Förberedelse inför föreläsningen:

1. Se **VIDEO 1**:
   - Tidsdiskreta signaler
   - Likformig sampling

2. Se **VIDEO 2**: Tidsdiskreta signalmodeller

3. Se **VIDEO 3**:
   - Härledning av z-transformen
   - Ett beräkningsexempel

z-transformen

- **Dubbelsidig** ("*bilateral*") ***z*-transform**:

$$X_{\mathrm{II}}[z] = \mathcal{Z}_{\mathrm{II}}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

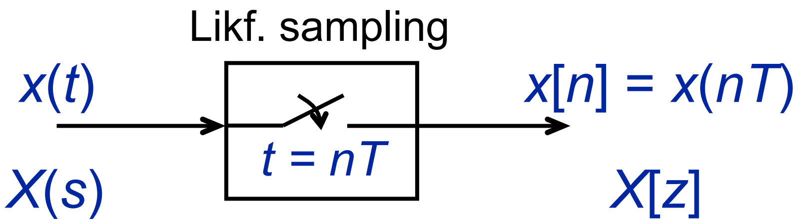
Om kausal funktion/signal $\Longrightarrow$

- **Enkelsidig** ("*unilateral*") ***z*-transform:**

$$X_{\mathrm{I}}[z] = \mathcal{Z}_{\mathrm{I}}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

- *z*-transformen är bara entydigt definierad tillsammans med angivet **konvergensområde** ("*ROC, Region Of Convergence*"):
  - **Högersidig** $x[n]$, med $x[n<0] = 0$: $|z| > R_0$
    (***Kausal*** *signal*)
  - **Vänstersidig** $x[n]$, med $x[n \geq 0] = 0$: $|z| < R_1$
    (***Antikausal*** *signal*)
  - **Dubbelsidig** $x[n]$, dvs. $x[n] \neq 0$ för *minst något* $n > 0$ och $n < 0$: $R_0 < |z| < R_1$
- Beteckning, transformpar: $x[n] \Leftrightarrow X[z]$

Jämförelse – konvergensområde för $X(s)$ och $X[z]$



Avbildning s-planet $\longrightarrow$ z-planet vid sampling: $\boxed{z = e^{sT}}$

(*Se Video 3*)

$\Longrightarrow$ $\underline{s_0 = \sigma_0 + j\omega_0}$ i s-planet avbildas på

$\underline{z_0} = e^{(\sigma_0 + j\omega_0)T} = e^{\sigma_0 T} \cdot e^{j\omega_0 T} = \underline{R_0 \cdot e^{j\Omega_0}}$ i z-planet där $\underline{R_0 = e^{\sigma_0 T} \;\; \& \;\; \Omega_0 = \omega_0 T}$

Även $\underline{s_k = s_0 + jk\omega_s}$ avbildas på $\underbrace{e^{\sigma_0 T} \cdot e^{j\omega_0 T}}_{= z_0} \cdot e^{jk\omega_s T} = z_0 \cdot \underbrace{e^{jk\frac{2\pi}{T}T}}_{=\left(e^{j2\pi}\right)^k = 1} = \underline{z_0}$

$k \in \mathbb{Z}, \;\; \omega_s = \frac{2\pi}{T}$

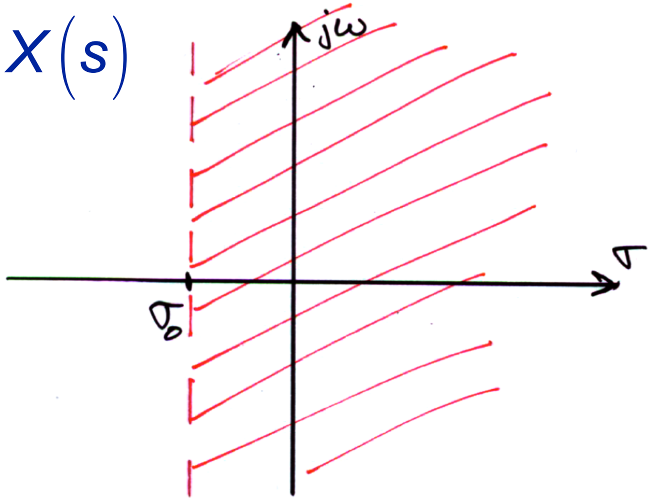
$\Longrightarrow$ Varje horisontellt *band* med höjden ω_s i s-planet avbildas på *hela* z-planet ($s \longrightarrow z$):

