LAPLACETRANSFORMEN

Se härledningen i en video!

Antag $\begin{cases} x(t<0)=0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt \not< \infty \end{cases} \Rightarrow \underline{\mathcal{F}\{x(t)\} \nexists}$ (enl. grunddef.)

Låt $\tilde{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t}$, där $\sigma \in \mathbb{R}$, sådan att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(t)|\,dt < \infty \quad \forall \quad \sigma > \text{något } \sigma_0 \geq 0$$

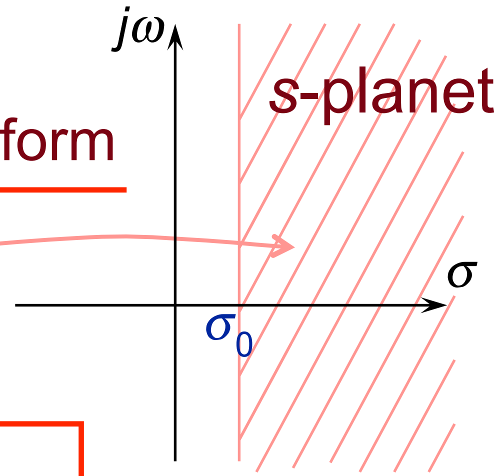
<u>Följaktligen existerar $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$</u>

(Enkelsidig) laplacetransform, forts.

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\left\{\tilde{x}(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{x(t)e^{-\sigma t}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t}\,dt$$

$$= X(\sigma + j\omega) = \boxed{X_{\mathrm{I}}(s) = \mathcal{L}_{\mathrm{I}}\left\{x(t)\right\} = \int_{0-}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt}$$

Låt $\boxed{s = \sigma + j\omega}$



$X(s) = X_{\mathrm{I}}(s)$: Enkelsidig (”*unilateral*”) laplacetransform

Konvergensområde: $\sigma = \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$

OBS!

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left\{x(t)\right\} \nexists & \Leftrightarrow \quad \sigma_0 > 0 \\ \mathcal{F}\left\{x(t)\right\} \exists & \Leftrightarrow \quad \sigma_0 < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega}}$$

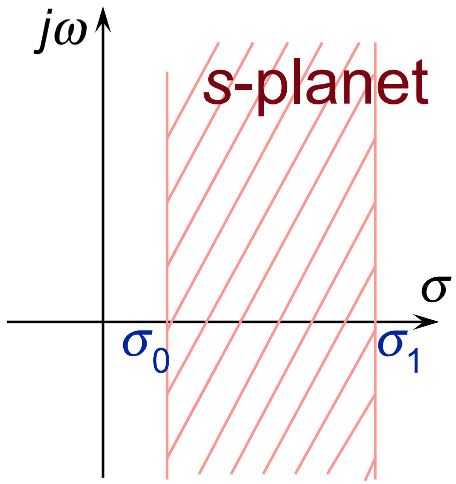
Dubbelsidig laplacetransform

Låt $x(t)\ \exists\ \forall t$ och låt $\mathcal{F}\left\{x(t)e^{-\sigma t}\right\}\ \exists$ för något reellt σ i intervallet $\sigma_0 < \sigma < \sigma_1$:

$$\boxed{X_{\mathrm{II}}(s) = \mathcal{L}_{\mathrm{II}}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt}$$

Dubbelsidig ("*bilateral*") laplacetransform

Konvergensområde för $X_{\mathrm{II}}(s)$: $\sigma_0 < \sigma = \mathrm{Re}\{s\} < \sigma_1$

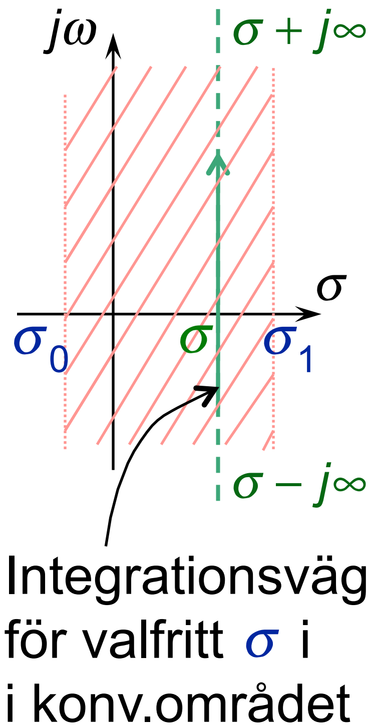


(OBS! Om $\mathcal{F}\{x(t)\}\ \exists \iff j\omega$-axeln ligger i konvergensområdet för $X(s)$!)

Invers laplacetransform

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

Samma inverstransformsamband för den dubbelsidiga laplacetransformen som för den enkelsidiga!



I denna kurs erhåller vi ofta oftast transformer och deras inverser från någon ***laplacetransformtabell!***

Några centrala laplacetransformpar

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1$$

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}; \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$u_0(-t) \Leftrightarrow \frac{-1}{s}; \quad \mathrm{Re}\{s\} < 0$$

$$e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s+a}; \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$e^{-at}u_0(-t) \Leftrightarrow \frac{-1}{s+a}; \quad \mathrm{Re}\{s\} < -a$$

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega_0^2}; \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$\sin(\omega_0 t)u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}; \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

$$\cos(\omega_0 t)u_0(-t) \Leftrightarrow \frac{-s}{s^2+\omega_0^2}; \quad \mathrm{Re}\{s\} < 0$$

$$\sin(\omega_0 t)u_0(-t) \Leftrightarrow \frac{-\omega_0}{s^2+\omega_0^2}; \quad \mathrm{Re}\{s\} < 0$$

$$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t) \Leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}; \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t) \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}; \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

Några centrala laplacetransformegenskaper

Tidsförskjutning:	$x(t-t_0)u(t-t_0) \Leftrightarrow X_{\mathrm{I}}(s)e^{-st_0};\quad t_0 \geq 0$	$x(t-t_0) \Leftrightarrow X_{\mathrm{II}}(s)e^{-st_0}$
Frekvensförskjutning:	$x(t)e^{s_0 t} \Leftrightarrow X(s-s_0)$	
Tidsskalning:	$x(a\cdot t) \Leftrightarrow \frac{1}{a}X_{\mathrm{I}}\left(\frac{s}{a}\right);\ a>0$	$x(a\cdot t) \Leftrightarrow \frac{1}{\lvert a\rvert}X_{\mathrm{II}}\left(\frac{s}{a}\right);\ a\neq 0$
Derivering:	$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow s\cdot X_{\mathrm{I}}(s)-x(0\text{-})$	$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow s\cdot X_{\mathrm{II}}(s)$
Integrering:	$\int_{0\text{-}}^{t} x(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{s}X_{\mathrm{I}}(s)$	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{s}X_{\mathrm{II}}(s)$