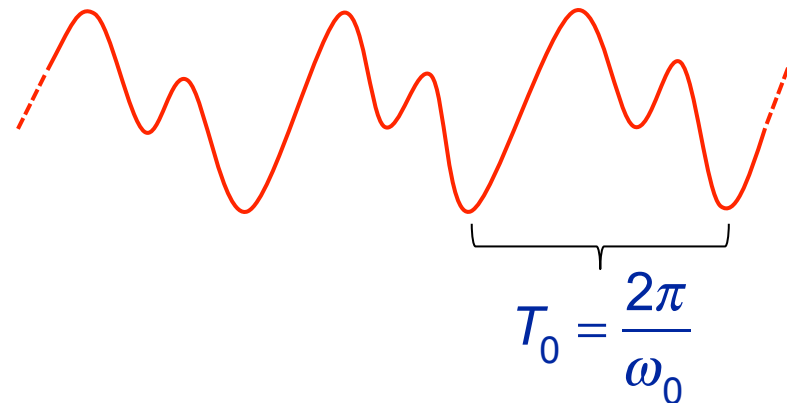
# Fouriersserieutveckling av periodiska signaler

Vi föredrar att uttrycka  
fouriersserien på **kompakt form**:

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

där

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0 = a_0 \\ C_{n>0} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \theta_{n>0} = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right) \end{array} \right.$$



## Dock:

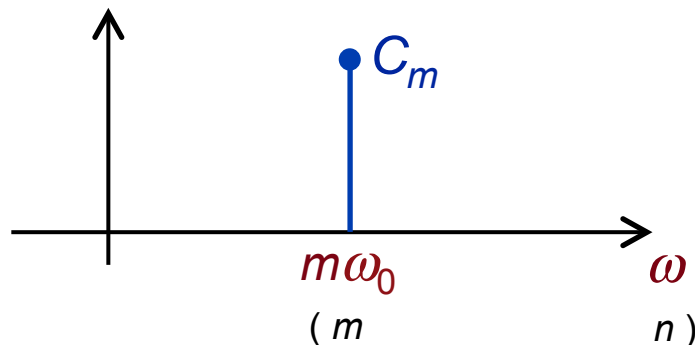
Vi kommer att beräkna  $C_n$  och  $\theta_n$   
på annat/enklare sätt, m.h.a.  
*komplexa fouriersseriekoefficienter*  
(kommer längre fram)!

## Fouriersserieanalys av periodiska signaler

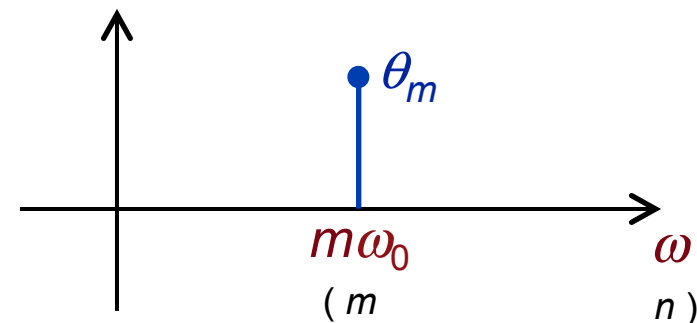
# Frekvensspektrum – grafisk frekvensbeskrivning av signal

Delton  $m$ :  $C_m \cos(m\omega_0 t + \theta_m)$

### Enkelsidigt amplitudspektrum



### Enkelsidigt fasspektrum



Frekvensspektrum för generella signaler – testa även själv:

[www.falstad.com/fourier](http://www.falstad.com/fourier) (java-demo)

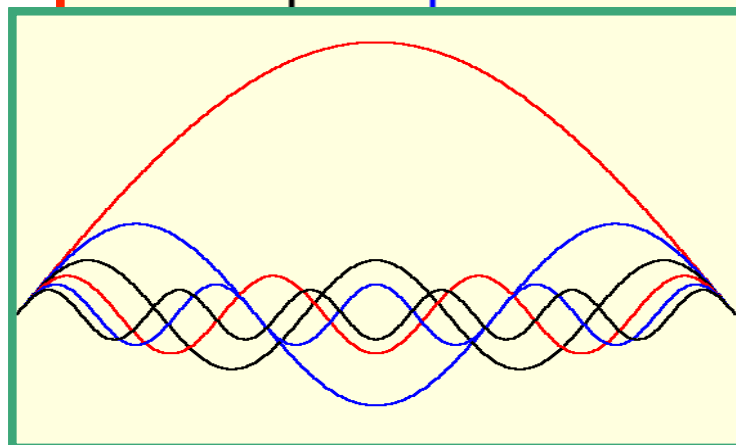
## Ex: Approximation av fyrkantvåg



$$x(t) = \sum_{k=1}^N \dots$$

( $k$  udda)