- VHP $\longrightarrow$ innanför enhetscirkeln $\left(\sigma_0 < 0 \Rightarrow R_0 < 1\right)$
- $j\omega$-axeln $\longrightarrow$ enhetscirkeln $\left(\sigma_0 = 0 \Rightarrow R_0 = 1\right)$
- HHP $\longrightarrow$ utanför enhetscirkeln $\left(\sigma_0 > 0 \Rightarrow R_0 > 1\right)$

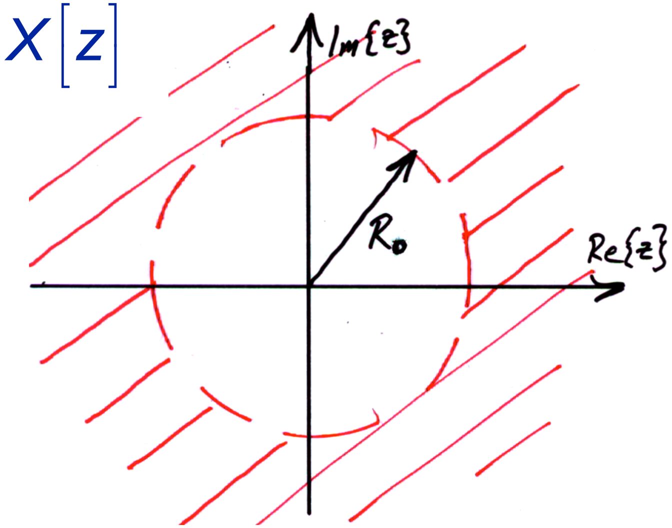
Jämförelse – konvergensområde för *X*(*s*) och *X*[*z*]

Kausala signaler: $x(t<0)=0$ & $x[n<0]=0$

$X(s)$



$X[z]$



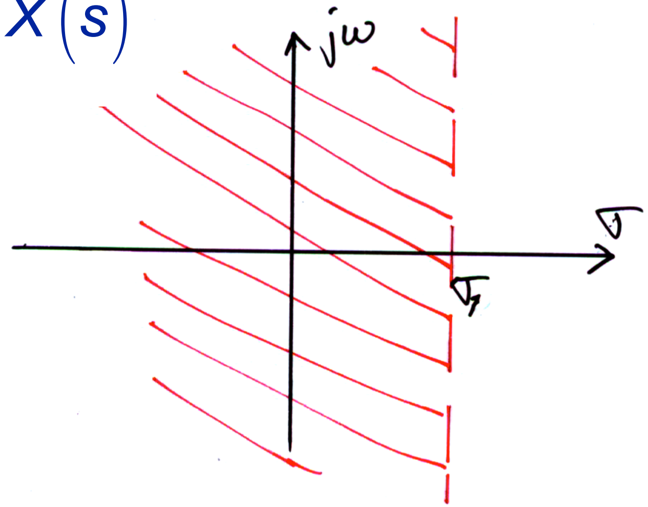
$\mathrm{Re}\{s\}>\sigma_0$ $\qquad$ $|z|>R_0$

Både *X*(*s*) och *X*[*z*] har minst en singulär punkt på konvergensområdets rand $\left(\text{där } X(s)=\infty \ \& \ X[z]=\infty\right)$

Jämförelse – konvergensområde för *X*(*s*) och *X*[*z*]

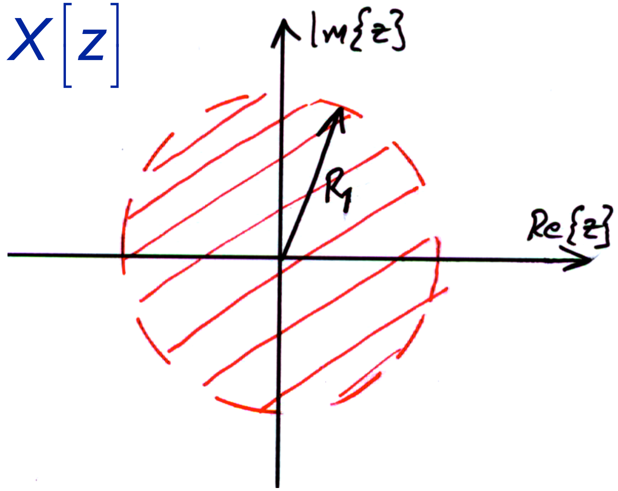
Antikausala signaler: $x(t \geq 0) = 0$ & $x[n \geq 0] = 0$

