Anm: Notera sinc:ens definition: $\mathrm{sinc}_N(\alpha) = \dfrac{\sin(\pi\cdot\alpha)}{\pi\cdot\alpha} = \mathrm{sinc}(\pi\cdot\alpha)$

2 Fouriertransformen för tidskontinuerliga funktioner

2.1 Fouriertransformen

2.1.1 a)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^T e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \int_0^T e^{-(a+j\omega)t}dt$$
$$= \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)}\right]_0^T = \frac{1-e^{-(a+j\omega)T}}{a+j\omega}$$

b)

$$X(\omega) = \int_0^T e^{at}e^{-j\omega t}dt = \int_0^T e^{(a-j\omega)t}dt = \frac{1-e^{(a-j\omega)T}}{-a+j\omega}$$

2.1.2

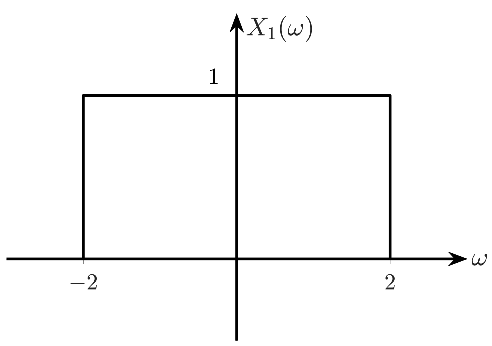
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^1 4e^{-j\omega t}dt + \int_1^2 2e^{-j\omega t}dt$$
$$= \frac{4}{-j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_0^1 + \frac{2}{-j\omega}\left[e^{-j\omega t}\right]_1^2 = \frac{4-2e^{-j\omega}-2e^{-j2\omega}}{j\omega}$$

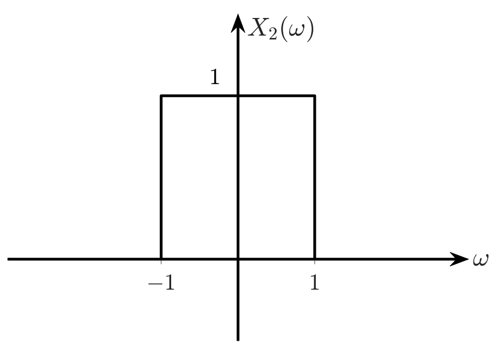
Anm: Här ser det ut som att uttrycket inte gäller för $\omega=0$, eftersom både täljaren och nämnaren blir noll för $\omega=0$. Doch – om man låter $\omega=0$ i den första integralen, alternativt Maclaurenutvecklar exponentialtermerna i svarets täljare och sedan låter $\omega=0$, så erhålls $X(0)=6$.

2.1.3

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(X_1(\omega)+X_2(\omega)\right)e^{j\omega t}d\omega$$

där $X_1(\omega)$ och $X_2(\omega)$ Lämpligen definieras enligt nedan:





$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{e^{j2t} - e^{-j2t}}{2j \cdot \pi t} + \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j \cdot \pi t}$$

$$= \frac{\sin(2t) + sin(t)}{\pi t}$$

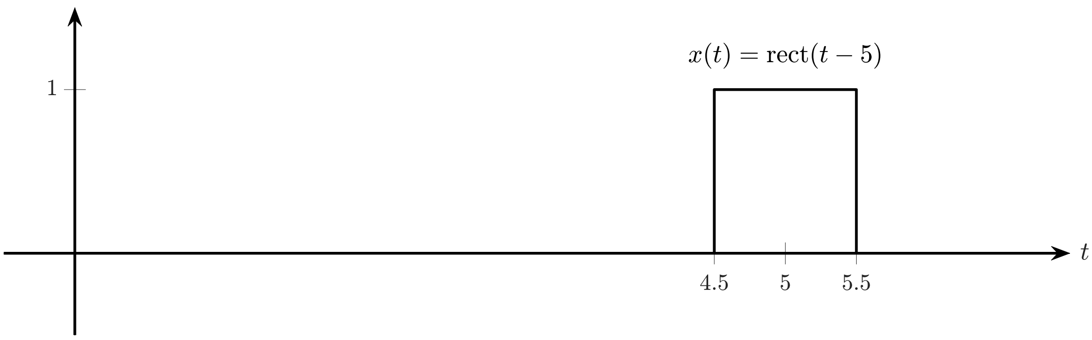
$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{2t}{\pi}\right)}{\pi \cdot \frac{2t}{\pi}} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{t}{\pi}\right)}{\pi \cdot \frac{t}{\pi}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \mathrm{sinc}_N\left(\frac{2t}{\pi}\right) + \frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{sinc}_N\left(\frac{t}{\pi}\right)$$