Gibbs fenomen



6

5

4

3

2

1

# termer

# Fouriersserieanalys av periodiska signaler

## Komplex fouriersserieutveckling av $x(t)$

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

Fouriersserien på **exponentialform**

**Komplexa fouriersseriekoefficienter:**

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{n>0} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n} \\ D_{n<0} = \frac{x(t)}{\text{reellv\u00e4rd}} = D_{-n}^* \end{array} \right.$$

Amplitudspektrum

$$C_0 = D_0$$

$$C_n = 2|D_n|; \quad (n>0)$$

Fasspektrum

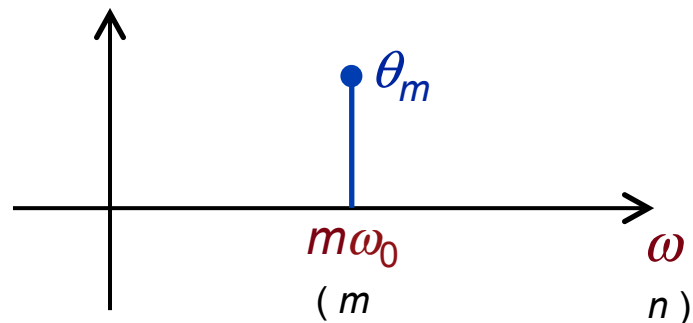
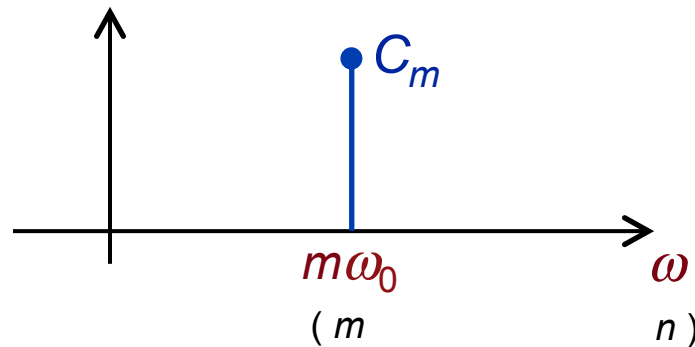
$$\theta_n = \arg D_n$$



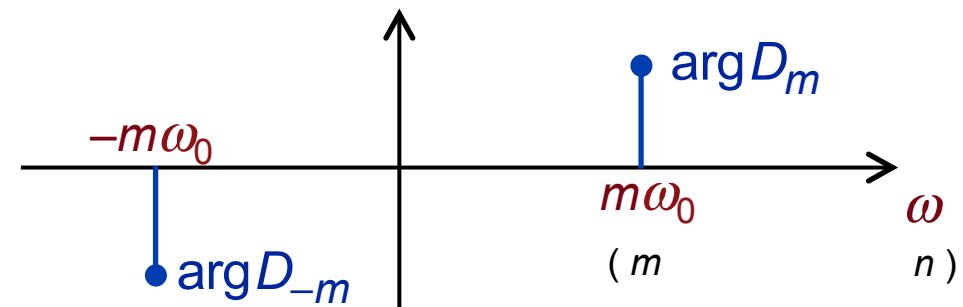
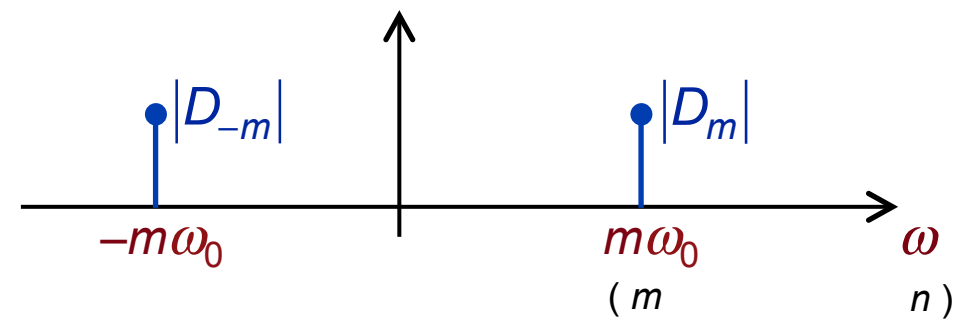
## Fourierserieanalys av periodiska signaler

## Dubbelsidigt frekvensspektrum

Delton  $m$ :  $C_m \cos(m\omega_0 t + \theta_m) = \underbrace{\frac{C_m}{2} e^{j\theta_m}}_{\triangleq D_m} \cdot e^{jm\omega_0 t} + \underbrace{\frac{C_m}{2} e^{-j\theta_m}}_{= D_m^* = D_{-m}} \cdot e^{-jm\omega_0 t}$



Enkelsidigt amplitudspektrum  
resp. fasspektrum



Dubbelsidigt amplitudspektrum  
resp. fasspektrum