$X(s)$



$\mathrm{Re}\{s\} < \sigma_1$

$X[z]$



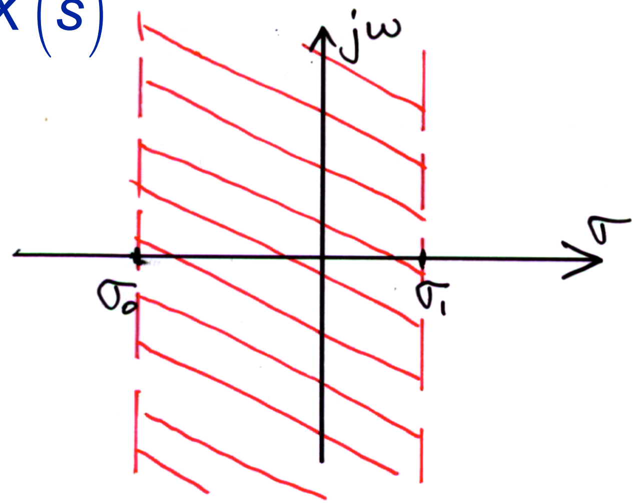
$|z| < R_1$

Både *X*(*s*) och *X*[*z*] har minst en singulär punkt på konvergensområdets rand $\left(\text{där } X(s) = \infty \text{ \& } X[z] = \infty\right)$

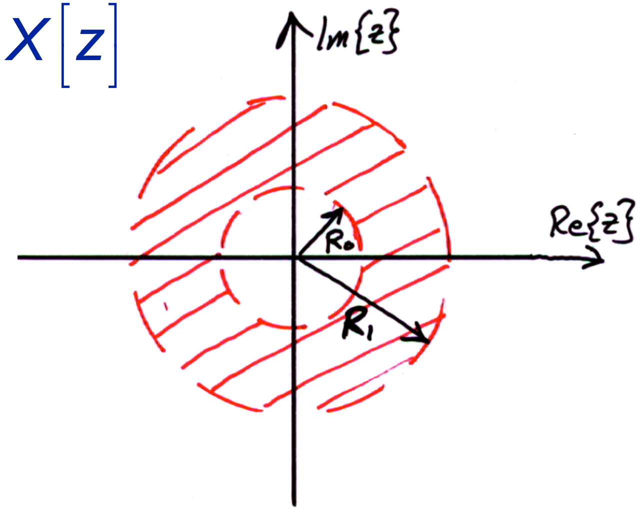
Jämförelse – konvergensområde för *X*(*s*) och *X*[*z*]

Allmänna dubbelsidiga signaler: $x(t)$ & $x[n] \neq 0$ för något $\begin{cases} t,n<0 \\ \text{och} \\ t,n \geq 0 \end{cases}$

$X(s)$



$X[z]$



$\sigma_0 < \text{Re}\{s\} < \sigma_1$

$R_0 < |z| < R_1$

Både $X(s)$ och $X[z]$ har minst en singulär punkt på konvergensområdets rand $\left(\text{där } X(s) = \infty \text{ \& } X[z] = \infty\right)$