Anm: Man kan naturligtvis även beräkna $x(t)$ genom att dela upp inverstransformintegralen i tre tidsintervall:

$$\int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^{1} + \int_{1}^{2}$$

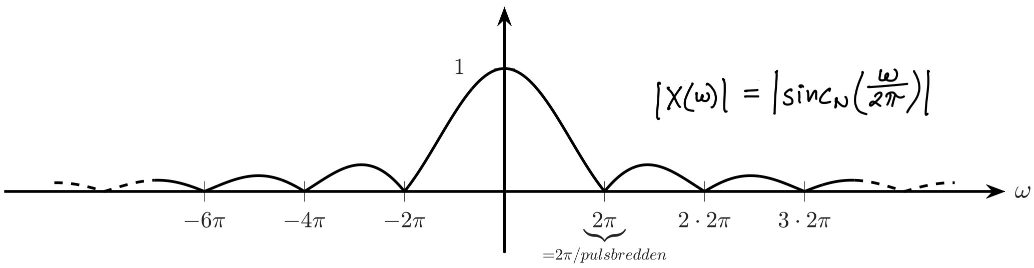
2.1.4 $x(t)$ är definierad enligt nedan:

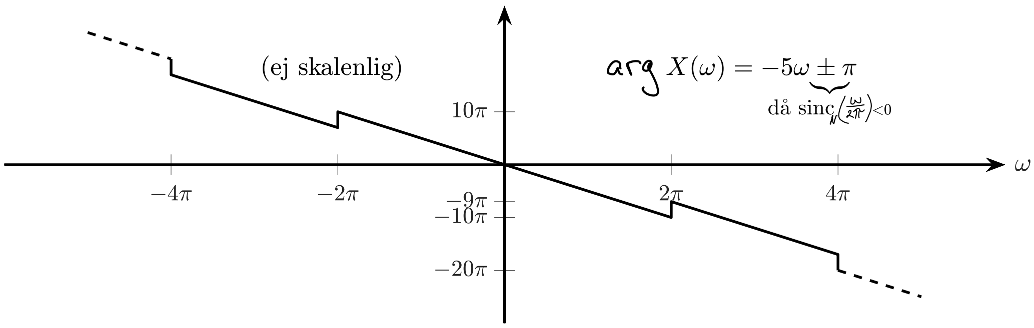


$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{4,5}^{5,5} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{4,5}^{5,5} = \frac{e^{-j4,5\omega} - e^{-j5,5\omega}}{j\omega}$$

$$= \frac{\left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)e^{-j5\omega}}{2j \cdot \frac{\omega}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} \cdot e^{-j5\omega} \left(= \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot e^{-j5\omega}\right)$$

$$= \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{\omega}{2\pi}\right)}{\pi \cdot \frac{\omega}{2\pi}} \cdot e^{-j5\omega} = \mathrm{sinc}_N\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \cdot e^{-j5\omega}$$





$\left(\text{För } \omega \neq 0 \text{ är } \mathrm{sinc}_N\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{\omega}{2\pi}\right)}{\pi \cdot \frac{\omega}{2\pi}} = \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega/2} = 0 \text{ för } \omega = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots\right)$