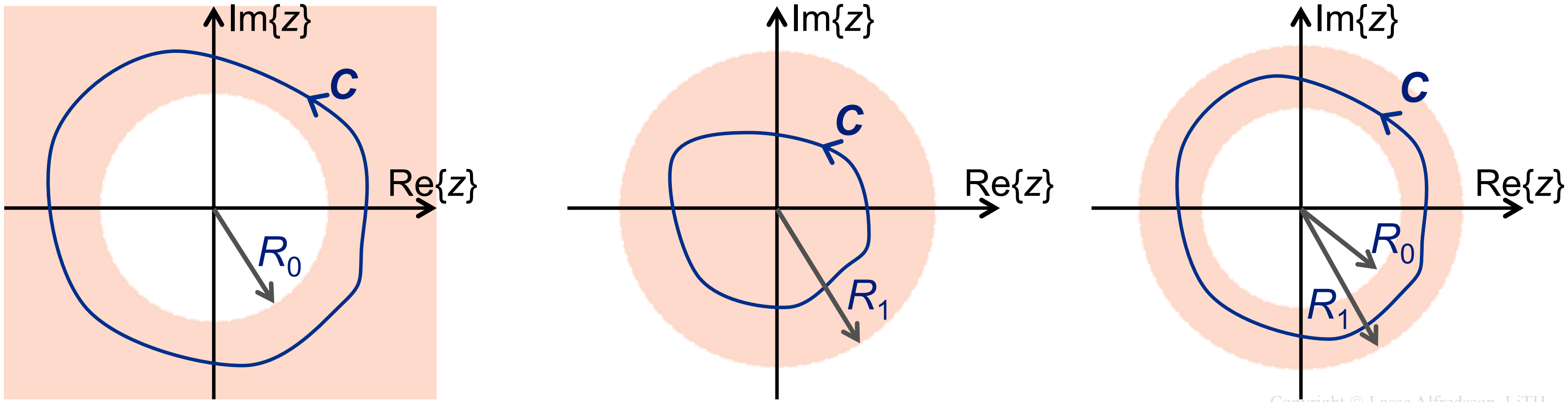
Invers *z*-transform

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X[z]\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X[z]z^{n-1}dz$$

Integrera moturs längs den slutna kurvan ***C*** i *z*-planet, omslutande origo i konvergensområdet för $X[z]$ $\Rightarrow$ 3 olika fall:

$|z| > R_0$ $\quad$ $|z| < R_1$ $\quad$ $R_0 < |z| < R_1$

$(x[n<0]=0)$ $\quad$ $(x[n\geq 0]=0)$ $\quad$ $(x[n<0],\ x[n\geq 0]\neq 0)$



Invers *z*-transform

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X[z]\} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X[z]z^{n-1}dz$$

Inverstransformering sker på något av följande sätt:

1. **Direkt beräkning** av kurvintegralen (m.h.a. residueberäkningar)
2. **Potensserieutveckling** av $X[z]$ till en serie av termer z^{-n}
3. **Partialbråksuppdelning** av $X[z]$ (eller hellre $X[z]/z$)

   följt av **tabellslagning** (identifiera transformpar $X[z] \Leftrightarrow x[n]$)

I kursen använder vi oss i första hand av metod 3!

Några centrala *z*-transformpar

$$\delta[n] \Leftrightarrow 1; \quad \forall z$$

$$\delta[n-m] \Leftrightarrow z^{-m}; \quad \begin{cases} |z|>0 \text{ om } m>0 \\ |z|<\infty \text{ om } m<0 \end{cases}$$

$$\gamma^n u[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-\gamma}; \qquad |z|>|\gamma|$$

$$\gamma^n u[-n-1] \Leftrightarrow -\frac{z}{z-\gamma}; \qquad |z|<|\gamma|$$

$$u[n] \Leftrightarrow \frac{z}{z-1}; \qquad |z|>1$$

$$u[-n-1] \Leftrightarrow -\frac{z}{z-1}; \qquad |z|<1$$

$$n\cdot\gamma^n\cdot u[n] \Leftrightarrow \frac{\gamma z}{(z-\gamma)^2}; \qquad |z|>|\gamma|$$

$$n\cdot\gamma^n\cdot u[-n-1] \Leftrightarrow -\frac{\gamma z}{(z-\gamma)^2}; \qquad |z|<|\gamma|$$

$$\gamma^n \cos(\Omega_0 n) u[n] \Leftrightarrow \frac{z(z-\gamma\cos\Omega_0)}{z^2-2\gamma(\cos\Omega_0)z+\gamma^2}; \quad |z|>|\gamma|$$

$$\gamma^n \sin(\Omega_0 n) u[n] \Leftrightarrow \frac{z\gamma\sin\Omega_0}{z^2-2\gamma(\cos\Omega_0)z+\gamma^2}; \quad |z|>|\gamma|$$

Några centrala z-transformegenskaper

Högerskift:

$$x[n-m]u[n-m] \Leftrightarrow z^{-m}X_{\mathrm{I}}[z]$$

$$x[n-m]u[n] \Leftrightarrow z^{-m}X_{\mathrm{I}}[z]+z^{-m}\sum_{n=1}^{m} z^{n}x[-n]$$

$$x[n-m] \Leftrightarrow z^{-m}X_{\mathrm{II}}[z]$$

Spegling: $x[-n] \Leftrightarrow X_{\mathrm{II}}\left[\frac{1}{z}\right]$

Mult med γ^n: $\gamma^n x[n] \Leftrightarrow X\left[\frac{z}{\gamma}\right]$

Mult. med n: $n \cdot x[n] \Leftrightarrow -z\frac{dX[z]}{dz}$

Initialvärdet: $x[0]=\lim_{z\to\infty} X_{\mathrm{I}}[z]$

Slutvärdet: $\lim_{n\to\infty} x[n]=\lim_{z\to 1}(z-1)X_{\mathrm{I}}[z]$

(Konv.omr.radien för $(z-1)X[z]$ är < 1)