2.1.5 **a)**

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{\omega_0} 1 \cdot e^{-j\omega t_0} \cdot e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega(t-t_0)}}{j(t-t_0)}\right]_{-\omega_0}^{\omega_0}$$
$$= \frac{\sin\left(\omega_0(t-t_0)\right)}{\pi(t-t_0)} \left(= \frac{\omega_0}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\omega_0(t-t_0)\right)\right) = \frac{\omega_0}{\pi}\mathrm{sinc}_N\left(\frac{\omega_0}{\pi}(t-t_0)\right)$$

b)

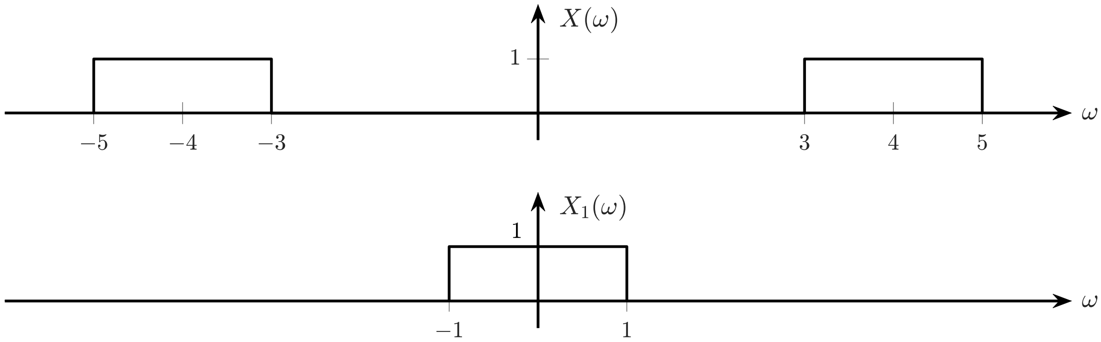
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\omega_0}^{0} 1 \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{=j} \cdot e^{j\omega t}d\omega + \int_{0}^{\omega_0} 1 \cdot \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{2}}}_{=-j} \cdot e^{j\omega t}d\omega\right)$$
$$= \frac{j}{2\pi}\left(\left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{-\omega_0}^{0} - \left[\frac{e^{j\omega t}}{jt}\right]_{0}^{\omega_0}\right) = \frac{2 - \left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)}{2\pi t}$$
$$= \frac{1}{\pi t}\left(1 - \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\omega_0 t)}{\pi t}$$

Anm: Liksom i svaret på uppgift 2.1.2 så gäller uttrycket även för $t=0$. Med $t=0$ i den första integralen, eller efter en Maclaurenutveckling av cos-termen i svaret, så erhålls $x(0)=0$.

2.2 Egenskaper hos fouriertransformen

2.2.1 $X(\omega)$ och $X_1(\omega)$:

2.2.1 $X(\omega)$ kan uttryckas som $X(\omega) = X_1(\omega+4) + X_1(\omega-4)$, där $X_1(\omega) = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$:



Tab. 3:13 $\left(\text{sinc}_N(at) = \text{sinc}(a\pi t) \Longleftrightarrow \frac{1}{a}\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)\right)$, med

$$X_1(\omega) = \frac{1}{\pi}\cdot\pi\cdot\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi\cdot\frac{1}{\pi}}\right) \;\left(a = \frac{1}{\pi}\right) \Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{\pi}\text{sinc}_N\left(\frac{t}{\pi}\right)$$

Tab. 2:9, frekvensskift $\left(x(t)e^{j\omega_0 t} \Longleftrightarrow X(\omega-\omega_0)\right)$ och $X(\omega) = X_1(\omega+4) + X_1(\omega-4)$ ger då

$$x(t) = x_1(t)e^{-j4t} + x_1(t)e^{j4t} = 2\cdot x_1(t)\frac{e^{j4t}+e^{-j4t}}{2} = 2x_1(t)\cdot\cos(4t) = \frac{2}{\pi}\text{sinc}_N\left(\frac{t}{\pi}\right)\cos(4t)$$

2.2.2 **a)**

$$X(\omega) = \int_{-T}^{0} 1\cdot e^{-j\omega t}dt - \int_{0}^{T} 1\cdot e^{-j\omega t}dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-T}^{0} - \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{0}^{T}$$
$$= \frac{e^0 - e^{j\omega T} - e^{-j\omega T} + e^0}{-j\omega} = \frac{2j\left(1-\cos(\omega T)\right)}{\omega} = \frac{4j}{\omega}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

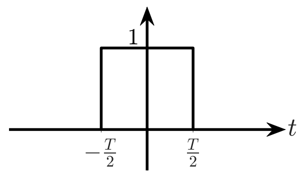
Anm: $\lim_{\omega\to 0} X(\omega) = 0$, se kommentaren till svaret på uppgift 2.1.5 d).

b)

Tab. 3:12 $\Rightarrow \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Longleftrightarrow \tau\,\text{sinc}_N\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$

Tidsskiftning (Tab. 2:8): $x(t-t_0) \Longleftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega t_0}$

Här är $x(t) = x_2\left(t+\frac{T}{2}\right) - x_2\left(t-\frac{T}{2}\right)$, där $x_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$:



$$\Rightarrow X(\omega) = X_2(\omega) \cdot e^{j\omega\frac{T}{2}} - X_2(\omega) \cdot e^{-j\frac{T}{2}} = 2jX_2(\omega) \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$
$$= 2j\left(\underbrace{T \cdot \mathrm{sinc}_N\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)}_{=\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)/\frac{\omega T}{2}}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \frac{4j}{\omega}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Anm: Se kommentar till svaret på uppgift a).

2.2.3 **a)**

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$\Rightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \frac{d}{d\omega}e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(t) \cdot (-jt)}_{=\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{dX(\omega)}{d\omega}\right\}} e^{-j\omega t}dt$$

$$\Rightarrow -jtx(t) \Longleftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

b)

$$\text{Tab. 3:5} \Rightarrow e^{-at} \cdot u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$$

Uppgift a) med $x(t) = e^{-at} \cdot u(t) \Rightarrow$

$$-jt \cdot e^{-at} \cdot u(t) \Longleftrightarrow \frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{a+j\omega}\right\} = \frac{-1 \cdot \overbrace{j}^{\text{Inre derivatan}}}{(a+j\omega)^2}$$

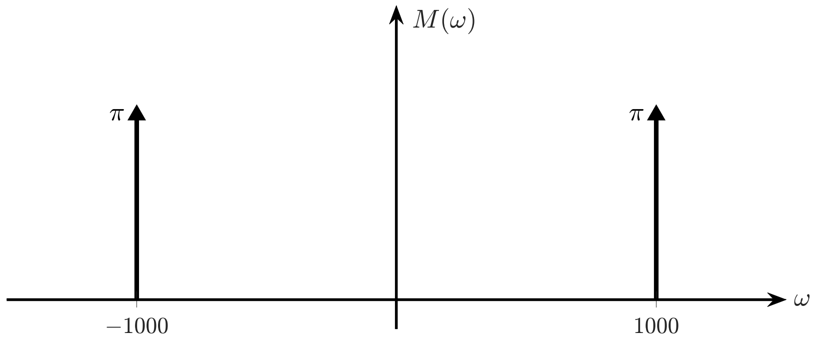
Dvs. $$t \cdot e^{-at} \cdot u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{(a+j\omega)^2}$$

2.2.4

$$\text{Tab. 3:22} \Rightarrow \cos(\omega_0 t) \Longleftrightarrow \pi\left(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right)$$

a)

$$m(t) = \cos(1000t) \Rightarrow M(\omega) = \pi\left(\delta(\omega + 1000) + \delta(\omega - 1000)\right)$$



b)

$$m(t) = 2\cos(1000t) + \cos(2000t)$$

$$\Rightarrow M(\omega) = 2\pi\left(\delta(\omega+1000) + \delta(\omega-1000)\right) + \pi\left(\delta(\omega+2000) + \delta(\omega-2000)\right)$$